Однако, имея в виду последующие применения рядов Фурье в математической физике, мы для единообразия написания и выработки надлежащих навыков будем вести все рассмотрения непосредственно для отрезка $[-l, l]$.

§ 2. Основная теорема о сходимости тригонометрического ряда Фурье

Целью настоящего параграфа является доказательство того, что *тригонометрический ряд Фурье* (11.16) *периодической кусочно-гладкой функции* $f(x)$ *с периодом* $2l$ *сходится к* $f(x)$ *в каждой точке непрерывности* $f(x)$.

Сначала вы опишем класс кусочно-гладких функций, играющих важную роль в математической физике, а затем перейдем к изложению основной теоремы.

1. Класс кусочно-гладких функций. *Функция* $f(x)$ *называется* ***кусочно-непрерывной*** *на* $[a, b]$, *если она непрерывна всюду на этом отрезке, исключая, быть может, конечное число точек разрыва первого рода.*

Такая функция имеет в каждой точке x отрезка $[a, b]$ конечные правое и левое предельные значения:

$$f(x+0)=\lim_{\substack{z\to 0\\ z>0}} f(x+z), \quad f(x-0)=\lim_{\substack{z\to 0\\ z>0}} f(x-z), \tag{11.27}$$

а в концах отрезка $[a, b]$ — конечные предельные значения $f(a+0)$ и $f(b-0)$.

Кусочно-непрерывную на $[a, b]$, $a<b$, *функцию* $f(x)$ *называют* ***кусочно-гладкой*** *на* $[a, b]$, *если* $f'(x)$ *существует и непрерывна всюду на этом отрезке, кроме, быть может, конечного числа точек, в которых, однако, существуют конечные правое и левое предельные значения*

$$f'(x+0)=\lim_{\substack{z\to 0\\ z>0}} f'(x+z), \quad f'(x-0)=\lim_{\substack{z\to 0\\ z>0}} f'(x-z). \tag{11.28}$$

При этом предполагается также, что существуют конечные предельные значения $f'(a+0)$ *и* $f'(b-0)$ *в концах отрезка* $[a, b]$.

Кусочно-гладкая функция $f(x)$ имеет в каждой точке x отрезка $[a, b]$ конечные правую и левую производные:

$$\left.\begin{aligned} f'_{\text{прав}}(x) &= \lim_{\substack{z\to 0\\ z>0}} \frac{f(x+z)-f(x+0)}{z}, \\ f'_{\text{лев}}(x) &= \lim_{\substack{z\to 0\\ z>0}} \frac{f(x-z)-f(x-0)}{-z}. \end{aligned}\right\} \tag{11.29}$$

Действительно, применяя формулу конечных приращений*) и используя соотношения (11.28), получим

$$\lim_{\substack{z\to 0\\ z>0}} \frac{f(x\pm z)-f(x\pm 0)}{\pm z} = \lim_{\substack{z\to 0\\ z>0}} f'(x\pm\theta z) = f'(x\pm 0), \qquad (11.30)$$

а следовательно, производные $f'_{\text{прав}}(x)$ и $f'_{\text{лев}}(x)$ существуют и имеют место равенства

$$f'_{\text{прав}}(x) = f'(x+0), \qquad f'_{\text{лев}}(x) = f'(x-0).$$

График кусочно-гладкой функции $f(x)$ имеет определенную касательную в каждой точке, кроме, быть может, конечного числа точек,

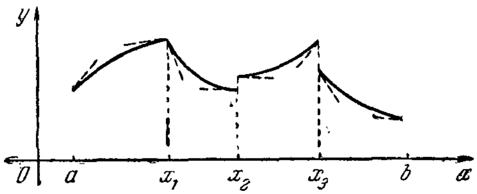


Рис. 11.2.

в которых, однако, существуют определенные правая и левая касательные (рис. 11.2).

Если $f(x)$ является кусочно-гладкой функцией на $[a, b]$, то, очевидно, $[a, b]$ можно разбить на конечное число таких отрезков

$$[a_0, a_1], [a_1, a_2], \ldots, [a_i, a_{i+1}], \ldots, [a_N, a_{N+1}],$$

где

$$a_0 = a < a_1 < \ldots < a_i < a_{i+1} < \ldots < a_N < a_{N+1} = b,$$

что внутри каждого отрезка $[a_i, a_{i+1}]$ функции $f(x)$ и $f'(x)$ непрерывны и стремятся к определенным конечным пределам

$$f(a_i+0), \quad f'(a_i+0) \quad \text{и} \quad f(a_{i+1}-0), \quad f'(a_{i+1}-0)$$

*) Нужную нам формулу конечных приращений $f(x+z)-f(x+0) = zf'(x+\theta z)$, где $0<\theta<1$, можно получить так: возьмем $0<\delta<z$ и применим обычную формулу конечных приращений

$$f(x+z)-f(x+\delta) = (z-\delta)\,f'(x+\xi),$$

где $0<\delta<\xi<z$, а затем перейдем к пределу при $\delta\to 0$.

при стремлении x к a_i справа и к a_{i+1} слева. Отсюда следует ограниченность $f(x)$ и $f'(x)$ на каждом из отрезков $[a_i, a_{i+1}]$, а следовательно и на $[a, b]$ *).

2. Формулировка основной теоремы о сходимости тригонометрического ряда Фурье.

Теорема 11.1. *Если функция $f(x)$ является кусочно-гладкой на отрезке $-l \leqslant x \leqslant l$, то ее тригонометрический ряд Фурье сходится в каждой точке x этого отрезка, причем для суммы*

$$S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty}\left(a_k \cos\frac{k\pi x}{l} + b_k \sin\frac{k\pi x}{l}\right) \tag{11.31}$$

этого ряда выполняются равенства:

1) $S(x) = f(x)$, *если* $-l < x < l$ *и* x *является точкой непрерывности* $f(x)$,

2) $S(x) = \dfrac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$, *если* $-l < x < l$ *и* x *является точкой разрыва* $f(x)$,

3) $S(-l) = S(l) = \dfrac{f(-l+0)+f(l-0)}{2}$.

Замечание. Если $-l < x < l$ и x является точкой непрерывности $f(x)$, то $f(x-0) = f(x+0) = f(x)$, а следовательно,

$$\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2} = \frac{2f(x)}{2} = f(x).$$

Поэтому равенства 1) и 2) можно заменить одним равенством

$$S(x) = \frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}, \tag{11.32}$$

выполняющимся в каждой внутренней точке x отрезка $[-l, l]$.

3. Основная лемма. Для доказательства теоремы нам потребуется следующая

Основная лемма. *Если $f(x)$ является кусочно-гладкой функцией на отрезке $a \leqslant x \leqslant b$, то*

$$\lim_{\alpha\to\infty}\int_a^b f(x)\sin\alpha x\,dx = 0. \tag{11.33}$$

---

*) Действительно, если $f(x)$ и $f'(x)$ доопределить по-новому в концах отрезка $[a_i, a_{i+1}]$, полагая, что $f(a_i) = f(a_i+0)$, $f(a_{i+1}) = f(a_{i+1}-0)$, $f'(a_i) = f'(a_i+0)$, $f'(a_{i+1}) = f'(a_{i+1}-0)$, то $f(x)$ и $f'(x)$ станут непрерывными на замкнутом отрезке $[a_i, a_{i+1}]$, а следовательно, и ограниченными на нем. Так как при этом значения $f(x)$ и $f'(x)$ могут измениться лишь в концах отрезка $[a_i, a_{i+1}]$, то и при первоначальном определении функции $f(x)$ и $f'(x)$ ограничены на $[a_i, a_{i+1}]$.

Доказательство. Разобьем $[a, b]$ на такие частичные отрезки

$$[a_0, a_1], [a_1, a_2], \ldots, [a_i, a_{i+1}], \ldots, [a_N, a_{N+1}],$$

где $a = a_0 < a_1 < \ldots < a_i < a_{i+1} < \ldots < a_N < a_{N+1} = b$, что функции $f(x)$ и $f'(x)$ внутри каждого отрезка $[a_i, a_{i+1}]$ непрерывны и стремятся к определенным конечным пределам

$$f(a_i+0),\ f'(a_i+0) \text{ и } f(a_{i+1}-0),\ f'(a_{i+1}-0)$$

при $x \to a_i$ справа и $x \to a_{i+1}$ слева. Так как

$$\int_a^b f(x)\sin\alpha x\,dx = \sum_{i=0}^{N} \int_{a_i}^{a_{i+1}} f(x)\sin\alpha x\,dx, \tag{11.34}$$

то достаточно доказать, что

$$\lim_{\alpha\to\infty} \int_{a_i}^{a_{i+1}} f(x)\sin\alpha x\,dx = 0 \tag{11.35}$$

при $0 \leqslant i \leqslant N$. Поскольку $f(x)$ и $f'(x)$ можно считать непрерывными на замкнутом отрезке $[a_i, a_{i+1}]$ (см. сноску на стр. 461), то можно воспользоваться интегрированием по частям. Это дает

$$\int_{a_i}^{a_{i+1}} f(x)\sin\alpha x\,dx = -\frac{f(x)\cos\alpha x}{\alpha}\Bigg|_{x=a_i+0}^{x=a_{i+1}-0} + \frac{1}{\alpha}\int_{a_i}^{a_{i+1}} f'(x)\cos\alpha x\,dx. \tag{11.36}$$

Так как $f(x)$ и $f'(x)$ ограничены на $[a, b]$, т. е. существуют такие константы M и M', что $|f(x)| \leqslant M$ и $|f'(x)| \leqslant M'$ всюду на $[a, b]$, то из равенства (11.36) следует неравенство

$$\left|\int_{a_i}^{a_{i+1}} f(x)\sin\alpha x\,dx\right| \leqslant \frac{2M}{\alpha} + \frac{M'(a_{i+1}-a_i)}{\alpha}. \tag{11.37}$$

Из неравенства (11.37) при $\alpha\to\infty$ следует соотношение (11.35). Этим основная лемма доказана.

Замечание 1. Можно доказать, что лемма верна и для значительно более широкого класса функций. Например, если $f(x)$ абсолютно интегрируема на $[a, b]$, т. е. несобственный интеграл $\int_a^b |f(x)|\,dx < +\infty$, то лемма также сохраняет силу.

Замечание 2. Под знаком интеграла в лемме можно вместо $\sin\alpha x$ брать $\cos\alpha x$.

4. Доказательство основной теоремы сходимости. Пусть $f(x)$ — кусочно-непрерывная и кусочно-гладкая функция на отрезке $-l \leqslant x \leqslant l$. Продолжим периодически функцию $f(x)$ с периодом $2l$ за пределы этого отрезка на всю ось x и докажем, что для каждого x, $-\infty < x < +\infty$,

$$\left\{S_n(x) - \frac{f(x-0)+f(x+0)}{2}\right\} \to 0 \text{ при } n \to +\infty, \tag{11.38}$$

где

$$S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}\left(a_k \cos\frac{k\pi x}{l} + b_k \sin\frac{k\pi x}{l}\right) \tag{11.39}$$

— частичная сумма тригонометрического ряда Фурье функции $f(x)$, отвечающего отрезку $-l \leqslant x \leqslant l$ *). Подставляя в (11.39) выражения коэффициентов Фурье

$$a_0 = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(\xi)\,d\xi, \quad a_k = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(\xi)\cos\frac{k\pi\xi}{l}\,d\xi,$$

$$b_k = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(\xi)\sin\frac{k\pi\xi}{l}\,d\xi, \tag{11.40}$$

получим

$$S_n(x) = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(\xi)\,d\xi + \frac{1}{l}\sum_{k=1}^{n}\int_{-l}^{l} f(\xi)\left[\cos\frac{k\pi\xi}{l}\cos\frac{k\pi x}{l} + \right.$$

$$\left. + \sin\frac{k\pi\xi}{l}\sin\frac{k\pi x}{l}\right]d\xi = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(\xi)\left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}\cos\frac{k\pi(\xi - x)}{l}\right]d\xi =$$

$$= \frac{1}{l}\int_{-l-x}^{l-x} f(x+z)\left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}\cos\frac{k\pi z}{l}\right]dz, \tag{11.41}$$

---

*) Так как $f(x)$ после периодического продолжения стала периодической функцией с периодом $2l$, а $\frac{1}{2}$, $\cos\frac{\pi x}{l}$, $\sin\frac{\pi x}{l}, \ldots, \cos\frac{k\pi x}{l}$, $\sin\frac{k\pi x}{l}$ также являются периодическими функциями с периодом $2l$, то интегралы при вычислении коэффициентов Фурье $a_0 = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\,dx$, $a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx$, $b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx$ можно после такого продолжения $f(x)$ брать не только по отрезку $-l \leqslant x \leqslant l$, но и по любому другому отрезку длины $2l$; от этого значения коэффициентов не изменятся.

где $z=\xi-x$. Найдем теперь замкнутое выражение для суммы

$$\sigma_n(z)=\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos\frac{k\pi z}{l}. \tag{11.42}$$

Умножая обе части (11.42) на $2\sin\frac{\pi z}{2l}$, получим

$$2\sigma_n(z)\sin\frac{\pi z}{2l}=\sin\frac{\pi z}{2l}+\sum_{k=1}^{n}2\sin\frac{\pi z}{2l}\cos\frac{k\pi z}{l}=$$

$$=\sin\frac{\pi z}{2l}+\sum_{k=1}^{n}\left[\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi z}{l}-\sin\left(k-\frac{1}{2}\right)\frac{\pi z}{l}\right]=\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi z}{l},$$

откуда

$$\sigma_n(z)=\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi z}{l}}{2\sin\frac{\pi z}{2l}}=\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos\frac{k\pi z}{l}. \tag{11.43}$$

Подставляя это в (11.41), получим для частичной суммы ряда Фурье выражение

$$S_n(x)=\frac{1}{l}\int_{-l-x}^{l-x}f(x+z)\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi z}{l}}{2\sin\frac{\pi z}{2l}}\,dz. \tag{11.44}$$

Так как $f(x)$ (периодически продолженная за пределы отрезка $[-l, l]$ с периодом $2l$) является периодической функцией с периодом $2l$ и так как, в силу (11.43), $\dfrac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi z}{l}}{2\sin\frac{\pi z}{2l}}$ является периодической функцией z с периодом $2l$, то произведение $f(x+z)\dfrac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi z}{l}}{2\sin\frac{\pi z}{2l}}$ также является периодической функцией z с периодом $2l$. Поэтому интеграл по z от этого произведения по любому отрезку длины $2l$ имеет одно и то же значение. Следовательно, в интеграле (11.44), берущемся по интервалу длины $2l$, пределы интегрирования $-l-x$ и $l-x$ можно заменить пределами $-l$ и l; в результате получим равенство

$$S_n(x)=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x+z)\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi z}{l}}{2\sin\frac{\pi z}{2l}}\,dz. \tag{11.45}$$

Интегрируя (11.43) по z от $-l$ до l, получим

$$\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi z}{l}}{2\sin\frac{\pi z}{2l}}dz=\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}dz=1, \tag{11.46}$$

так как $\int_{-l}^{l}\cos\frac{k\pi z}{l}dz=0$ при $k=1, 2, 3, \ldots$ Но $\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi z}{l}}{2\sin\frac{\pi z}{2l}}$ является четной функцией z (см. п. 8 § 1); поэтому из (11.46) вытекает, что

$$\frac{1}{l}\int_{-l}^{0}\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi z}{l}}{2\sin\frac{\pi z}{2l}}dz=\frac{1}{2} \quad \text{и} \quad \frac{1}{l}\int_{0}^{l}\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi z}{l}}{2\sin\frac{\pi z}{2l}}dz=\frac{1}{2}. \tag{11.47}$$

Умножая первое из равенств (11.47) на $f(x-0)$, а второе на $f(x+0)$ и складывая результаты, получим

$$\frac{f(x-0)+f(x+0)}{2}=\frac{1}{l}\int_{-l}^{0}f(x-0)\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi z}{l}}{2\sin\frac{\pi z}{2l}}dz+ \\ +\frac{1}{l}\int_{0}^{l}f(x+0)\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi z}{l}}{2\sin\frac{\pi z}{2l}}dz. \tag{11.48}$$

Вычитая (11.48) из (11.45), будем иметь

$$S_n(x)-\frac{f(x-0)+f(x+0)}{2}= \\ =\frac{1}{l}\int_{-l}^{0}[f(x+z)-f(x-0)]\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi z}{l}}{2\sin\frac{\pi z}{2l}}dz+ \\ +\frac{1}{l}\int_{0}^{l}[f(x+z)-f(x+0)]\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi z}{l}}{2\sin\frac{\pi z}{2l}}dz. \tag{11.49}$$

Докажем, что оба интеграла в правой части равенства (11.49) стремятся к нулю при $n\to+\infty$. Покажем это, например, для второго из интегралов (11.49). Представим оцениваемый интеграл в виде

$$J_n = \frac{1}{\pi} \int\limits_0^\delta \frac{f(x+z) - f(x+0)}{z} \, \frac{\frac{\pi z}{2l}}{\sin \frac{\pi z}{2l}} \sin\left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{\pi z}{l} \, dz +$$

$$+ \frac{1}{l} \int\limits_\delta^l \frac{f(x+z) - f(x+0)}{2 \sin \frac{\pi z}{2l}} \sin\left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{\pi z}{l} \, dz = J_n' + J_n'', \qquad (11.50)$$

взяв $0 < \delta < l$. Пусть дано $\varepsilon > 0$. Докажем, что за счет выбора $\delta > 0$ первый из интегралов (11.50) можно сделать по модулю $< \frac{\varepsilon}{2}$ сразу при всех $n = 1, 2, \ldots$ Так как $\frac{f(x+z) - f(x+0)}{z} \to f'(x+0)$ при $z \to 0+0$ *), то при достаточно малом $\delta > 0$ и всех z из интервала $0 < z < \delta$ будет

$$\left| \frac{f(x+z) - f(x+0)}{z} \right| < |f'(x+0)| + 1.$$

Так как $\dfrac{\frac{\pi z}{2l}}{\sin \frac{\pi z}{2l}} \to 1$ при $z \to 0$, то при достаточно малом $\delta > 0$ и всех z из интервала $0 < z < 2\delta$

$$1 < \frac{\frac{\pi z}{2l}}{\sin \frac{\pi z}{2l}} < 2.$$

Наконец, при всех действительных z и всех $n = 1, 2, \ldots$

$$\left| \sin\left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{\pi z}{l} \right| \leqslant 1.$$

Следовательно, при всех $n = 1, 2, \ldots$

$$|J_n'| \leqslant \frac{1}{\pi} \int\limits_0^\delta \left| \frac{f(x+z) - f(x+0)}{2} \right| \left| \frac{\frac{\pi z}{2l}}{\sin \frac{\pi z}{2l}} \right| \left| \sin\left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{\pi z}{l} \right| dz \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2\delta}{\pi} [|f'(x+0)| + 1],$$

если только $\delta > 0$ достаточно мало. Взяв $\delta > 0$ столь малым, чтобы $\frac{2\delta}{\pi} [|f'(x+0)| + 1] < \frac{\varepsilon}{2}$, получим, что

$$|J_n'| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{при всех } n = 1, 2, \ldots \qquad (11.51)$$

*) См. соотношения (11.30).

Фиксируем выбранное $\delta > 0$ и рассмотрим второй интеграл из (11.50)

$$J_n'' = \frac{1}{l}\int_{\delta}^{l} \frac{f(x+z) - f(x+0)}{2\sin\frac{\pi z}{2l}} \sin\left(n + \frac{1}{2}\right)\frac{\pi z}{l}\,dz.$$

Функция $\dfrac{f(x+z) - f(x+0)}{2\sin\frac{\pi z}{2l}}$ является кусочно-непрерывной и кусочно-гладкой на отрезке $\delta \leqslant z \leqslant l$ (при $\delta > 0$), так как таковым является числитель, а знаменатель $2\sin\frac{\pi z}{2l}$ представляет собой непрерывно дифференцируемую функцию, не обращающуюся в нуль на этом отрезке. Тогда по основной лемме $J_n'' \to 0$ при $n \to +\infty$ и, следовательно, при всех достаточно больших значениях n будет

$$|J_n''| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{11.52}$$

Сопоставляя (11.51) и (11.52), получим, в силу (11.50), что

$$|J_n| \leqslant |J_n'| + |J_n''| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \tag{11.53}$$

при всех достаточно больших n, т. е. $J_n \to 0$ при $n \to +\infty$.

Аналогично доказывается, что и первый из интегралов в правой части (11.49) стремится к нулю при $n \to +\infty$. Следовательно,

$$\lim_{n \to +\infty} S_n(x) = \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}. \tag{11.54}$$

Напомним, что $f(x)$ периодически продолжена за пределы отрезка $[-l, l]$ с периодом $2l$. Следовательно,

$$f(l+0) = f(-l+0) \quad \text{и} \quad f(-l-0) = f(l-0). \tag{11.55}$$

Подставляя в (11.54) сначала $x = -l$, а затем $x = l$ и используя соотношения (11.45), получим

$$\lim_{n \to +\infty} S_n(-l) = \lim_{n \to +\infty} S_n(l) = \frac{f(-l+0) + f(l-0)}{2}. \tag{11.56}$$

Этим доказательство теоремы завершено.

5. Примеры. 1. Разложим $f(x) = x$ в тригонометрический ряд Фурье на отрезке $[-l, l]$. В силу **нечетности** функции $f(x)$

$$a_0 = 0,\quad a_n = 0,\quad b_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx.$$

Интегрируя по частям, будем иметь

$$b_n=\frac{2}{l}\int_0^l x\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx=$$

$$=\frac{2}{l}\left\{\left(-\frac{xl}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{l}\right)\Bigg|_{x=0}^{x=l}+\frac{l}{n\pi}\int_0^l\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx\right\}=\frac{2l}{n\pi}(-1)^{n+1}.$$

Следовательно, по основной теореме сходимости

$$S(x)=\frac{2l}{\pi}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k}\sin\frac{k\pi x}{l}=$$

$$=\begin{cases}\dfrac{f(x-0)+f(x+0)}{2}=x & \text{при}\quad -l<x<l,\\[2mm] \dfrac{f(-l+0)+f(l-0)}{2}=\dfrac{-l+l}{2}=0 & \text{при}\quad x=\pm l.\end{cases}\qquad(11.57)$$

Графики $f(x)=x$ и $S(x)$ изображены на рис. 11.3.

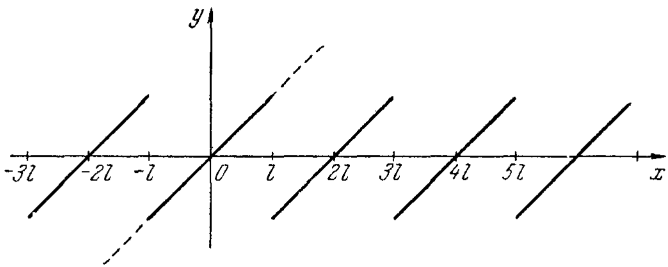


Рис. 11.3.

Функция $S(x)$ является периодической с периодом $2l$, причем $S(x)=x$ только при $-l<x<l$. В точках вида $x=(2k+1)l$, $k=0, \pm1, \pm2, \ldots$, $S(x)$ претерпевает разрывы, принимая значение, равное нулю, так как полусумма правого и левого предельных значений $S(x)$ в каждой такой точке равна нулю. На рис. 11.4 приведен график частичной суммы $S_5(x)=\frac{2l}{\pi}\sum_{k=1}^{5}\frac{(-1)^{k+1}}{k}\sin\frac{k\pi x}{l}$ при $-l\leqslant x\leqslant l$.

2. Пусть $f(x)=x^2$ на отрезке $[-l, l]$. Так как $f(x)=x^2$ — функция четная, то

$$a_0=\frac{2}{l}\int_0^l x^2\,dx,\quad a_n=\frac{2}{l}\int_0^l x^2\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx,\quad b_n=0,\ n=1, 2, \ldots$$

Вычислив коэффициенты a_0 и a_n, получим, в силу основной теоремы сходимости, что

$$S(x)=\frac{l^2}{3}+\frac{4l^2}{\pi^2}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k^2}\cos\frac{k\pi x}{l}=x^2 \quad \text{при } -l\leqslant x\leqslant l. \qquad (11.58)$$

Графики функции $f(x)=x^2$ и суммы ряда Фурье $S(x)$ изображены на рис. 11.5.

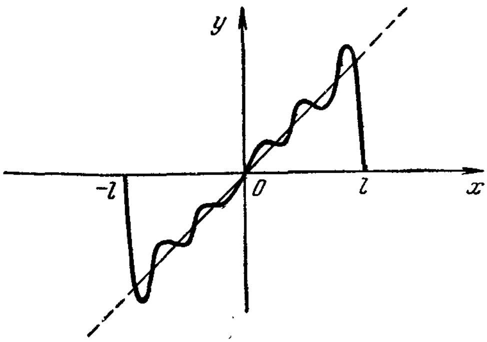


Рис. 11.4

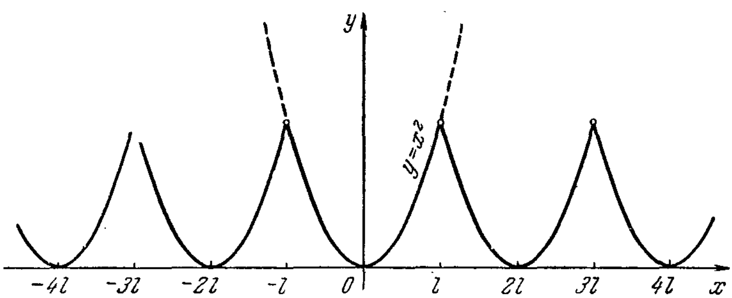


Рис. 11.5.

Функция $S(x)$ является непрерывной и в точках вида $x=(2k+1)\pi$, $k=0, \pm1, \pm2, \ldots$, так как $f(-l+0)=f(l-0)=l^2$ для функции $f(x)=x^2$.

Если разложение ведется на интервале $[-\pi, \pi]$, т. е. $l=\pi$, то равенство (11.58) принимает вид

$$x^2=\frac{\pi^2}{3}+4\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k^2}\cos kx. \qquad (11.59)$$

При $x=0$ из (11.59) получаем полезное равенство

$$\frac{\pi^2}{12}=1-\frac{1}{4}+\frac{1}{9}-\frac{1}{16}+\ldots+(-1)^{k-1}\frac{1}{k^2}+\ldots \qquad (11.60)$$

3. Пусть

$$f(x)=\begin{cases} c_1 & \text{при} \quad -l<x<0, \\ c_2 & \text{при} \quad 0<x<l. \end{cases}$$

Тогда

$$a_0=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\,dx=\frac{1}{l}\int_{-l}^{0} c_1\,dx+\frac{1}{l}\int_{0}^{l} c_2\,dx=c_1+c_2,$$

$$a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx=\frac{1}{l}\int_{-l}^{0} c_1\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx+\frac{1}{l}\int_{0}^{l} c_2\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx=0,$$

$$b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx=\frac{1}{l}\int_{-l}^{0} c_1\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx+\frac{1}{l}\int_{0}^{l} c_2\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx.$$

Следовательно, $b_n=0$ при n четном и $b_n=\dfrac{2(c_2-c_1)}{\pi n}$ при n нечетном.

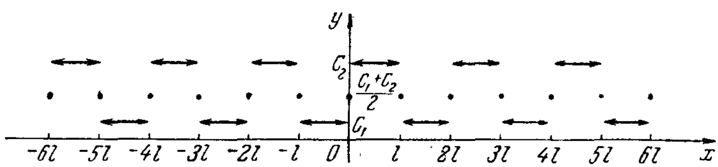


Рис. 11.6.

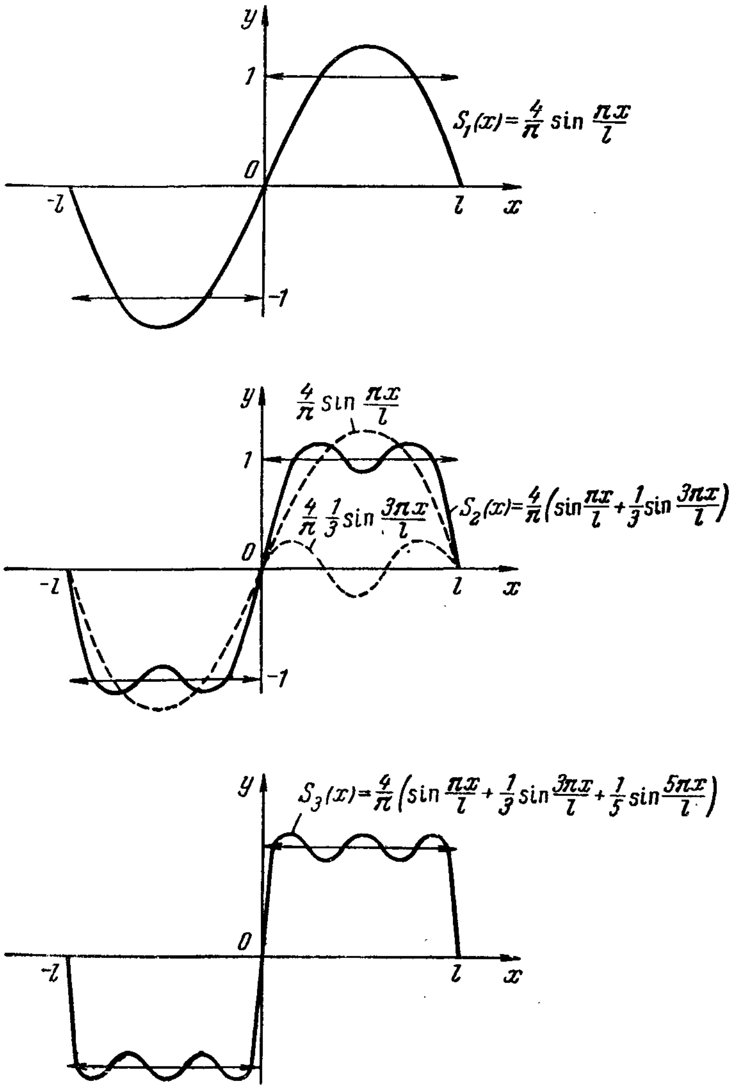
Поэтому, в силу основной теоремы сходимости,

$$S(x)=\frac{c_1+c_2}{2}+\frac{2(c_2-c_1)}{\pi}\left\{\sin\frac{\pi x}{l}+\frac{1}{3}\sin\frac{3\pi x}{l}+\frac{1}{5}\sin\frac{5\pi x}{l}+\ldots\right\}=$$

$$=\begin{cases} c_1 & \text{при} \quad -l<x<0, \\ c_2 & \text{при} \quad 0<x<l, \\ \dfrac{c_1+c_2}{2} & \text{при} \quad x=\pm l,\ 0. \end{cases}$$

График $S(x)$ изображен на рис. 11.6.

На рис. 11.7 приведены графики частичных сумм полученного ряда Фурье $S_1(x)$, $S_2(x)$ и $S_3(x)$ при условии, что $c_1=-1$, $c_2=+1$,



y
1
$S_1(x)=\frac{4}{\pi}\sin\frac{\pi x}{l}$
0
-l
l
x
-1
y
$\frac{4}{\pi}\sin\frac{\pi x}{l}$
1
$\frac{4}{\pi}\frac{1}{3}\sin\frac{3\pi x}{l}$
$S_2(x)=\frac{4}{\pi}\left(\sin\frac{\pi x}{l}+\frac{1}{3}\sin\frac{3\pi x}{l}\right)$
0
-l
l
x
-1
y
$S_3(x)=\frac{4}{\pi}\left(\sin\frac{\pi x}{l}+\frac{1}{3}\sin\frac{3\pi x}{l}+\frac{1}{5}\sin\frac{5\pi x}{l}\right)$
0
-l
l
x

Рис. 11.7.

когда ряд принимает вид

$$S(x)=\frac{4}{\pi}\left\{\sin\frac{\pi x}{l}+\frac{1}{3}\sin\frac{3\pi x}{l}+\frac{1}{5}\sin\frac{5\pi x}{l}+\ldots\right\}=$$

$$=\begin{cases}-1 & \text{при} \quad -l<x<0,\\ \;\;1 & \text{при} \quad 0<x<l,\\ \;\;0 & \text{при} \quad x=0,\ x=\pm l.\end{cases}$$

6. Разложение функций, заданных на отрезке [0, l], только по синусам или только по косинусам. Пусть кусочно-непрерывная и кусочно-гладкая функция $f(x)$ задана на отрезке $0\leqslant x\leqslant l$. Ее можно продолжить различным образом на отрезок $-l\leqslant x\leqslant 0$, в частности: 1) четно и 2) нечетно. В первом случае на отрезке $[-l, l]$ получится четная функция. Для нее

$$a_0=\frac{2}{l}\int_0^l f(\xi)\,d\xi,\quad a_k=\frac{2}{l}\int_0^l f(\xi)\cos\frac{k\pi\xi}{l}\,d\xi,\quad b_k=0,\qquad (11.61)$$

а ряд Фурье на отрезке $[-l, l]$ принимает вид

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{+\infty}a_k\cos\frac{k\pi x}{l}.\qquad (11.62)$$

Во втором случае получается нечетная функция на отрезке $[-l, l]$. Для нее

$$a_0=0,\quad a_k=0,\quad b_k=\frac{2}{l}\int_0^l f(\xi)\sin\frac{k\pi\xi}{l}\,d\xi,\qquad (11.63)$$

а ряд Фурье на отрезке $[-l, l]$ принимает вид

$$f(x)\sim\sum_{k=1}^{+\infty}b_k\sin\frac{k\pi x}{l}.\qquad (11.64)$$

На отрезке $0<x<l$ каждый из рядов (11.62) и (11.64) сходится к $f(x)$ (в точках непрерывности $f(x)$).

Следовательно, мы можем сказать, что каждую кусочно-гладкую функцию $f(x)$, заданную на отрезке $0\leqslant x\leqslant l$, можно, по желанию, разложить в ряд по одним косинусам (11.62), коэффициенты которого находятся по формулам (11.61), и в ряд по одним синусам (11.64), коэффициенты которого находятся по формулам (11.63).

Пусть, например, $f(x)=x$ на отрезке $0\leqslant x\leqslant l$; при нечетном продолжении получаем $f(x)=x$ на отрезке $-l\leqslant x\leqslant l$, но разложение такой функции в ряд Фурье было рассмотрено выше (см. пример 1 и рис. 11.3). При четном продолжении $f(x)=x$ получаем $f(x)=|x|$ на отрезке $-l\leqslant x\leqslant l$. Разлагая $f(x)$ в ряд по косинусам на отрезке $0 \leqslant x \leqslant l$ по формулам (11.61), (11.62), получим

$$x = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \cos \frac{k\pi x}{l} \quad \text{при} \quad 0 \leqslant x \leqslant l,$$

где

$$a_0 = \frac{2}{l} \int_0^l x\, dx = l, \quad a_n = \frac{2}{l} \int_0^l x \cos \frac{k\pi x}{l} dx = \frac{2l}{\pi^2 n^2} [(-1)^n - 1] =$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{при } n \text{ четном,} \\ -\dfrac{4l}{\pi^2 n^2} & \text{при } n \text{ нечетном.} \end{cases}$$

Следовательно,

$$x = \frac{l}{2} - \frac{4l}{\pi^2} \left\{ \cos \frac{\pi x}{l} + \frac{1}{3^2} \cos \frac{3\pi z}{l} + \frac{1}{5^2} \cos \frac{5\pi x}{l} + \ldots \right\} \quad (11.65)$$

$$\text{при} \quad 0 \leqslant x \leqslant l.$$

Справедливость равенства (11.65) при $x = 0$ и $x = l$ легко установить, если рассматривать (11.65) как тригонометрический ряд

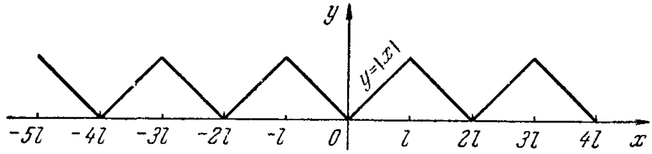


Рис. 11.8.

Фурье четной функции $f(x) = |x|$, заданной на отрезке $[-l, l]$. Такое истолкование ряда (11.65) позволяет легко построить график его суммы при любых значениях x (рис. 11.8).

Вообще, так как при четном продолжении любой кусочно-непрерывной и кусочно-гладкой функции $f(x)$, заданной на отрезке $[0, l]$, имеют место соотношения

$$f(-0) = f(+0) \quad \text{и} \quad f(-l+0) = f(l-0), \qquad (11.66)$$

то сумма ее тригонометрического ряда Фурье в точках $x = 0$ и $x = \pm l$ будет непрерывной и равной соответственно $f(+0) = f(-0)$ и $f(-l+0) = f(l-0)$. Если $f(x)$, кроме того, непрерывна в концах отрезка $[0, l]$, т. е. $f(+0) = f(0)$ и $f(l-0) = f(l)$, то отсюда следует, что сумма ее ряда по косинусам равна $f(x)$ и в концах этого отрезка.

Напротив, при разложении $f(x)$, $0 \leqslant x \leqslant l$, в ряд по синусам, т. е. при нечетном продолжении $f(x)$ на отрезок $-l \leqslant x \leqslant 0$, у сумм ряда Фурье могут появиться разрывы в точках $x=0$ и $x=\pm l$, несмотря на непрерывность и гладкость $f(x)$ на отрезке $0 \leqslant x \leqslant l$. На рис. 11.9 изображен график суммы ряда Фурье нечетно продолженной функции $f(x)=x+1$, заданной при $0 \leqslant x \leqslant l$. Так как

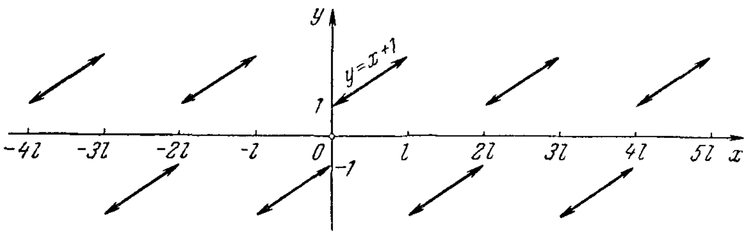


Рис. 11.9.

при нечетном продолжении $f(-0)=-f(+0)$ и $f(-l+0)=-f(l-0)$, то равенства $f(-0)=f(+0)$ и $f(-l+0)=f(l-0)$, необходимые для непрерывности суммы ряда Фурье в точках $x=0$ и $x=\pm l$, будут иметь место только в случае, когда

$$f(+0)=0 \quad \text{и} \quad f(l-0)=0. \tag{11.67}$$

§ 3. Ряды Фурье по ортогональным системам. Неравенство Бесселя

Разложение функции $f(x)$ в тригонометрический ряд Фурье является частным случаем разложения $f(x)$ в ряд по ортогональной системе функций.

1. Ортогональные системы функций. *Функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$, интегрируемые*) на $[a, b]$, называются ортогональными на $[a, b]$, если*

$$\int_a^b \varphi(x)\psi(x)\,dx=0. \tag{11.68}$$

Система функций

$$\varphi_1(x),\ \varphi_2(x),\ \ldots,\ \varphi_n(x),\ \ldots, \tag{11.69}$$

интегрируемых на $[a, b]$, называется ортогональной на $[a, b]$, если

$$\int_a^b \varphi_i(x)\varphi_k(x)\,dx=\begin{cases} 0 & \text{при } i \neq k, \\ >0 & \text{при } i=k. \end{cases} \tag{11.70}$$

---

*) Всюду, если не оговорено противное, интегрируемость понимается в смысле собственного интеграла, а функции предполагаются вещественными.