у сумм ряда Фурье могут появиться разрывы в точках $x=0$ и $x=\pm l$, несмотря на непрерывность и гладкость $f(x)$ на отрезке $0\leqslant x\leqslant l$. На рис. 11.9 изображен график суммы ряда Фурье нечетно продолженной функции $f(x)=x+1$, заданной при $0\leqslant x\leqslant l$. Так как

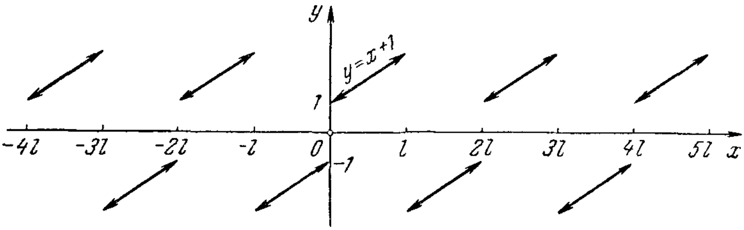

Рис. 11.9.

при нечетном продолжении $f(-0)=-f(+0)$ и $f(-l+0)=$ $=-f(l-0)$, то равенства $f(-0)=f(+0)$ и $f(-l+0)=f(l-0)$, необходимые для непрерывности суммы ряда Фурье в точках $x=0$ и $x=\pm l$, будут иметь место только в случае, когда

$$f(+0)=0 \quad \text{и} \quad f(l-0)=0. \tag{11.67}$$

§ 3. Ряды Фурье по ортогональным системам. Неравенство Бесселя

Разложение функции $f(x)$ в тригонометрический ряд Фурье является частным случаем разложения $f(x)$ в ряд по ортогональной системе функций.

1. Ортогональные системы функций. *Функции* $\varphi(x)$ *и* $\psi(x)$, *интегрируемые**) *на* $[a, b]$, *называются* *ортогональными* *на* $[a, b]$, *если*

$$\int_a^b \varphi(x)\psi(x)\,dx=0. \tag{11.68}$$

Система функций

$$\varphi_1(x),\ \varphi_2(x),\ \ldots,\ \varphi_n(x),\ \ldots, \tag{11.69}$$

интегрируемых на $[a, b]$, *называется* *ортогональной* *на* $[a, b]$, *если*

$$\int_a^b \varphi_i(x)\varphi_k(x)\,dx=\begin{cases} 0 & \text{при } i\neq k,\\ >0 & \text{при } i=k.\end{cases} \tag{11.70}$$

*) Всюду, если не оговорено противное, интегрируемость понимается в смысле собственного интеграла, а функции предполагаются вещественными.

Приведем примеры ортогональных систем.

1) Основная тригонометрическая система

$$\frac{1}{2},\ \cos\frac{\pi x}{l},\ \sin\frac{\pi x}{l},\ \ldots,\ \cos\frac{k\pi x}{l},\ \sin\frac{k\pi x}{l},\ \ldots \tag{11.71}$$

ортогональна на отрезке $[-l, l]$.

2) Системы функций

$$\begin{aligned} &\text{а)}\ \frac{1}{2},\ \cos\frac{\pi x}{l},\ \cos\frac{2\pi x}{l},\ \ldots,\ \cos\frac{k\pi x}{l},\ \ldots,\\ &\text{б)}\ \sin\frac{\pi x}{l},\ \sin\frac{2\pi x}{l},\ \ldots,\ \sin\frac{k\pi x}{l},\ \ldots \end{aligned} \tag{11.72}$$

ортогональны (каждая) на отрезке $[0, l]$.

3) Система полиномов Лежандра

$$P_n(x)=\frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}[(x^2-1)^n],\qquad n=1,\ 2,\ \ldots,\ P_0(x)=1, \tag{11.73}$$

ортогональна на отрезке $[-1, 1]$ (см. Дополнение 1 к гл. 11).

Если функция $\varphi(x)$ *интегрируема на* $[a, b]$, *то ее* ***нормой*** *на* $[a, b]$ *назовем неотрицательное число*

$$\|\varphi\|=\left(\int_a^b \varphi^2(x)\,dx\right)^{1/2}. \tag{11.74}$$

Нормы всех функций ортогональной системы положительны, в силу соотношений (11.70), которыми определяется ортогональность системы.

Используя символ нормы, эти соотношения можно переписать так:

$$\int_a^b \varphi_i(x)\,\varphi_k(x)\,dx=\begin{cases} 0 & \text{при}\quad i\neq k,\\ \|\varphi_k\|^2 & \text{при}\quad i=k. \end{cases} \tag{11.75}$$

Приведем нормы функций некоторых ортогональных систем.

1) Нормы функций основной тригонометрической системы (11.71) на отрезке $[-l, l]$ равны, в силу определения (11.74) и соотношений (11.13_2):

$$\left\|\frac{1}{2}\right\|=\sqrt{\frac{l}{2}},\quad \left\|\cos\frac{k\pi x}{l}\right\|=\sqrt{l},\quad \left\|\sin\frac{k\pi x}{l}\right\|=\sqrt{l}, \tag{11.76}$$

$$k=1,\ 2,\ \ldots$$

2) Нормы функций систем (11.72) на отрезке $[0, l]$, как нетрудно вычислить, равны

$$\begin{aligned} &\text{а)}\ \left\|\frac{1}{2}\right\|=\frac{\sqrt{l}}{2},\quad \left\|\cos\frac{k\pi x}{l}\right\|=\sqrt{\frac{l}{2}},\\ &\text{б)}\ \left\|\sin\frac{k\pi x}{l}\right\|=\sqrt{\frac{l}{2}}. \end{aligned} \tag{11.77}$$

3) Нормы полиномов Лежандра на отрезке $[-1, 1]$ равны

$$\|P_n(x)\| = \left(\int_{-1}^{+1} P_n^2(x)\,dx\right)^{1/2} = \sqrt{\frac{2}{2n+1}}. \qquad (11.78)$$

(По поводу вычисления нормы $\|P_n(x)\|$ см. Дополнение 1 к гл. 11.)

2. Коэффициенты Фурье и ряд Фурье функции $f(x)$ по ортогональной системе. Пусть функция $f(x)$ интегрируема на $[a, b]$ и пусть на $[a, b]$ имеет место равенство

$$f(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} a_k\varphi_k(x), \qquad (11.79)$$

где a_k — постоянные числа, а $\varphi_k(x)$ — функции ортогональной на $[a, b]$ системы (11.69). Если ряды, получающиеся после умножения равенства (11.79) на любую функцию $\varphi_n(x)$ системы (11.69), можно интегрировать почленно *), то, в силу ортогональности системы (11.69), коэффициенты a_k очень просто выражаются через $f(x)$ следующим образом. Умножим равенство (11.79), на $\varphi_n(x)$ и проинтегрируем по x от a до b; мы получим

$$\int_a^b f(x)\varphi_n(x)\,dx = \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \int_a^b \varphi_k(x)\varphi_n(x)\,dx. \qquad (11.80)$$

Все интегралы в правой части равенства (11.80) при $k \neq n$ обращаются в нуль, в силу соотношений ортогональности (11.70). Следовательно,

$$\int_a^b f(x)\varphi_n(x)\,dx = a_n \int_a^b \varphi_n^2(x)\,dx = a_n\|\varphi_n\|^2,$$

откуда

$$a_n = \frac{1}{\|\varphi_n\|^2}\int_a^b f(x)\varphi_n(x)\,dx \qquad (11.81)$$

Числа a_n, определяемые по формулам (11.81), называются *коэффициентами Фурье функции* $f(x)$ *по ортогональной системе* (11.69), а ряд (11.79), коэффициенты a_k которого определяются по формулам (11.81), называется *рядом Фурье функции* $f(x)$ *по ортогональной системе* (11.69).

Так как для образования чисел a_k по формулам (11.81) от функции $f(x)$ требуется лишь интегрируемость (напомним, что функ-

*) Возможность такого почленного интегрирования заведомо будет иметь место, если ряд (11.79) сходится к своей сумме равномерно или в среднем на отрезке $[a, b]$.

ции $\varphi_k(x)$ интегрируемы в силу определения ортогональной системы), то каждой интегрируемой на $[a, b]$ функции $f(x)$ можно поставить в соответствие ее ряд Фурье по системе (11.69), ортогональной на $[a, b]$:

$$f(x) \sim \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \varphi_k(x), \tag{11.82}$$

т. е. ряд, коэффициенты a_k которого находятся по формулам (11.81).

Условия, которым должна удовлетворять функция $f(x)$ для того, чтобы знак соответствия в соотношении (11.82) можно было заменить знаком равенства, зависят от свойств ортогональной системы $\{\varphi_k(x)\}$. Для случая, когда в качестве ортогональной системы, по которой ведется разложение, взята основная тригонометрическая система, соответствующие достаточные условия содержатся в доказанной выше основной теореме сходимости тригонометрического ряда Фурье. Доказательство аналогичных теорем сходимости для других ортогональных систем требует специального рассмотрения.

3. Задача о наименьшем квадратичном уклонении. Тождество Бесселя. Неравенство Бесселя. Рассмотрим какой-либо фиксированный отрезок

$$\varphi_1(x), \ \varphi_2(x), \ \ldots, \ \varphi_n(x) \tag{11.83}$$

системы (11.69), ортогональной на $[a, b]$; линейная комбинация функций

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi_k(x) \tag{11.84}$$

с произвольными числовыми коэффициентами α_k, $k = 1, 2, \ldots, n$, называется *многочленом n-го порядка по ортогональной системе* (11.69).

Пусть функция $f(x)$ интегрируема на $[a, b]$ и пусть требуется решить следующую задачу:

Найти, при каких значениях коэффициентов α_k, $k = 1, 2, \ldots, n$, многочлен n-го порядка по данной ортогональной системе имеет наименьшее квадратичное уклонение (гл. 8, § 6, п. 1) от функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$, т. е. при каких значениях коэффициентов $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ величина

$$\rho^2\left(f, \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi_k\right) = \int_a^b \left[f(x) - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi_k(x)\right]^2 dx = \left\| f - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi_k \right\|^2 \tag{11.85}$$

достигает своего абсолютного минимума.

Раскрывая квадратную скобку, получим

$$\rho^2\left(f, \sum_{k=1}^{n}\alpha_k\varphi_k\right)=$$

$$=\int_a^b f^2(x)\,dx-2\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\int_a^b f(x)\,\varphi_k(x)\,dx+\int_a^b\left(\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\varphi_k(x)\right)^2 dx=$$

$$=\int_a^b f^2(x)\,dx-2\sum_{k=1}^{n}\alpha_k a_k\|\varphi_k\|^2+\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\|\varphi_k\|^2, \quad (11.86)$$

так как $\int_a^b f(x)\,\varphi_k(x)\,dx=a_k\|\varphi_k\|^2$ (согласно (11.81))

и $\int_a^b \varphi_i(x)\,\varphi_k(x)\,dx=0$ при $i\neq k$, а $\int_a^b \varphi_k^2(x)\,dx=\|\varphi_k\|^2$.

Дополняя до полного квадрата, из (11.86) получим

$$\rho^2\left(f, \sum_{k=1}^{n}\alpha_k\varphi_k\right)=\int_a^b f^2(x)\,dx-\sum_{k=1}^{n}a_k^2\|\varphi_k\|^2+\sum_{k=1}^{n}(\alpha_k-a_k)^2\|\varphi_k\|^2. \quad (11.87)$$

Только последняя сумма в правой части (11.87) зависит от коэффициентов α_k. Так как эта сумма неотрицательна, то она достигает точной нижней грани, обращаясь в нуль при $\alpha_k=a_k$; при этом квадратичное уклонение $\rho^2\left(f, \sum_{k=1}^{n}\alpha_k\varphi_k\right)$ достигает, очевидно, своего абсолютного минимума, равного

$$\min\rho^2\left(f, \sum_{k=1}^{n}\alpha_k\varphi_k\right)=\int_a^b\left[f(x)-\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\varphi_k(x)\right]^2 dx=$$

$$=\int_a^b f^2(x)\,dx-\sum_{k=1}^{n}a_k^2\|\varphi_k\|^2. \quad (11.88)$$

Многочлен

$$\sum_{k=1}^{n}a_k\varphi_k(x), \quad (11.89)$$

коэффициенты a_k которого являются коэффициентами Фурье функции $f(x)$ по данной ортогональной системе $\{\varphi_k(x)\}$, называется *многочленом Фурье функции $f(x)$ по данной ортогональной системе $\{\varphi_k(x)\}$*.

Итак, среди всех многочленов n-го порядка (n фиксировано) по данной ортогональной на $[a, b]$ системе $\{\varphi_k(x)\}$ наименьшее квадратичное уклонение от функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ имеет многочлен Фурье функции $f(x)$ по этой ортогональной системе.

Равенство (11.88), выражающее квадратичное уклонение от $f(x)$ ее многочлена Фурье на отрезке $[a, b]$, называется *тождеством Бесселя*.

Замечая, что левая часть равенства (11.88) неотрицательна, получим неравенство

$$\sum_{k=1}^{n} a_k^2 \|\varphi_k\|^2 \leqslant \int_a^b f^2(x)\,dx, \tag{11.90}$$

справедливое при всех $n \geqslant 1$, поскольку правая его часть от n не зависит. При возрастании n сумма, стоящая в левой части неравенства (11.90), не убывает; в силу ограниченности сверху, она стремится к определенному конечному пределу при $n \to +\infty$. Переходя к пределу в неравенстве (11.90) при $n \to +\infty$, получим так называемое *неравенство Бесселя*

$$\sum_{k=1}^{+\infty} a_k^2 \|\varphi_k\|^2 \leqslant \int_a^b f^2(x)\,dx. \tag{11.91}$$

В случае основной тригонометрической системы неравенство (11.91) принимает, в силу соотношений (11.76), вид

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} (a_k^2 + b_k^2) \leqslant \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f^2(x)\,dx. \tag{11.92}$$

Неравенство Бесселя (11.91) мы установили для любой функции $f(x)$, интегрируемой в обычном смысле на отрезке $[a, b]$.

Функция $f(x)$ называется *интегрируемой с квадратом* на $[a, b]$, если интегралы

$$\int_a^b f(x)\,dx \quad \text{и} \quad \int_a^b f^2(x)\,dx \tag{11.93}$$

существуют как собственные или как несобственные.

Неравенство Бесселя (11.91) (а следовательно, и 11.92) сохраняет силу и для любой функции $f(x)$, интегрируемой с квадратом на $[a, b]$.

Более того, неравенство Бесселя (11.91) сохраняет силу и в том случае, когда функции $\varphi_k(x)$ ортогональной системы также являются функциями, интегрируемыми с квадратом. Действительно, из сходимости интегралов $\int\limits_a^b f^2(x)\,dx$, $\int\limits_a^b \varphi_k^2(x)\,dx$ и очевидных неравенств

$$|f(x)\varphi_k(x)| \leqslant \frac{f^2(x)+\varphi_k^2(x)}{2}, \quad |\varphi_i(x)\varphi_k(x)| \leqslant \frac{\varphi_i^2(x)+\varphi_k^2(x)}{2} \; *)$$

вытекает, в силу общего признака сравнения, абсолютная сходимость интегралов

$$\int\limits_a^b f(x)\varphi_k(x)\,dx \quad \text{и} \quad \int\limits_a^b \varphi_i(x)\varphi_k(x)\,dx,$$

а при написании и выводе неравенства Бесселя мы имеем дело лишь с такими интегралами **).

Вводя понятие интегрируемости с квадратом и ортогональности с весом можно вывести обобщенное неравенство Бесселя, справедливое для более широкого класса функций (см. по этому поводу Дополнение 2 к гл. 11).

Из неравенства Бесселя для случая основной тригонометрической системы (см. неравенство (11.92)) вытекает сходимость ряда $\frac{a_0^2}{2}+\sum\limits_{k=1}^{+\infty}(a_k^2+b_k^2)$ и, следовательно,

$$\begin{aligned} \lim_{k\to+\infty} a_k &= \frac{1}{l}\lim_{k\to+\infty}\int\limits_{-l}^{+l} f(x)\cos\frac{k\pi x}{l}\,dx = 0,\\ \lim_{k\to+\infty} b_k &= \frac{1}{l}\lim_{k\to\infty}\int\limits_{-l}^{+l} f(x)\sin\frac{k\pi x}{l}\,dx = 0. \end{aligned} \tag{11.94}$$

Соотношения (11.94) являются частным случаем более общих соотношений

$$\lim_{\alpha\to+\infty}\int\limits_{-l}^{+l} f(x)\cos\alpha x\,dx = 0, \quad \lim_{\alpha\to+\infty}\int\limits_{-l}^{+l} f(x)\sin\alpha x\,dx = 0, \tag{11.95}$$

справедливых, в силу замечания 1 к основной лемме (см. § 2), для абсолютно интегрируемых функций.

---

*) $0 \leqslant (|f(x)| - |\varphi_k(x)|)^2 = f^2(x) - 2|f(x)\varphi_k(x)| + \varphi_k^2(x)$, откуда

$$|f(x)\varphi_k(x)| \leqslant \frac{1}{2}\left[f^2(x)+\varphi_k^2(x)\right].$$

**) По поводу дальнейших обобщений см. Дополнение 2 к гл. 11.