§ 4. Связь между степенью гладкости функции и скоростью сходимости ее тригонометрического ряда Фурье. Понятие улучшения сходимости

Сначала мы изучим условия равномерной сходимости тригонометрического ряда Фурье, а затем установим связь между степенью гладкости функции $f(x)$ и скоростью убывания коэффициентов a_k и b_k ее тригонометрического ряда Фурье (при неограниченном возрастании номера k), и оценить скорость сходимости этого ряда.

1. Условия равномерной сходимости тригонометрического ряда Фурье. Равномерную сходимость тригонометрического ряда Фурье мы докажем для непрерывной и кусочно-гладкой функции, удовлетворяющей некоторому дополнительному необходимому условию. Напомним, что функция $f(x)$ называется непрерывной и кусочно-гладкой на отрезке $[-l, l]$, если сама она непрерывна, а ее производная $f'(x)$ кусочно-непрерывна на этом отрезке. Справедлива следующая

Теорема 11.2. *Если непрерывная и кусочно-гладкая на отрезке $[-l, l]$ функция $f(x)$ имеет равные значения на концах этого отрезка $f(-l)=f(l)$, то ее тригонометрический ряд Фурье*

$$S(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{+\infty}\left(a_k\cos\frac{k\pi x}{l}+b_k\sin\frac{k\pi x}{l}\right), \tag{11.96}$$

где

$$a_0=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(\xi)\,d\xi,\quad a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(\xi)\cos\frac{n\pi\xi}{l}\,d\xi,$$

$$b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(\xi)\sin\frac{n\pi\xi}{l}\,d\xi, \tag{11.97}$$

сходится равномерно на этом отрезке, причем $S(x)=f(x)$ в каждой точке отрезка $[-l, l]$.

Доказательство. Чтобы доказать равномерную сходимость ряда (11.96), достаточно доказать сходимость мажорирующего числового ряда

$$\frac{|a_0|}{2}+\sum_{k=1}^{+\infty}(|a_k|+|b_k|) \tag{11.98}$$

или, что равносильно, сходимость ряда

$$\sum_{k=1}^{+\infty}(|a_k|+|b_k|). \tag{11.99}$$

Тогда по признаку Вейерштрасса (см. п. 2, § 1 гл. 8) ряд (11.96) будет равномерно сходящимся на всей оси x, так как

$$\left|a_k\cos\frac{k\pi x}{l}\right|\leqslant|a_k| \quad\text{и}\quad \left|b_k\sin\frac{k\pi x}{l}\right|\leqslant b_k$$

при всех x, $-\infty<x<+\infty$. Обозначим через a_k' и b_k' коэффициенты Фурье производной $f'(x)$:

$$a_k'=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f'(x)\cos\frac{k\pi x}{l}\,dx,\quad b_k'=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f'(x)\sin\frac{k\pi x}{l}\,dx,$$

и выполним в формулах для коэффициентов Фурье функции $f(x)$ интегрирование по частям. Будем иметь

$$a_k=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{k\pi x}{l}\,dx=$$

$$=\frac{1}{l}\frac{l}{k\pi}f(x)\sin\frac{k\pi x}{l}\Big|_{x=-l}^{x=+l}-\frac{1}{l}\frac{l}{k\pi}\int_{-l}^{l}f'(x)\sin\frac{k\pi x}{l}\,dx=-\frac{l}{\pi}\frac{b_k'}{k},$$

так как $\sin\frac{k\pi x}{l}$ обращается в нуль при $x=\pm l$;

$$b_k=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{k\pi x}{l}\,dx=$$

$$=-\frac{1}{l}\frac{l}{k\pi}f(x)\cos\frac{k\pi x}{l}\Big|_{x=-l}^{x=l}+\frac{1}{l}\frac{l}{k\pi}\int_{-l}^{l}f'(x)\cos\frac{k\pi x}{l}\,dx=\frac{l}{\pi}\frac{a_k'}{k},$$

поскольку

$$\cos\frac{k\pi x}{l}f(x)\Big|_{x=-l}^{x=l}=f(l)(-1)^k-f(-l)(-1)^k=$$

$$=(-1)^k[f(l)-f(-l)]=0,$$

так как по условию теоремы $f(l)=f(-l)$. Поэтому

$$|a_k|+|b_k|\leqslant\frac{l}{\pi}\left(\frac{|a_k'|}{k}+\frac{|b_k'|}{k}\right). \tag{11.100}$$

Но $f'(x)$ по условию теоремы кусочно-непрерывна на отрезке $[-l, l]$. Поэтому она интегрируема на этом отрезке и для нее выполняется неравенство Бесселя

$$\frac{a_0'^2}{2}+\sum_{k=1}^{+\infty}\left(a_k'^2+b_k'^2\right)\leqslant\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f'^2(x)\,dx,$$

а следовательно, числовой ряд

$$\frac{a_0'^2}{2}+\sum_{k=1}^{+\infty}\left(a_k'^2+b_k'^2\right) \tag{11.101}$$

сходится. Далее, из неравенств

$$0 \leqslant \left(|a_k'|-\frac{1}{k}\right)^2 = a_k'^2 - 2\frac{|a_k'|}{k}+\frac{1}{k^2},$$

$$0 \leqslant \left(|b_k'|-\frac{1}{k}\right)^2 = b_k'^2 - 2\frac{|b_k'|}{k}+\frac{1}{k^2}$$

вытекают неравенства

$$\frac{|a_k'|}{k} \leqslant \frac{1}{2}\left(a_k'^2+\frac{1}{k^2}\right), \quad \frac{|b_k'|}{k} \leqslant \frac{1}{2}\left(b_k'^2+\frac{1}{k^2}\right).$$

Следовательно,

$$\frac{|a_k'|}{k}+\frac{|b_k'|}{k} \leqslant \frac{1}{2}\left(a_k'^2+b_k'^2\right)+\frac{1}{k^2}. \tag{11.102}$$

Но тогда из сходимости рядов (11.101) и $\sum\limits_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^2}$ (легко устанавливаемой с помощью интегрального признака) вытекает сходимость ряда $\sum\limits_{k=1}^{+\infty}\left\{\frac{1}{2}\left(a_k'^2+b_k'^2\right)+\frac{1}{k^2}\right\}$, а следовательно, в силу признака сравнения и неравенств (11.102) и (11.100), сходится ряд

$$\frac{|a_0|}{2}+\sum_{k=1}^{+\infty}\left(|a_k|+|b_k|\right),$$

мажорирующий для тригонометрического ряда Фурье функции $f(x)$. Отсюда следует равномерная сходимость тригонометрического ряда Фурье функции $f(x)$ к его сумме $S(x)$ на всей оси x. Справедливость равенства $S(x)=f(x)$ на отрезке $[-l, l]$ вытекает из основной теоремы сходимости, условия которой здесь выполнены. Этим доказательство теоремы завершено.

Замечание. Равенство значений функции $f(x)$ на концах отрезка $[-l, l]$ является необходимым условием того, чтобы тригонометрический ряд Фурье (11.96) функции $f(x)$ сходился к ней на концах этого отрезка. Действительно, если для суммы этого ряда $S(x)$ выполнены равенства

$$S(-l)=f(-l), \quad S(l)=f(l) \tag{11.103}$$

то, в силу равенства

$$S(-l)=S(l), \tag{11.104}$$

являющегося следствием периодичности суммы ряда (11.96) с периодом $2l$ (все члены ряда периодичны с периодом $2l$), будет выполняться также равенство

$$f(-l)=f(l). \tag{11.105}$$

Поэтому равенство (11.105) и подавно является необходимым для того, чтобы ряд Фурье (11.96) функции $f(x)$ сходился к ней равномерно на всем замкнутом отрезке $[-l, l]$.

Если изменить в конечном числе точек значения непрерывной кусочно-гладкой функции $f(x)$, заданной на отрезке $[-l, l]$ и имеющей равные значения на его концах, то получится **разрывная** функция, имеющая на концах отрезка $[-l, l]$, вообще говоря, различные значения. Коэффициенты Фурье такой измененной функции останутся прежними (так как интегралы, выражающие коэффициенты Фурье, при этом не изменятся). Следовательно, в силу оценок доказательства теоремы 11.2 ряд $\sum\limits_{k=1}^{+\infty}(|a_k|+|b_k|)$ будет сходящимся; а значит, тригонометрический ряд Фурье этой кусочно-непрерывной и кусочно-гладкой функции будет сходиться равномерно на отрезке $[-l, l]$, но не к ней, а к исходной функции. Однако для равномерной сходимости на отрезке $[-l, l]$ тригонометрического ряда Фурье кусочно-непрерывной и кусочно-гладкой функции $f(x)$ необходимо, чтобы все ее разрывы были устранимыми и имело место равенство ее предельных значений на концах отрезка $f(-l+0)=$ $=f(l-0)$. Это легко доказывается с помощью теорем о непрерывности суммы ряда и о почленном предельном переходе в равномерно сходящемся ряде (§ 2 гл. 8).

Теорему 11.2 можно сформулировать несколько иначе. Заметим прежде всего, что если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[-l, l]$ и имеет равные значения на его концах, то при ее периодическом продолжении с периодом $2l$ получается функция, непрерывная на всей оси x.

Назовем, далее, функцию $f(x)$ кусочно-гладкой на всей оси x, если она является кусочно-гладкой на каждом конечном отрезке оси x. Теперь мы можем сформулировать теорему следующим образом:

Если периодическая функция $f(x)$ с периодом $2l$ является непрерывной и кусочно-гладкой на всей оси x, то ее тригонометрический ряд Фурье (11.96) *сходится к ней равномерно на всей оси.*

2. Связь между степенью гладкости функции и скоростью сходимости ее тригонометрического ряда Фурье. Исследование такой связи важно для выяснения возможности приближенной замены суммы тригонометрического ряда Фурье его частичной суммой, а также для выяснения возможности почленного дифференцирования такого ряда, что находит важные применения в математической физике.

Теорема 11.3. *Если $f(x)$, $f'(x)$, ..., $f^{(m)}(x)$, где $m \geqslant 0$, непрерывны на отрезке $[-l, l]$ и имеют равные значения на его концах, т. е.*

$$f(-l)=f(l),\quad f'(-l)=f'(l),\ \dots,\ f^{(m)}(-l)=f^{(m)}(l), \tag{11.106}$$

а $f^{(m+1)}(x)$ кусочно-непрерывна на отрезке $[-l, l]$, то для коэффициентов Фурье функции $f(x)$

$$a_k=\frac{1}{l}\int_{-l}^{+l} f(\xi)\cos\frac{k\pi\xi}{l}\,d\xi,\qquad b_k=\frac{1}{l}\int_{-l}^{+l} f(\xi)\sin\frac{k\pi\xi}{l}\,d\xi$$

выполняются соотношения

$$a_k=o\left(\frac{1}{k^{m+1}}\right),\qquad b_k=o\left(\frac{1}{k^{m+1}}\right) \tag{11.107}$$

и ряды

$$\sum_{k=1}^{+\infty} k^{\nu}(|a_k|+|b_k|),\qquad \nu=0,\ 1,\ 2,\ \dots,\ m, \tag{11.108}$$

сходятся *).

Доказательство. Интегрируя по частям, как при доказательстве теоремы 11.1, получим

$$a_k=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(\xi)\cos\frac{k\pi\xi}{l}\,d\xi=$$

$$=\frac{1}{l}\,\frac{l}{k\pi}\,f(\xi)\sin\frac{k\pi\xi}{l}\Bigg|_{\xi=-l}^{\xi=l}-\frac{1}{k\pi}\int_{-l}^{l} f'(\xi)\sin\frac{k\pi\xi}{l}\,d\xi=$$

$$=-\frac{1}{k\pi}\int_{-l}^{l} f'(\xi)\sin\frac{k\pi\xi}{l}\,d\xi=$$

$$=\frac{l}{k^2\pi^2}\,f'(\xi)\cos\frac{k\pi\xi}{l}\Bigg|_{\xi=-l}^{\xi=l}-\frac{l}{k^2\pi^2}\int_{-l}^{l} f''(\xi)\cos\frac{k\pi\xi}{l}\,d\xi=$$

---

*) Соотношения (11.107) означают, что

$$\lim_{k\to+\infty}\left(a_k:\frac{1}{k^{m+1}}\right)=0,\qquad \lim_{k\to+\infty}\left(b_k:\frac{1}{k^{m+1}}\right)=0.$$

$$= -\frac{l}{k^2\pi^2}\int_{-l}^{l} f''(\xi)\cos\frac{k\pi\xi}{l}\,d\xi = \ldots$$

$$\ldots = \pm\frac{l^{m+1}}{k^{m+1}\pi^{m+1}}\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f^{(m+1)}(\xi)\begin{Bmatrix}\cos\dfrac{k\pi\xi}{l}\\ \sin\dfrac{k\pi\xi}{l}\end{Bmatrix}d\xi. \qquad (11.109)$$

При этом мы пользуемся тем, что, в силу: 1) условия (11.10) теоремы, 2) четности косинуса и 3) обращения в нуль синуса на концах отрезка $[-l, l]$, выполняются равенства

$$f^{(s)}(\xi)\cos\frac{k\pi\xi}{l}\Big|_{\xi=-l}^{\xi=+l} = 0, \quad f^{(s)}(\xi)\sin\frac{k\pi\xi}{l}\Big|_{\xi=-l}^{\xi=+l} = 0 \quad \text{при} \quad 0 \leqslant s \leqslant m.$$

Фигурная скобка под знаком интеграла (11.109) означает, что в зависимости от того, сколько раз было выполнено интегрирование по частям, в качестве множителя при $f^{(m+1)}(\xi)$ может оказаться либо $\cos\frac{k\pi\xi}{l}$, либо $\sin\frac{k\pi\xi}{l}$.

Совершенно аналогично получаем, что

$$b_k = \pm\frac{l^{m+1}}{k^{m+1}\pi^{m+1}}\frac{1}{l}\int_{-l}^{+l} f^{(m+1)}(\xi)\begin{Bmatrix}\sin\dfrac{k\pi\xi}{l}\\ \cos\dfrac{k\pi\xi}{l}\end{Bmatrix}d\xi. \qquad (11.110)$$

Переходя в равенствах (11.109) и (11.110) к модулям и складывая результаты, будем иметь

$$|a_k| + |b_k| = \frac{l^{m+1}}{\pi^{m+1}}\left(\frac{|a_k^{(m+1)}|}{k^{m+1}} + \frac{|b_k^{(m+1)}|}{k^{m+1}}\right), \qquad (11.111)$$

где $a_k^{(m+1)}$ и $b_k^{(m+1)}$ — коэффициенты Фурье $f^{(m+1)}(x)$.

Так как $a_k^{(m+1)}$ и $b_k^{(m+1)}$ стремятся к нулю при $k \to +\infty$, то из (11.111) следует, что

$$a_k = o\left(\frac{1}{k^{m+1}}\right), \quad b_k = o\left(\frac{1}{k^{m+1}}\right). \qquad (11.112)$$

Из (11.111) получаем, что

$$k^m(|a_k| + |b_k|) \leqslant \frac{l^{m+1}}{\pi^{m+1}}\left(\frac{|a_k^{(m+1)}|}{k} + \frac{|b_k^{(m+1)}|}{k}\right) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{l^{m+1}}{2\pi^{m+1}}\left\{|a_k^{(m+1)}|^2 + |b_k^{(m+1)}|^2 + \frac{2}{k^2}\right\}, \qquad (11.113)$$

так как

$$\frac{|a_k^{(m+1)}|}{k} \leqslant \frac{1}{2}\left(|a_k^{(m+1)}|^2 + \frac{1}{k^2}\right), \quad \frac{|b_k^{(m+1)}|}{k} \leqslant \frac{1}{2}\left(|b_k^{(m+1)}|^2 + \frac{1}{k^2}\right).$$

Поэтому из (11.111), в силу неравенства Бесселя

$$\frac{|a_0^{(m+1)}|^2}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty}\left(|a_k^{(m+1)}|^2 + |b_k^{(m+1)}|^2\right) \leqslant \frac{1}{l}\int_{-l}^{+l} |f^{(m+1)}(x)|^2\,dx$$

и в силу сходимости ряда $\sum\limits_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^2}$, вытекает сходимость ряда $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} k^m(|a_k| + |b_k|)$, а из нее — сходимость всех рядов (11.108). Теорема доказана.

Замечание 1. Если речь идет о разложении в ряд по $\sin\frac{k\pi x}{l}$, $k = 1, 2, \ldots$, функции $f(x)$, заданной только на отрезке $[0, l]$, то условия теоремы 11.3 должны быть выполнены для функции $F(x)$, определяемой на всем отрезке $[-l, l]$ путем нечетного продолжения $f(x)$. В частности, для непрерывности функции $F(x)$ при $x = 0$ необходимо, чтобы выполнялось равенство $f(0) = 0$, так как в противном случае при нечетном продолжении получится разрыв в точке $x = 0$. Аналогично этому в точке $x = l$ должно быть $f(l) = 0$, ибо для продолженной нечетной функции должно выполняться равенство $F(-l) = F(l)$. Поскольку производная нечетной функции четна, то для производной функции $F(x)$ автоматически выполняется соотношение $F'(-l) = F'(l)$.

Вообще для того чтобы производные функции $F(x)$, непрерывные на отрезке $[-l, l]$, имели равные значения на его концах, нужно потребовать, чтобы выполнялись условия

$$f^{(\nu)}(0) = f^{(\nu)}(l) = 0 \quad \text{при} \quad \nu = 0, 2, 4, \ldots$$

Тогда для производных нечетного порядка от функции $F(x)$ соответствующие условия теоремы 11.3 будут выполнены автоматически.

В частности, для сходимости рядов

$$\sum_{k=1}^{+\infty} k^{\nu}|b_k|, \qquad \nu = 0, 1, 2,$$

где $b_k = \frac{2}{l}\int\limits_0^l f(\xi)\sin\frac{k\pi\xi}{l}\,d\xi$ — коэффициенты Фурье функции $f(x)$, заданной на отрезке $[0, l]$, достаточно потребовать, чтобы $f(x)$ удовлетворяла следующим условиям:

1) $f(x)$, $f'(x)$ и $f''(x)$ должны быть непрерывны, а $f'''(x)$ — кусочно-непрерывна на отрезке $[0, l]$;

2) $f(0) = f(l) = f''(0) = f''(l) = 0$.

Замечание 2. Если функцию $f(x)$, удовлетворяющую условиям теоремы 11.3, периодически продолжить за пределы отрезка $[-l, l]$ с периодом $2l$, то она станет непрерывной периодической функцией с периодом $2l$ на всей оси x, равно как и ее производные до m-го порядка включительно. Поэтому теорему 11.3 можно перефразировать следующим образом:

Если периодическая функция $f(x)$ с периодом $2l$ является непрерывной при $-\infty < x < \infty$ вместе со своими производными до m-го порядка включительно $(m \geqslant 0)$, а $(m+1)$-я производная $f^{(m+1)}(x)$ кусочно-непрерывна, то для коэффициентов Фурье a_k и b_k этой функции по основной тригонометрической системе выполняются соотношения:

1) $$a_k = o\left(\frac{1}{k^{m+1}}\right), \quad b_k = o\left(\frac{1}{k^{m+1}}\right) \quad \textit{при} \quad k \to +\infty,$$

2) *ряды* $$\sum_{k=1}^{+\infty} k^{\nu}(|a_k| + |b_k|) \quad \textit{при} \quad \nu = 0, 1, \ldots m$$

сходятся. Таким образом, эта теорема устанавливает связь между степенью гладкости периодической функции и скоростью сходимости ее тригонометрического ряда Фурье.

Замечание 3. Если выполнены условия теоремы 11.3 при $m > 0$, то тригонометрический ряд Фурье функции $f(x)$ можно дифференцировать почленно не менее m раз, т. е. заведомо будут выполняться равенства

$$f^{(s)}(x) = \sum_{k=1}^{+\infty}\left(a_k \cos\frac{k\pi x}{l} + b_k \sin\frac{k\pi x}{l}\right)^{(s)} \tag{11.114}$$

$$\text{при } 1 \leqslant s \leqslant m, \quad -l \leqslant x \leqslant l,$$

так как мажорирующие ряды

$$\frac{\pi^s}{l^s}\sum_{k=1}^{+\infty} k^s(|a_k| + |b_k|) \quad \text{при} \quad 1 \leqslant s \leqslant m$$

сходятся вместе с рядами (11.109).

Замечание 4. Доказательство теоремы 11.3 позволяет оценить скорость сходимости ряда Фурье, то есть дать оценку погрешности, допускаемой при замене суммы тригонометрического ряда Фурье его частичной суммой. При выполнении условий теоремы 11.3, используя соотношение (11.111), неравенство Коши — Буняковского для сумм, неравенство Бесселя для коэффициентов Фурье функции $f^{(m+1)}(x)$

и очевидную оценку ряда

$$\sum_{k=k_0+1}^{+\infty} \frac{1}{k^{2m+2}} \leqslant \int_{k_0}^{+\infty} \frac{dx}{x^{2m+2}},$$

получим

$$\left|\sum_{k=k_0+1}^{+\infty} \left(a_k \cos\frac{k\pi x}{l} + b_k \sin\frac{k\pi x}{l}\right)\right| \leqslant \sum_{k=k_0+1}^{+\infty} (|a_k| + |b_k|) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{l^{m+1}}{\pi^{m+1}} \sqrt{\sum_{k=k_0+1}^{+\infty} \frac{1}{k^{2m+2}}} \sqrt{2 \sum_{k=k_0+1}^{+\infty} \left(|a_k^{(m+1)}|^2 + |b_k^{(m+1)}|^2\right)} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{l^{m+1}}{\pi^{m+1}} \left(\int_{k_0}^{+\infty} \frac{dx}{x^{2m+2}}\right)^{1/2} \left(\frac{2}{l} \int_{-l}^{+l} |f^{(m+1)}(x)|^2 \, dx\right)^{1/2} =$$

$$= \frac{2l^{m+\frac{1}{2}}}{\pi^{m+1}(2m+1)^{1/2}} \left(\int_{-l}^{+l} |f^{(m+1)}(x)|^2 \, dx\right)^{1/2} \frac{1}{k_0^{m+\frac{1}{2}}} = O\left(\frac{1}{k_0^{m+\frac{1}{2}}}\right).$$

3. Понятие улучшения сходимости тригонометрического ряда Фурье. Тригонометрический ряд Фурье, получающийся в результате решения какой-либо конкретной задачи, может оказаться столь медленно сходящимся, что его практическое использование затруднено, поскольку замкнутое выражение его суммы неизвестно.

В связи с этим возникает вопрос, нельзя ли из медленно сходящегося тригонометрического ряда Фурье

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} \left(a_k \cos\frac{k\pi x}{l} + b_k \sin\frac{k\pi x}{l}\right), \quad -l \leqslant x \leqslant l, \tag{А}$$

выделить такой медленно сходящийся тригонометрический ряд Фурье, сумма которого $\varphi(x)$ известна в замкнутой форме, чтобы оставшийся ряд, связанный с $f(x)$ и $\varphi(x)$ соотношением

$$f(x) = \varphi(x) + \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\alpha_k \cos\frac{k\pi x}{l} + \beta_k \sin\frac{k\pi x}{l}\right) \tag{Б}$$

сходился уже достаточно быстро, т. е. чтобы его коэффициенты α_k и β_k достаточно быстро стремились к нулю при $k \to +\infty$.

Такой переход от представления (А) для функции $f(x)$ к представлению (Б) называется *улучшением сходимости ряда* (А).

Если известны особенности функции $f(x)$ (предельные значения $f(x)$ и ее производных при $x \to \pm l$ и в точках разрыва), то улучшение сходимости достигается вычитанием из $f(x)$ достаточно простой функции $\varphi(x)$ с такими же особенностями, как и у $f(x)$.

Пусть, например, известно, что $f(x)$ непрерывно дифференцируема на отрезке $[-l, l]$ и что $\lim\limits_{x\to\pm l} f(x)=\pm l$. Так как значения $f(x)$ на концах отрезка $[-l, l]$ не равны, то ряд (А) сходится неравномерно на этом отрезке. Положим $\varphi(x)=x$; эта функция так же непрерывно дифференцируема на $[-l, l]$ и имеет такие же предельные значения на его концах, как и $f(x)$. Поэтому функция $f(x)-x$ непрерывно дифференцируема и имеет равные предельные значения на концах отрезка $[-l, l]$, а следовательно, ряд в представлении (Б) для функции $f(x)$ при $\varphi(x)=x$ будет сходиться уже равномерно на отрезке $[-l, l]$.

Ознакомимся теперь с другим подходом к улучшению сходимости ряда (А), когда никакой дополнительной информации о его сумме не имеется. А. Н. Крылов предложил в этом случае выделять из коэффициентов a_n и b_n ряда (А) младшие степени величины $\frac{1}{n}$ и пытаться суммировать ряд с коэффициентами, содержащими эти младшие степени величины $\frac{1}{n}$. При этом нужно пользоваться таблицей разложений различных функций в тригонометрические ряды Фурье с достаточно медленно сходящимися разложениями.

Пусть, например, требуется улучшить сходимость ряда

$$f(x)=\sum_{n=2}^{+\infty}(-1)^n\frac{n^3}{n^4-1}\sin nx,\quad -\pi<x<\pi. \tag{11.115}$$

Так как

$$\frac{n^3}{n^4-1}=\frac{1}{n}+\frac{1}{n^5-n},$$

то

$$f(x)=\sum_{n=2}^{+\infty}(-1)^n\frac{\sin nx}{n}+\sum_{n=2}^{+\infty}(-1)^n\frac{\sin nx}{n^5-n},\quad -\pi<x<\pi.$$

Но ранее было установлено (см. пример 1 п. 5 § 2, в котором для нашего случая нужно положить $l=\pi$), что

$$x=2\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sin nx}{n},\quad -\pi<x<\pi.$$

Поэтому

$$\sum_{n=2}^{+\infty}(-1)^n\frac{\sin nx}{n}=-\frac{x}{2}+\sin x,\quad -\pi<x<\pi.$$

Следовательно,

$$f(x) = -\frac{x}{2} + \sin x + \sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^n \frac{\sin nx}{n^5 - n}, \quad -\pi < x < \pi. \tag{11.116}$$

Ряд (11.116) сходится уже значительно быстрее, чем ряд (11.115).

§ 5. Равномерная аппроксимация непрерывной функции тригонометрическими и алгебраическими многочленами; теоремы Вейерштрасса

Пусть $\varepsilon > 0$ — какое-нибудь фиксированное число. Если неравенство

$$|\varphi(x) - \psi(x)| < \varepsilon$$

выполняется сразу для всех $x \in [a, b]$, то говорят, что $\psi(x)$ *равномерно* ε-*аппроксимирует функцию* $\varphi(x)$ *на отрезке* $[a, b]$.

Теорема 11.4. (**первая теорема Вейерштрасса**). *Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $-l \leqslant x \leqslant l$ и имеет равные значения на его концах, то при любом $\varepsilon > 0$ найдется тригонометрический многочлен*

$$T_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} \left(a_k \cos \frac{k\pi x}{l} + b_k \sin \frac{k\pi x}{l} \right), \tag{11.117}$$

равномерно ε-аппроксимирующий функцию $f(x)$ на отрезке $[-l, l]$.

Для доказательства этой теоремы нам потребуется

Лемма. *Какова бы ни была непрерывная на отрезке $a \leqslant x \leqslant b$ функция $f(x)$, при всяком $\varepsilon > 0$ существует такая непрерывная и кусочно-гладкая на этом отрезке функция $g_\varepsilon |x|$, что*

$$|f(x) - g_\varepsilon(x)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \textit{при всех} \quad x \in [a, b], \tag{11.118}$$

причем

$$g_\varepsilon(a) = f(a), \quad g_\varepsilon(b) = f(b). \tag{11.119}$$

Доказательство леммы. Так как $f(x)$ непрерывна на замкнутом отрезке $[a, b]$, то она равномерно непрерывна на нем, т. е. при любом $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta = \delta(\varepsilon)$, что для любых x' и x'' из отрезка $[a, b]$, удовлетворяющих неравенству $|x' - x''| < \delta(\varepsilon)$, будет выполняться неравенство

$$|f(x') - f(x'')| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{11.120}$$