Следовательно,

$$f(x)=-\frac{x}{2}+\sin x+\sum_{n=2}^{+\infty}(-1)^n\frac{\sin nx}{n^5-n}, \quad -\pi<x<\pi. \qquad (11.116)$$

Ряд (11.116) сходится уже значительно быстрее, чем ряд (11.115).

§ 5. Равномерная аппроксимация непрерывной функции тригонометрическими и алгебраическими многочленами; теоремы Вейерштрасса

Пусть $\varepsilon>0$ — какое-нибудь фиксированное число. Если неравенство

$$|\varphi(x)-\psi(x)|<\varepsilon$$

выполняется сразу для всех $x\in[a, b]$, то говорят, что $\psi(x)$ *равномерно ε-аппроксимирует функцию $\varphi(x)$ на отрезке $[a, b]$.*

***Теорема 11.4.* (*первая теорема Вейерштрасса*).** *Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $-l\leqslant x\leqslant l$ и имеет равные значения на его концах, то при любом $\varepsilon>0$ найдется тригонометрический многочлен*

$$T_n(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}\left(a_k\cos\frac{k\pi x}{l}+b_k\sin\frac{k\pi x}{l}\right), \qquad (11.117)$$

равномерно ε-аппроксимирующий функцию $f(x)$ на отрезке $[-l, l]$.

Для доказательства этой теоремы нам потребуется

Лемма. *Какова бы ни была непрерывная на отрезке $a\leqslant x\leqslant b$ функция $f(x)$, при всяком $\varepsilon>0$ существует такая непрерывная и кусочно-гладкая на этом отрезке функция $g_\varepsilon|x|$, что*

$$|f(x)-g_\varepsilon(x)|<\frac{\varepsilon}{2} \quad \textit{при всех} \quad x\in[a, b], \qquad (11.118)$$

причем

$$g_\varepsilon(a)=f(a), \quad g_\varepsilon(b)=f(b). \qquad (11.119)$$

Доказательство леммы. Так как $f(x)$ непрерывна на замкнутом отрезке $[a, b]$, то она равномерно непрерывна на нем, т. е. при любом $\varepsilon>0$ найдется такое $\delta=\delta(\varepsilon)$, что для любых x' и x'' из отрезка $[a, b]$, удовлетворяющих неравенству $|x'-x''|<\delta(\varepsilon)$, будет выполняться неравенство

$$|f(x')-f(x'')|<\frac{\varepsilon}{2}. \qquad (11.120)$$

Поэтому, если разбить отрезок $[a, b]$ точками деления $x_0 = a < x_1 < \ldots < x_i < x_{i+1} < \ldots < x_{n+1} = b$ на частичные отрезки $[x_i, x_{i+1}]$ длины меньше δ, то для любых двух точек x' и x'', принадлежащих одному и тому же частичному отрезку $[x_i, x_{i+1}]$, будет выполняться неравенство (11.120).

Определим на $[a, b]$ непрерывную кусочно-гладкую функцию $y = g_\varepsilon(x)$, положив $g_\varepsilon(x_i) = f(x_i)$ при $i = 0, 1, \ldots, m+1$ и считая $g_\varepsilon(x)$ линейной на каждом отрезке $[x_i, x_{i+1}]$, $i = 0, 1, \ldots, m$. График функции $y = g_\varepsilon(x)$ представляет собой ломаную, вписанную в график функции $y = f(x)$. В силу определения $g_\varepsilon(x)$, имеем

$$g_\varepsilon(a) = f(a), \quad g_\varepsilon(b) = f(b).$$

Докажем, что

$$|f(x') - g_\varepsilon(x')| < \frac{\varepsilon}{2}$$

при любом $x' \in [a, b]$. Пусть, например, $x' \in [x_i, x_{i+1}]$. В силу линейности $g_\varepsilon(x)$ на отрезке $[x_i, x_{i+1}]$, значение $g_\varepsilon(x')$ заключено между значениями $g_\varepsilon(x_i) = f(x_i)$ и $g_\varepsilon(x_{i+1}) = f(x_{i+1})$. Так как непрерывная функция $f(x)$ принимает на отрезке $[x_i, x_{i+1}]$ все значения, промежуточные между значениями $f(x_i)$ и $f(x_{i+1})$, то найдется такое $x'' \in [x_i, x_{i+1}]$, что $f(x'') = g_\varepsilon(x')$. Следовательно,

$$|f(x') - f(x'')| = |f(x') - g_\varepsilon(x')| < \frac{\varepsilon}{2},$$

так как x' и $x'' \in [x_i, x_{i+1}]$, что и требовалось доказать.

Доказательство теоремы 11.4. По условию $f(x)$ непрерывна на отрезке $[-l, l]$ и имеет равные значения на его концах: $f(-l) = f(l)$. Пусть дано $\varepsilon > 0$. Согласно лемме существует такая непрерывная и кусочно-гладкая на $[-l, l]$ функция $g_\varepsilon(x)$, что

$$|f(x) - g_\varepsilon(x)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{при всех} \quad x \in [-l, l] \tag{11.121}$$

и

$$g_\varepsilon(-l) = f(-l), \quad g_\varepsilon(l) = f(l),$$

а следовательно,

$$g_\varepsilon(-l) = g_\varepsilon(l), \tag{11.122}$$

так как $f(-l) = f(l)$.

По теореме 11.2 тригонометрический ряд Фурье функции $g_\varepsilon(x)$ сходится равномерно к $g_\varepsilon(x)$ на отрезке $[-l, l]$. Следовательно, при достаточно большом n для его частичной суммы $T_n(x) =$

$=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}\left(a_k\cos\frac{k\pi x}{l}+b_k\sin\frac{k\pi x}{l}\right)$ будет выполняться неравенство

$$|g_\varepsilon(x)-T_n(x)|<\frac{\varepsilon}{2}\quad \text{при всех}\quad x\in[-l, l]. \tag{11.123}$$

Сопоставляя (11.121) и (11.123), получим

$$|f(x)-T_n(x)|\leqslant|f(x)-g_\varepsilon(x)|+\\ +|g_\varepsilon(x)-T_n(x)|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon \tag{11.124}$$

при всех $x\in[-l, l]$. Теорема доказана.

Замечание. Взяв последовательность $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_k, \ldots$, стремящуюся к нулю, мы получим последовательность тригонометрических многочленов $T_{n_1}(x), T_{n_2}(x), \ldots$, равномерно сходящуюся на отрезке $[-l, l]$ к функции $f(x)$. Однако эти тригонометрические многочлены не являются, вообще говоря, частичными суммами одного и того же тригонометрического ряда. Действительно, многочлен $T_n(x)$, отвечающий данному $\varepsilon>0$, т. е. входящий в неравенство (11.124), является многочленом Фурье для вспомогательной непрерывной и кусочно-гладкой функции $g_\varepsilon(x)$, которая с изменением ε меняется, что приводит к изменению коэффициентов многочлена $T_n(x)$. Однако тот факт, что непрерывная функция $f(x)$ не является, вообще говоря, пределом равномерно сходящейся последовательности частичных сумм одного и того же тригонометрического ряда, не есть следствие лишь способа построения многочленов $T_n(x)$.

Если бы $f(x)$ была пределом равномерно сходящейся последовательности частичных сумм некоторого тригонометрического ряда $\frac{\alpha_0}{2}+\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\alpha_k\cos\frac{k\pi x}{l}+\beta_k\sin\frac{k\pi x}{l}\right)$ на отрезке $[-l, l]$, то он (этот ряд) неизбежно являлся бы тригонометрическим рядом Фурье для $f(x)$. Однако можно привести примеры непрерывных функций $f(x)$ на отрезке $[-l, l]$, тригонометрические ряды Фурье которых расходятся в конечном или даже в бесконечном числе точек этого отрезка. Построение таких примеров довольно сложно *).

Теорема 11.5 (вторая теорема Вейерштрасса). *Если $f(x)$ непрерывна на отрезке $a\leqslant x\leqslant b$, то для всякого $\varepsilon>0$ найдется алгебраический многочлен*

$$P_m(x)=A_0+A_1x+A_2x^2+\ldots+A_mx^m,$$

равномерно ε-аппроксимирующий $f(x)$ на отрезке $a\leqslant x\leqslant b$,

*) См., например, Н. К. Бари, Тригонометрические ряды.

т. е. такой, что всюду на этом отрезке выполняется неравенство

$$|f(x)-P_m(x)|<\varepsilon. \tag{11.125}$$

Доказательство. Возьмем $l>0$ столь большим, чтобы отрезок $[a, b]$ лежал строго внутри отрезка $[-l, l]$. Определим на $[-l, l]$ непрерывную функцию $F(x)$, положив $F(x)=f(x)$ на $[a, b]$, $F(-l)=F(l)=0$ и считая $F(x)$ линейной на отрезках $-l\leqslant x\leqslant a$, $b\leqslant x\leqslant l$. По первой теореме Вейерштрасса при любом $\varepsilon>0$ найдется такой тригонометрический многочлен

$$T_n(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}\left(a_k\cos\frac{k\pi x}{l}+b_k\sin\frac{k\pi x}{l}\right), \tag{11.126}$$

что всюду на $[-l, l]$ будет выполняться неравенство

$$|F(x)-T_n(x)|<\frac{\varepsilon}{2}. \tag{11.127}$$

Разложим в ряд Тейлора синусы и косинусы, входящие в (11.127):

$$\cos\frac{k\pi x}{l}=1-\frac{k^2\pi^2}{2!\,l^2}x^2+\frac{k^4\pi^4}{4!\,l^4}x^4-\ldots, \tag{11.128}$$

$$\sin\frac{k\pi x}{l}=\frac{k\pi}{l}x-\frac{k^3\pi^3}{3!\,l^3}x^3+\frac{k^5\pi^5}{5!\,l^5}x^5-\ldots \tag{11.129}$$

Степенные ряды (11.128) и (11.129) сходятся (например, по признаку Даламбера) при всех x, $-\infty<x<+\infty$. Подставляя (11.128) и (11.129) в (11.126), получим степенной ряд

$$T_n(x)=A_0+A_1x+A_2x^2+\ldots+A_mx^m+\ldots, \tag{11.130}$$

сходящийся при всех x, $-\infty<x<+\infty$, и, следовательно, равномерно сходящийся на любом конечном отрезке оси x, в частности на отрезке $[-l, l]$. Поэтому, беря m достаточно большим, получим такую частичную сумму ряда (11.131)

$$P_m(x)=A_0+A_1x+\ldots+A_mx^m,$$

что

$$|T_n(x)-P_m(x)|<\frac{\varepsilon}{2}\quad \text{при всех}\quad x\in[-l, l]. \tag{11.131}$$

Сопоставляя неравенства (11.131) и (11.127), получим

$$|F(x)-P_m(x)|\leqslant|F(x)-T_n(x)|+\\ +|T_n(x)-P_m(x)|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon \tag{11.132}$$

при всех $x\in[-l, l]$, в частности при всех $x\in[a, b]$. Но при всех $x\in[a, b]$ $F(x)=f(x)$ и неравенство (11.132) превращается в неравенство

$$|f(x) - P_m(x)| < \varepsilon, \tag{11.133}$$

что и требовалось доказать.

Замечание. Взяв последовательность $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_k, \ldots$, сходящуюся к нулю, получим последовательность алгебраических многочленов $P_{m_1}(x)$, $P_{m_2}(x)$, ..., равномерно сходящуюся к $f(x)$ на $[a, b]$. Эти многочлены не представляют собой, вообще говоря, частичных сумм одного и того же степенного ряда по причинам, аналогичным описанным в замечании после доказательства первой теоремы Вейерштрасса (теоремы 11.4).

Теоремы Вейерштрасса не дают эффективного способа построения многочленов, равномерно аппроксимирующих непрерывную функцию с заданной точностью $\varepsilon > 0$.

П. Л. Чебышев поставил и исследовал проблему построения многочленов наилучшего приближения, играющую важную роль при эффективной равномерной аппроксимации непрерывных функций многочленами.

Обозначим через H_n множество всех алгебраических многочленов степени $\leqslant n$. Пусть $P_n(x) \in H_n$, а функция $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$. Число

$$E(f, P_n) = \max_{a \leqslant x \leqslant b} |f(x) - P_n(x)|$$

назовем отклонением $P_n(x)$ от $f(x)$ на $[a, b]$. Нижнюю грань значений $E(f, P_n)$, когда $P_n(x)$ пробегает все множество H_n, обозначим через $E_n(f)$ и будем называть наименьшим отклонением. Чебышев доказал существование и единственность многочлена наилучшего равномерного приближения, т. е. такого $P_n(x) \in H_n$, что

$$E(f, P_n) = E_n(f),$$

и исследовал методы построения таких многочленов. При этом им были получены так называемые многочлены Чебышева, наименее уклоняющиеся от нуля (см. по этому поводу [4], том II, гл. 4). При построении многочлена, равномерно аппроксимирующего непрерывную функцию $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ с заданной точностью ε, для практических применений важно, чтобы он имел наименьшую возможную степень. Таким многочленом, очевидно, является многочлен наилучшего равномерного приближения к функции $f(x)$ на $[a, b]$ из совокупности H_n при n, для которого выполняется неравенство

$$E_n(f) \leqslant \varepsilon < E_{n-1}(f).$$

§ 6. О полноте и замкнутости ортогональных систем

Всюду в этом параграфе под классом функций $Q[a, b]$ мы будем понимать множество всех кусочно-непрерывных на $[a, b]$ функций. Понятия полноты и замкнутости будут определены для функций из $Q[a, b]$; основные теоремы о полноте и замкнутости будут также