неравенство

$$|f(x) - P_m(x)| < \varepsilon, \tag{11.133}$$

что и требовалось доказать.

Замечание. Взяв последовательность $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_k, \ldots$, сходящуюся к нулю, получим последовательность алгебраических многочленов $P_{m_1}(x), P_{m_2}(x), \ldots$, равномерно сходящуюся к $f(x)$ на $[a, b]$. Эти многочлены не представляют собой, вообще говоря, частичных сумм одного и того же степенного ряда по причинам, аналогичным описанным в замечании после доказательства первой теоремы Вейерштрасса (теоремы 11.4).

Теоремы Вейерштрасса не дают эффективного способа построения многочленов, равномерно аппроксимирующих непрерывную функцию с заданной точностью $\varepsilon > 0$.

П. Л. Чебышев поставил и исследовал проблему построения многочленов наилучшего приближения, играющую важную роль при эффективной равномерной аппроксимации непрерывных функций многочленами.

Обозначим через H_n множество всех алгебраических многочленов степени $\leqslant n$. Пусть $P_n(x) \in H_n$, а функция $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$. Число

$$E(f, P_n) = \max_{a \leqslant x \leqslant b} |f(x) - P_n(x)|$$

назовем отклонением $P_n(x)$ от $f(x)$ на $[a, b]$. Нижнюю грань значений $E(f, P_n)$, когда $P_n(x)$ пробегает все множество H_n, обозначим через $E_n(f)$ и будем называть наименьшим отклонением. Чебышев доказал существование и единственность многочлена наилучшего равномерного приближения, т. е. такого $P_n(x) \in H_n$, что

$$E(f, P_n) = E_n(f),$$

и исследовал методы построения таких многочленов. При этом им были получены так называемые многочлены Чебышева, наименее уклоняющиеся от нуля (см. по этому поводу [4], том II, гл. 4). При построении многочлена, равномерно аппроксимирующего непрерывную функцию $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ с заданной точностью ε, для практических применений важно, чтобы он имел наименьшую возможную степень. Таким многочленом, очевидно, является многочлен наилучшего равномерного приближения к функции $f(x)$ на $[a, b]$ из совокупности H_n при n, для которого выполняется неравенство

$$E_n(f) \leqslant \varepsilon < E_{n-1}(f).$$

§ 6. О полноте и замкнутости ортогональных систем

Всюду в этом параграфе под классом функций $Q[a, b]$ мы будем понимать множество всех кусочно-непрерывных на $[a, b]$ функций. Понятия полноты и замкнутости будут определены для функций из $Q[a, b]$; основные теоремы о полноте и замкнутости будут также доказаны для функций этого класса (теоремы 11.6—11.10 настоящего параграфа).

Следует заметить, однако, что все это может быть сделано и для значительно более широкого класса функций — для функций, интегрируемых с квадратом на $[a, b]$, или даже для функций, интегрируемых с квадратом с некоторым весом $p(x)$ на $[a, b]$ (см. Дополнение 2 к гл. 11).

1. Понятие полноты ортогональной системы. Ортогональная на $[a, b]$ система функций

$$\varphi_1(x),\ \varphi_2(x),\ \ldots,\ \varphi_n(x),\ \ldots \tag{11.134}$$

называется *полной* в $Q[a, b]$, если для каждой функции $f(x)$ из $Q[a, b]$ ее ряд Фурье по ортогональной системе (11.134)

$$\sum_{k=1}^{+\infty} c_k\varphi_k(x), \tag{11.135}$$

где

$$c_k = \frac{1}{\|\varphi_k\|^2}\int_a^b f(x)\varphi_k(x)\,dx, \quad \|\varphi_k\| = \left(\int_a^b \varphi_k^2(x)\,dx\right)^{1/2}, \tag{11.136}$$

сходится к $f(x)$ в среднем на $[a, b]$, т. е.

$$\rho^2\left(f, \sum_{k=1}^{n} c_k\varphi_k\right) = \int_a^b \left[f(x) - \sum_{k=1}^{n} c_k\varphi_k(x)\right]^2 dx \to 0 \quad \text{при } n\to+\infty. \tag{11.137}$$

В этом случае говорят, что система (11.134) образует базис пространства $Q[a, b]$, так как для каждого «элемента» $f(x)\in Q[a, b]$ в случае полноты системы (11.134) имеет место обобщенное равенство

$$f(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} c_k\varphi_k(x), \quad \text{где} \quad c_k = \frac{1}{\|\varphi_k\|^2}\int_a^b f(x)\varphi_k(x)\,dx, \tag{11.138}$$

которое следует понимать в смысле сходимости в среднем на отрезке $[a, b]$, т. е. в смысле выполнения соотношения (11.137).

2. Критерий полноты — равенство Парсеваля. Воспользуемся тождеством Бесселя

$$\rho^2\left(f, \sum_{k=1}^{n} c_k\varphi_k\right) = \int_a^b \left[f(x) - \sum_{k=1}^{n} c_k\varphi_k(x)\right]^2 dx =$$

$$= \int_a^b f^2(x)\,dx - \sum_{k=1}^{n} c_k^2\|\varphi_k\|^2 \tag{11.139}$$

(см. п. 3 § 3). Переходя в нем к пределу при $n \to +\infty$, получим

$$\lim_{n\to+\infty} \rho^2\left(f, \sum_{k=1}^{n} c_k\varphi_k\right) = \int_a^b f^2(x)\,dx - \sum_{k=1}^{+\infty} c_k^2 \|\varphi_k\|^2, \qquad (11.140)$$

откуда следует, что равенство

$$\lim_{n\to+\infty} \rho^2\left(f, \sum_{k=1}^{n} c_k\varphi_k\right) = 0 \qquad (11.141)$$

равносильно равенству

$$\int_a^b f^2(x)\,dx = \sum_{k=1}^{+\infty} c_k^2 \|\varphi_k\|^2. \qquad (11.142)$$

Равенство (11.142) называется *равенством Парсеваля*. Таким образом, для того чтобы ортогональная система (11.134) была полна в $Q[a, b]$, необходимо и достаточно, чтобы для любой функции $f(x) \in Q[a, b]$ выполнялось равенство Парсеваля (11.142).

3. Свойства полных систем. *Ортогональная на* $[a, b]$ *система*

$$\varphi_1(x),\ \varphi_2(x),\ \ldots,\ \varphi_n(x),\ \ldots \qquad (11.143)$$

называется *замкнутой* *в* $Q[a, b]$, *если любая функция* $f(x) \in Q[a, b]$, *ортогональная на* $[a, b]$ *всем функциям системы* (11.143), *является нулем пространства* $Q[a, b]$, *т. е. равна нулю всюду в точках непрерывности* $f(x)$, *и, следовательно, может быть отлична от нуля лишь в конечном числе точек на* $[a, b]$.

Теорема 11.6. *Если ортогональная на* $[a, b]$ *система* (11.143) *полна в* $Q[a, b]$, *то она и замкнута в* $Q[a, b]$.

Доказательство. Пусть кусочно-непрерывная функция $f(x)$ ортогональна всем функциям системы (11.143) на $[a, b]$, т. е.

$$\int_a^b f(x)\,\varphi_k(x)\,dx = 0 \quad \text{при} \quad k = 1,\ 2,\ \ldots$$

Тогда коэффициенты Фурье функции $f(x)$ по системе (11.143) равны нулю:

$$c_k = \frac{1}{\|\varphi_k\|^2} \int_a^b f(x)\,\varphi_k(x)\,dx = 0, \quad k = 1,\ 2,\ \ldots \qquad (11.144)$$

В силу полноты системы (11.143) в $Q[a, b]$, для любой функции $f(x) \in Q[a, b]$ будет выполняться равенство Парсеваля

$$\int_a^b f^2(x)\,dx = \sum_{k=1}^{+\infty} c_k^2 \|\varphi_k\|^2, \qquad (11.145)$$

но, в силу (11.144), из (11.145) следует, что

$$\int_a^b f^2(x)\,dx = 0. \tag{11.146}$$

Пусть $f(x_0) \neq 0$, где $x_0 \in [a, b]$ является точкой непрерывности $f(x)$. Заключим x_0 в отрезок $[a', b']$, на котором $f(x)$ непрерывна и который содержится в $[a, b]$. Так как $f^2(x)$ непрерывна и неотрицательна на $[a', b']$, причем $f^2(x_0) > 0$, то $\int_{a'}^{b'} f^2(x)\,dx > 0$. Но тогда и подавно $\int_a^b f^2(x)\,dx > 0$, что противоречит равенству (11.146). Следовательно, $f(x) \equiv 0$ в точках непрерывности на $[a, b]$. Теорема доказана.

Теорема 11.7. *Если две функции $f(x)$ и $g(x)$ из $Q[a, b]$ имеют один и тот же ряд Фурье по полной ортогональной системе на $[a, b]$, то они как элементы пространства $Q[a, b]$ совпадают, т. е. могут отличаться лишь в конечном числе точек на $[a, b]$.*

Доказательство. Функция $\psi(x) = (f(x) - g(x)) \in Q[a, b]$ ортогональна всем функциям системы (11.143) на $[a, b]$. Действительно,

$$\int_a^b \psi(x)\,\varphi_k(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,\varphi_k(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,\varphi_k(x)\,dx =$$

$$= c_k^f \|\varphi_k\|^2 - c_k^g \|\varphi_k\|^2 = \left(c_k^f - c_k^g\right)\|\varphi_k\|^2, \quad k = 1, 2, 3, \ldots, \tag{11.147}$$

где c_k^f — коэффициент Фурье функции $f(x)$, а c_k^g — коэффициент Фурье функции $g(x)$. Так как по условию ряды Фурье этих функций совпадают, т. е. $c_k^f = c_k^g$ при $k = 1, 2, \ldots$, то из (11.147) следует, что

$$\int_a^b \psi(x)\,\varphi_k(x)\,dx = 0 \quad \text{при} \quad k = 1, 2, 3, \ldots \tag{11.148}$$

Но тогда по предыдущей теореме разность $\psi(x) = f(x) - g(x)$ тождественно равна нулю на $[a, b]$ в точках непрерывности $\psi(x)$, а следовательно, может быть отличной от нуля лишь в конечном числе точек на $[a, b]$, что и требовалось доказать.

Теорема 11.8. *Если ортогональная на $[a, b]$ система (11.143) является полной в $Q[a, b]$, то для любых двух функций $f(x)$ и $g(x)$ из $Q[a, b]$ имеет место обобщенное равенство*

Парсеваля

$$\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx = \sum_{k=1}^{+\infty} c_k^f c_k^g\, \|\varphi_k\|^2, \qquad (11.149)$$

где c_k^f *и* c_k^g — *коэффициенты Фурье функций* $f(x)$ *и* $g(x)$ *по ортогональной системе* (11.143).

Доказательство. Равенство (11.149) получается, если написать равенство Парсеваля для функций $f(x)+g(x)$ и $f(x)-g(x)$, а затем вычесть их и разделить результат пополам.

Теорема 11.9. *Если* $f(x) \in Q[a, b]$, *а ортогональная на* $[a, b]$ *система* $\{\varphi_i(x)\}$ *полна в* $Q[a, b]$, *то ряд Фурье функции* $f(x)$ *по системе* $\{\varphi_i(x)\}$ *можно интегрировать почленно т. е.*

$$\int_{x_0}^{x} f(\xi)\,d\xi = \sum_{k=1}^{+\infty} c_k \int_{x_0}^{x} \varphi_k(\xi)\,d\xi \qquad (11.150)$$

при любых x_0 *и* x *из отрезка* $[a, b]$, *причем ряд* (11.150) *сходится равномерно по* x *на* $[a, b]$.

Доказательство. Справедливость этой теоремы вытекает из сходимости в среднем ряда Фурье $\sum_{k=1}^{+\infty} c_k\varphi_k(x)$ к $f(x)$ на $[a, b]$ и теоремы о почленном интегрировании рядов, сходящихся в среднем (см. п. 3 § 6 гл. 8).

4. Полнота основной тригонометрической системы.

Теорема 11.10. *Основная тригонометрическая система*

$$\frac{1}{2},\ \cos\frac{\pi x}{l},\ \sin\frac{\pi x}{l},\ \ldots,\ \cos\frac{k\pi x}{l},\ \sin\frac{k\pi x}{l},\ \ldots \qquad (11.151)$$

полна в $Q[-l, l]$.

Доказательство. Требуется доказать, что для любой кусочно-непрерывной функции $f(x)$ на $[-l, l]$ будет

$$\rho^2(f, T_n^f) = \int_{-l}^{l} \left[f(x) - T_n^f(x)\right]^2 dx \to 0 \quad \text{при} \quad n \to +\infty, \qquad (11.152)$$

где

$$T_n^f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} \left(a_k \cos\frac{k\pi x}{l} + b_k \sin\frac{k\pi x}{l}\right)$$

— многочлен Фурье функции $f(x)$ по системе (11.151).

Пусть $|f(x)| < M$ на $[-l, l]$ и пусть $\varepsilon > 0$. Не нарушая общности рассуждений, можно предположить, что $f(x)$ имеет единственную точку разрыва x_0, лежащую внутри $[-l, l]$. Построим такую непрерывную на отрезке $[-l, l]$ функцию $g(x)$, чтобы она имела равные значения на его концах: $g(-l)=g(l)$, и чтобы выполнялось неравенство

$$\rho^2(f, g)=\int_{-l}^{l}[f(x)-g(x)]^2\,dx<\frac{\varepsilon}{4}. \tag{11.153}$$

Для этого, взяв $\delta>0$ достаточно малым, положим $g(x)=f(x)$ при $-l\leqslant x\leqslant x_0-\delta$ и при $x_0+\delta\leqslant x\leqslant l-\delta$, а на отрезках $x_0-\delta\leqslant x\leqslant x_0+\delta$, $l-\delta\leqslant x\leqslant l$ будем считать $g(x)$ линейной (см. рис. 11.10, на котором график $f(x)$ изображен сплошной линией, а график функции $g(x)$ — пунктиром с длинными штрихами).

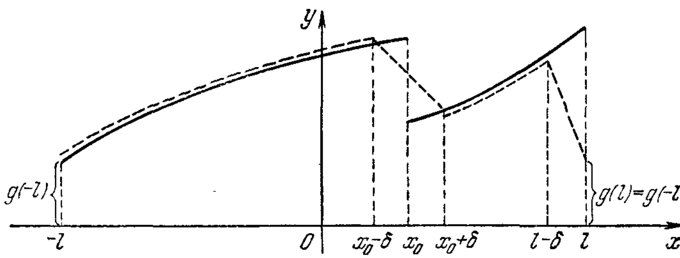

Рис. 11.10.

В силу определения $g(x)$, имеем $g(-l)=g(l)=f(-l)$, причем разность $f(x)-g(x)$ может быть отличной от нуля только при $x_0-\delta<x<x_0+\delta$ и при $l-\delta<x<l$. Поэтому будем иметь

$$\rho^2(f, g)=\int_{-l}^{l}[f(x)-g(x)]^2dx=\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta}[f(x)-g(x)]^2dx+$$
$$+\int_{l-\delta}^{l}[f(x)-g(x)]^2dx\leqslant\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta}\{|f(x)|+|g(x)|\}^2dx+$$
$$+\int_{l-\delta}^{l}\{|f(x)|+|g(x)|\}^2dx\leqslant 4M^2 2\delta+4M^2\delta=12M^2\delta<\frac{\varepsilon}{4},$$

если только взять $\delta>0$ достаточно малым. Так как $g(x)$ непрерывна на отрезке $[-l, l]$ и имеет равные значения на его концах: $g(-l)=g(l)$, то по первой теореме Вейерштрасса (теорема 11.4) найдется такой тригонометрический многочлен

$$T_{n_0}(x)=\frac{\alpha_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}\left(\alpha_k\cos\frac{k\pi x}{l}+\beta_k\sin\frac{k\pi x}{l}\right),$$

что

$$|g(x)-T_{n_0}(x)|<\sqrt{\frac{\varepsilon}{8l}} \quad \text{при всех} \quad x\in[-l,\ l]. \tag{11.154}$$

Следовательно,

$$\rho^2(g,\ T_{n_0})=\int_{-l}^{l}[g(x)-T_{n_0}(x)]^2\,dx<\frac{\varepsilon}{8l}\int_{-l}^{l}dx=\frac{\varepsilon}{4}. \tag{11.155}$$

Воспользуемся теперь элементарным неравенством

$$(a+b)^2\leqslant 2a^2+2b^2,$$

положив $a=f(x)-g(x)$, $b=g(x)-T_{n_0}(x)$; это даст

$$[f(x)-T_{n_0}(x)]^2\leqslant 2\{[f(x)-g(x)]^2+[g(x)-T_{n_0}(x)]^2\}$$

и, следовательно,

$$\rho^2(f,\ T_{n_0})=\int_{-l}^{l}[f(x)-T_{n_0}(x)]^2\,dx\leqslant 2\int_{-l}^{l}[f(x)-g(x)]^2\,dx+$$

$$+2\int_{-l}^{l}[g(x)-T_{n_0}(x)]^2\,dx<2\,\frac{\varepsilon}{4}+2\,\frac{\varepsilon}{4}=\varepsilon.$$

Если в последнем неравенстве заменить тригонометрический многочлен $T_{n_0}(x)$ тригонометрическим многочленом Фурье $T^f_{n_0}(x)$ функции $f(x)$, то и подавно будет

$$\rho^2(f,\ T^f_{n_0})<\varepsilon, \tag{11.156}$$

так как при подстановке $T^f_{n_0}$ вместо T_{n_0} квадратичное уклонение достигает своего минимума.

Воспользовавшись тождеством Бесселя, перепишем неравенство (11.156) так:

$$\rho^2(f,\ T^f_{n_0})=\int_{-l}^{l}f^2(x)\,dx-l\left\{\frac{a_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{n_0}\left(a_k^2+b_k^2\right)\right\}<\varepsilon. \tag{11.157}$$

Следовательно, и подавно будет

$$\rho^2(f,\ T^f_{n_0})=\int_{-l}^{l}f^2(x)\,dx-l\left\{\frac{a_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{n}\left(a_k^2+b_k^2\right)\right\}<\varepsilon \tag{11.158}$$

при всех $n\geqslant n_0$. В силу произвольности $\varepsilon>0$, это означает, что $\rho^2(f,\ T^f_{n_0})\to 0$ при $n\to+\infty$, что и требовалось доказать.

Из доказанной полноты тригонометрической системы следует, согласно предыдущему, ее замкнутость, а также однозначная определимость кусочно-непрерывной функции $f(x)$ ее тригонометрическим рядом Фурье всюду на отрезке $[-l, l]$, кроме, быть может, конечного числа точек (точек разрыва $f(x)$). Впервые полноту тригонометрической системы доказал А. М. Ляпунов.

5. Полнота других классических ортогональных систем, используемых в математической физике, доказывается аналогично. Рассмотрим, например, доказательство полноты системы полиномов Лежандра. Пусть $f(x)$ кусочно-непрерывна на отрезке $[-1, 1]$ и пусть дано произвольное $\varepsilon > 0$. Заменим $f(x)$ непрерывной на $[-1, 1]$ функцией $g_\varepsilon(x)$, для которой

$$\rho^2(f, g_\varepsilon) = \int_{-1}^{1} [f(x) - g_\varepsilon(x)]^2 \, dx < \frac{\varepsilon}{4}, \tag{11.159}$$

аналогично тому, как это делалось в доказательстве полноты тригонометрической системы; только здесь уже незачем добиваться равенства значений функции $g_\varepsilon(x)$ на концах отрезка $[-1, 1]$. По второй теореме Вейерштрасса (теорема 11.5) найдется такой алгебраический многочлен

$$Q_m(x) = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \ldots + A_m x^m,$$

что равномерно на отрезке $[-1, 1]$ будет выполняться неравенство

$$|g_\varepsilon(x) - Q_m(x)| < \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\varepsilon}{2}},$$

а следовательно, и неравенство

$$\rho^2(g_\varepsilon, Q_m) = \int_{-1}^{+1} [g_\varepsilon(x) - Q_m(x)]^2 \, dx < \frac{\varepsilon}{4}. \tag{11.160}$$

Так как $1, x, x^2, \ldots, x^m$ *) являются линейными комбинациями полиномов Лежандра, то

$$Q_m(x) = B_0 + B_1 P_1(x) + B_2 P_2(x) + \ldots + B_m P_m(x),$$

где $P_1(x), \ldots, P_m(x)$ — полиномы Лежандра.

Из (11.159) и (11.160), в силу неравенства $(a+b)^2 \leqslant 2a^2 + 2b^2$, следует, что

$$\rho^2(f, Q_m) \leqslant 2\rho^2(f, g_\varepsilon) + 2\rho^2(g_\varepsilon, Q_m) \leqslant 2\frac{\varepsilon}{4} + 2\frac{\varepsilon}{4} = \varepsilon. \tag{11.161}$$

*) См. Дополнение 1 к гл. 11.

Если в выражении $\rho^2(f, Q_m)$ коэффициенты $B_0, \ldots, B_m$ заменить коэффициентами Фурье функции $f(x)$ по системе полиномов Лежандра

$$c_k = \frac{1}{\|P_k\|^2} \int_{-1}^{+1} f(x) P_k(x)\, dx, \quad k = 0, 1, \ldots, m, \tag{11.162}$$

то, в силу минимизирующего свойства коэффициентов Фурье, квадратичное уклонение $\rho^2(f, Q_m^f)$ не увеличится. Поэтому, вводя обозначение

$$Q_m^f(x) = c_0 + c_1 P_1(x) + \ldots + c_m P_m(x), \tag{11.163}$$

получим, что

$$\rho^2(f, Q_m^f) < \varepsilon. \tag{11.164}$$

В силу тождества Бесселя

$$\rho^2(f, Q_n^f) = \int_{-1}^{+1} f^2(x)\, dx - \sum_{k=1}^{n} c_k^2 \|\varphi_k\|^2, \tag{11.165}$$

получим, что из выполнения неравенства (11.164) вытекает также выполнение неравенства

$$\rho^2(f, Q_n^f) < \varepsilon \tag{11.166}$$

при всех $n \geqslant m$. В силу произвольности $\varepsilon > 0$, это означает, что

$$\rho^2(f, Q_n^f) \to 0 \quad \text{при} \quad n \to +\infty. \tag{11.167}$$

Этим полнота системы полиномов Лежандра в $Q[-l, l]$ доказана.

§ 7. Ряды Фурье по ортогональным системам комплексных функций и комплексная запись тригонометрического ряда Фурье

В данном параграфе наряду с вещественными функциями мы будем рассматривать комплексные функции вещественной переменной x, а именно, функции вида

$$\varphi(x) = \varphi^*(x) + i\varphi^{**}(x), \tag{11.168}$$

где $\varphi^*(x)$ и $\varphi^{**}(x)$ — вещественные функции. Функцию, комплексно сопряженную с $\varphi(x)$, т. е. отличающуюся знаком мнимой части, будем обозначать через $\overline{\varphi}(x)$; таким образом,

$$\overline{\varphi}(x) = \varphi^*(x) - i\varphi^{**}(x). \tag{11.168'}$$

Заметим, что

$$\varphi(x)\overline{\varphi}(x) = [\varphi^*(x)]^2 + [\varphi^{**}(x)]^2 = |\varphi(x)|^2 \geqslant 0. \tag{11.169}$$