Если в выражении $\rho^2(f, Q_m)$ коэффициенты $B_0, \ldots, B_m$ заменить коэффициентами Фурье функции $f(x)$ по системе полиномов Лежандра

$$c_k = \frac{1}{\|P_k\|^2} \int_{-1}^{+1} f(x) P_k(x)\, dx, \quad k = 0, 1, \ldots, m, \tag{11.162}$$

то, в силу минимизирующего свойства коэффициентов Фурье, квадратичное уклонение $\rho^2(f, Q_m^f)$ не увеличится. Поэтому, вводя обозначение

$$Q_m^f(x) = c_0 + c_1 P_1(x) + \ldots + c_m P_m(x), \tag{11.163}$$

получим, что

$$\rho^2(f, Q_m^f) < \varepsilon. \tag{11.164}$$

В силу тождества Бесселя

$$\rho^2(f, Q_n^f) = \int_{-1}^{+1} f^2(x)\, dx - \sum_{k=1}^{n} c_k^2 \|\varphi_k\|^2, \tag{11.165}$$

получим, что из выполнения неравенства (11.164) вытекает также выполнение неравенства

$$\rho^2(f, Q_n^f) < \varepsilon \tag{11.166}$$

при всех $n \geqslant m$. В силу произвольности $\varepsilon > 0$, это означает, что

$$\rho^2(f, Q_n^f) \to 0 \quad \text{при} \quad n \to +\infty. \tag{11.167}$$

Этим полнота системы полиномов Лежандра в $Q[-l, l]$ доказана.

§ 7. Ряды Фурье по ортогональным системам комплексных функций и комплексная запись тригонометрического ряда Фурье

В данном параграфе наряду с вещественными функциями мы будем рассматривать комплексные функции вещественной переменной x, а именно, функции вида

$$\varphi(x) = \varphi^*(x) + i\varphi^{**}(x), \tag{11.168}$$

где $\varphi^*(x)$ и $\varphi^{**}(x)$ — вещественные функции. Функцию, комплексно сопряженную с $\varphi(x)$, т. е. отличающуюся знаком мнимой части, будем обозначать через $\overline{\varphi}(x)$; таким образом,

$$\overline{\varphi}(x) = \varphi^*(x) - i\varphi^{**}(x). \tag{11.168'}$$

Заметим, что

$$\varphi(x)\overline{\varphi}(x) = [\varphi^*(x)]^2 + [\varphi^{**}(x)]^2 = |\varphi(x)|^2 \geqslant 0. \tag{11.169}$$

Функция $\varphi(x)=\varphi^*(x)+i\varphi^{**}(x)$ называется *непрерывной* (*кусочно-непрерывной*) на $[a, b]$, если ее вещественная и мнимая части, т. е. $\varphi^*(x)$ и $\varphi^{**}(x)$, непрерывны (кусочно-непрерывны) на $[a, b]$.

Производная и интеграл от функции $\varphi(x)=\varphi^*(x)+i\varphi^{**}(x)$ определяются соответственно равенствами

$$\frac{d\varphi}{dx}=\frac{d\varphi^*}{dx}+i\,\frac{d\varphi^{**}}{dx}, \tag{11.170}$$

$$\int_a^b \varphi(x)\,dx=\int_a^b \varphi^*(x)\,dx+i\int_a^b \varphi^{**}(x)\,dx, \tag{11.171}$$

причем $\varphi(x)=\varphi^*(x)+i\varphi^{**}(x)$ называется *дифференцируемой* (*интегрируемой*), если $\varphi^*(x_0)$ и $\varphi^{**}(x)$ дифференцируемы (интегрируемы).

Если $\varphi(x)=\varphi^*(x)+i\varphi^{**}(x)$ и $\psi(x)=\psi^*(x)+i\varphi^{**}(x)$ интегрируемы на $[a, b]$, то, очевидно, функция $\varphi(x)\overline{\psi}(x)$ также интегрируема на $[a, b]$. В частности, если $\varphi(x)$ интегрируема на $[a, b]$, то $\varphi(x)\overline{\varphi}(x)$ также интегрируема на $[a, b]$, причем

$$\int_a^b \varphi(x)\overline{\varphi}(x)\,dx=\int_a^b |\varphi(x)|^2\,dx=\int_a^b \{[\varphi^*(x)]^2+[\varphi^{**}(x)]^2\}\,dx\geqslant 0.$$

Функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$, интегрируемые на $[a, b]$, называются *ортогональными* на этом отрезке, если

$$\int_a^b \varphi(x)\overline{\psi}(x)\,dx=0. \tag{11.172}$$

Система комплексных функций

$$\varphi_1(x),\ \varphi_2(x),\ \ldots,\ \varphi_n(x),\ \ldots, \tag{11.173}$$

интегрируемых на $[a, b]$, называется *ортогональной* на $[a, b]$, если

$$\int_a^b \varphi_j(x)\overline{\varphi}_k(x)\,dx=\begin{cases} 0 & \text{при } j\neq k, \\ \|\varphi_k\|^2>0 & \text{при } j=k, \end{cases} \tag{11.174}$$

причем *нормой* интегрируемой функции $\varphi(x)$ называется неотрицательное число

$$\|\varphi\|=\left(\int_a^b \varphi(x)\overline{\varphi}(x)\,dx\right)^{\frac{1}{2}}=\left(\int_a^b |\varphi(x)|^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{11.175}$$

Одним из важнейших примеров ортогональных систем комплексных функций является система

$$e^{i\frac{n\pi x}{l}}, \quad n=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots, \tag{11.176}$$

ортогональная на отрезке $[-l, l]$. Ортогональность $e^{i\frac{k\pi x}{l}}$ и $e^{i\frac{n\pi x}{l}}$ при $k \neq n$ устанавливается непосредственным интегрированием произведения

$$e^{i\frac{k\pi x}{l}}\overline{\left(e^{i\frac{n\pi x}{l}}\right)} = e^{i\frac{k\pi x}{l}}e^{-i\frac{n\pi x}{l}} = e^{i\frac{(k-n)\pi x}{l}} =$$
$$= \cos\frac{(k-n)\pi x}{l} + i\sin\frac{(k-n)\pi x}{l}.$$

Для норм получаем значения

$$\left\|e^{i\frac{n\pi x}{l}}\right\| = \left(\int_{-l}^{l} e^{i\frac{n\pi x}{l}}e^{-i\frac{n\pi x}{l}}\,dx\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\int_{-l}^{l} dx\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2l}. \tag{11.177}$$

Коэффициенты Фурье для любой функции $f(x)$, интегрируемой на $[a, b]$, по ортогональной системе (11.173) определяются по формулам

$$c_k = \frac{1}{\|\varphi_k\|^2}\int_a^b f(x)\,\overline{\varphi}_k(x)\,dx, \qquad k=1,\ 2,\ \ldots \tag{11.178}$$

Рядом Фурье функции $f(x)$ по ортогональной системе (11.173) называется ряд

$$f(x) \sim \sum_{k=1}^{+\infty} c_k\varphi_k(x), \tag{11.179}$$

коэффициентами c_k которого являются числа (11.178).

В частности, коэффициенты Фурье $f(x)$ по системе (11.176) равны

$$c_k = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(x)\,e^{-i\frac{k\pi x}{l}}\,dx, \qquad k=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots, \tag{11.178'}$$

а ряд Фурье (11.179) по этой системе принимает вид

$$f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{i\frac{n\pi x}{l}}. \tag{11.179'}$$

Докажем, что если функция $f(x)$ вещественна на отрезке $[-l, l]$, то соотношения (11.178′) и (11.179′) эквивалентны соотношениям

$$a_k = \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f(x) \cos \frac{k\pi x}{l}\, dx, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots;$$
$$b_k = \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f(x) \sin \frac{k\pi x}{l}\, dx, \qquad k = 1, 2, \ldots \tag{11.180}$$

и

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} \left(a_k \cos \frac{k\pi x}{l} + b_k \sin \frac{k\pi x}{l}\right), \tag{11.181}$$

т. е. что соотношения (11.178) и (11.179) являются комплексной записью коэффициентов Фурье и ряда Фурье для функции $f(x)$ по основной тригонометрической системе.

Применяя формулу Эйлера

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i \sin\varphi$$

к (11.178′), получим

$$c_0 = \frac{1}{2l} \int_{-l}^{l} f(x)\, dx = \frac{a_0}{2}; \tag{11.182}$$

$$c_k = \frac{1}{2l} \int_{-l}^{l} f(x) e^{-i\frac{k\pi x}{l}}\, dx = \frac{1}{2l} \int_{-l}^{l} f(x) \left[\cos \frac{k\pi x}{l} - i \sin \frac{k\pi x}{l}\right] dx =$$
$$= \frac{a_k - ib_k}{2}, \qquad k = 1, 2, \ldots; \tag{11.183}$$

$$c_{-k} = \frac{1}{2l} \int_{-l}^{l} f(x) e^{i\frac{k\pi x}{l}}\, dx = \frac{1}{2l} \int_{-l}^{l} f(x) \left[\cos \frac{k\pi x}{l} + i \sin \frac{k\pi x}{l}\right] dx =$$
$$= \frac{a_k + ib_k}{2}, \qquad k = 1, 2, \ldots \tag{11.184}$$

Ряд (11.179′) можно переписать в виде

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{i\frac{n\pi x}{l}} = c_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} c_k e^{i\frac{k\pi x}{l}} + \sum_{k=1}^{+\infty} c_{-k} e^{-i\frac{k\pi x}{l}}. \tag{11.185}$$

Подставляя в (11.185) выражения (11.182), (11.183) и (11.184) коэффициентов c_0, c_k и c_{-k} и используя формулы Эйлера

$$\cos\varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2}, \quad \sin\varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i}.$$

получим равенство

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{i\frac{n\pi x}{l}} = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{a_k - ib_k}{2} e^{i\frac{k\pi x}{l}} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{a_k + ib_k}{2} e^{-i\frac{k\pi x}{l}} =$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} \left[a_k \frac{e^{i\frac{k\pi x}{l}} + e^{-i\frac{k\pi x}{l}}}{2} + b_k \frac{e^{i\frac{k\pi x}{l}} - e^{-i\frac{k\pi x}{l}}}{2i} \right] =$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos\frac{k\pi x}{l} + b_k \sin\frac{k\pi x}{l} \right), \quad (11.186)$$

что и требовалось доказать.

Если функция $f(x)$ является не только интегрируемой, но и кусочно-гладкой на $[-l, l]$, то, в силу основной теоремы о сходимости тригонометрического ряда Фурье и в силу равенства (11.186), можно написать

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{i\frac{n\pi x}{l}}, \quad (11.187)$$

где коэффициенты Фурье определяются по формулам (11.178), причем в левой части равенства (11.187) $f(x)$ в точках разрыва нужно заменить через $\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$, если $-l < x < l$, а в точках $x = \pm l$ через $\frac{f(l-0)+f(l+0)}{2}$.

Комплексная запись (11.178), (11.179) разложения функции $f(x)$ в тригонометрический ряд Фурье широко используется в математике и ее приложениях. Она весьма удобна при выполнении различных выкладок, в частности, где фигурируют произведения тригонометрических рядов Фурье, а также при рассмотрении тригонометрических рядов Фурье для функций нескольких независимых переменных.

§ 8. Тригонометрические ряды Фурье для функций нескольких иезависимых перемениых

Пусть функция $f(x, y)$ определена в прямоугольнике $-l_1 \leqslant x \leqslant l_1$, $-l_2 \leqslant y \leqslant l_2$ и при каждом $y \in [-l_2, l_2]$ удовлетворяет условиям, при которых ее можно разложить в тригонометрический ряд Фурье, как функцию x на отрезке $[-l_1, l_1]$. Тогда, воспользовавшись комплексным представлением для тригонометрического ряда Фурье, получим

$$f(x, y) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(y) e^{i\frac{n\pi x}{l_1}}, \quad (11.188)$$