получим равенство

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{i\frac{n\pi x}{l}} = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{a_k - ib_k}{2} e^{i\frac{k\pi x}{l}} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{a_k + ib_k}{2} e^{-i\frac{k\pi x}{l}} =$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} \left[a_k \frac{e^{i\frac{k\pi x}{l}} + e^{-i\frac{k\pi x}{l}}}{2} + b_k \frac{e^{i\frac{k\pi x}{l}} - e^{-i\frac{k\pi x}{l}}}{2i} \right] =$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos\frac{k\pi x}{l} + b_k \sin\frac{k\pi x}{l} \right), \qquad (11.186)$$

что и требовалось доказать.

Если функция $f(x)$ является не только интегрируемой, но и кусочно-гладкой на $[-l, l]$, то, в силу основной теоремы о сходимости тригонометрического ряда Фурье и в силу равенства (11.186), можно написать

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{i\frac{n\pi x}{l}}, \qquad (11.187)$$

где коэффициенты Фурье определяются по формулам (11.178), причем в левой части равенства (11.187) $f(x)$ в точках разрыва нужно заменить через $\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$, если $-l < x < l$, а в точках $x = \pm l$ через $\frac{f(l-0)+f(l+0)}{2}$.

Комплексная запись (11.178), (11.179) разложения функции $f(x)$ в тригонометрический ряд Фурье широко используется в математике и ее приложениях. Она весьма удобна при выполнении различных выкладок, в частности, где фигурируют произведения тригонометрических рядов Фурье, а также при рассмотрении тригонометрических рядов Фурье для функций нескольких независимых переменных.

§ 8. Тригонометрические ряды Фурье для функций нескольких независимых переменных

Пусть функция $f(x, y)$ определена в прямоугольнике $-l_1 \leqslant x \leqslant l_1$, $-l_2 \leqslant y \leqslant l_2$ и при каждом $y \in [-l_2, l_2]$ удовлетворяет условиям, при которых ее можно разложить в тригонометрический ряд Фурье, как функцию x на отрезке $[-l_1, l_1]$. Тогда, воспользовавшись комплексным представлением для тригонометрического ряда Фурье, получим

$$f(x, y) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(y) e^{i\frac{n\pi x}{l_1}}, \qquad (11.188)$$

где

$$c_n(y)=\frac{1}{2l_1}\int_{-l_1}^{l_1} f(\xi, y)\, e^{-\frac{n\pi\xi}{l_1}}\, d\xi, \qquad n=0, \pm 1, \pm 2, \ldots \tag{11.189}$$

Пусть каждую из функций $c_n(y)$ в свою очередь можно разложить на отрезке $-l_2 \leqslant y \leqslant l_2$ в тригонометрический ряд Фурье, т. е.

$$c_n(y)=\sum_{m=-\infty}^{+\infty} c_{nm} e^{i\frac{m\pi y}{l_2}}, \qquad n=0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \tag{11.190}$$

где

$$c_{nm}=\frac{1}{2l_2}\int_{-l_2}^{l_2} c_n(\eta)\, e^{-i\frac{m\pi\eta}{l_2}}\, d\eta, \qquad n, m=0, \pm 1, \pm 2, \ldots \tag{11.191}$$

Тогда, подставляя (11.189) в (11.191) и (11.190) в (11.188), получим

$$f(x, y)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\sum_{m=-\infty}^{+\infty} c_{nm} e^{i\left(\frac{n\pi x}{l_1}+\frac{m\pi y}{l_2}\right)}, \tag{11.192}$$

где

$$c_{nm}=\frac{1}{4l_1 l_2}\int_{-l_1}^{l_1}\int_{-l_2}^{l_2} f(\xi, \eta)\, e^{-i\left(\frac{n\pi\xi}{l_1}+\frac{m\pi\eta}{l_2}\right)}\, d\xi\, d\eta. \tag{11.193}$$

Так мы получили разложение функции двух переменных в тригонометрический ряд Фурье в комплексной форме.

Воспользовавшись формулой Эйлера $e^{i\varphi}=\cos\varphi+\sin\varphi$, разложение (11.192) можно переписать в следующей форме:

$$f(x, y)=\sum_{n, m=-\infty}^{+\infty} c_{nm}\left(\cos\frac{n\pi x}{l_1}+i\sin\frac{n\pi x}{l_1}\right)\left(\cos\frac{m\pi y}{l_2}+i\sin\frac{m\pi y}{l_2}\right)=$$

$$=\sum_{m, n=0}^{+\infty}\lambda_{mn}\left[a_{mn}\cos\frac{n\pi x}{l_1}\cos\frac{m\pi y}{l_2}+b_{mn}\sin\frac{n\pi x}{l_1}\cos\frac{m\pi y}{l_2}+\right.$$

$$\left.+c'_{mn}\cos\frac{n\pi x}{l_1}\sin\frac{m\pi y}{l_2}+d_{mn}\sin\frac{n\pi x}{l_1}\sin\frac{m\pi y}{l_2}\right], \tag{11.194}$$

где

$$\lambda_{mn}=\begin{cases}\frac{1}{4} & \text{при} \quad m=n=0,\\ \frac{1}{2} & \text{при} \quad m=0,\ n>0 \ \text{или} \ m>0,\ n=0,\\ 1 & \text{при} \quad m>0,\ n>0,\end{cases} \tag{11.195}$$

и

$$a_{mn}=\frac{1}{l_1 l_2}\int_{-l_1}^{l_1}\int_{-l_2}^{l_2} f(x, y)\cos\frac{n\pi x}{l_1}\cos\frac{m\pi y}{l_2}\,dx\,dy;$$

$$b_{mn}=\frac{1}{l_1 l_2}\int_{-l_1}^{l_1}\int_{-l_2}^{l_2} f(x, y)\sin\frac{n\pi x}{l_1}\cos\frac{m\pi y}{l_2}\,dx\,dy;$$

$$c'_{mn}=\frac{1}{l_1 l_2}\int_{-l_1}^{l_1}\int_{-l_2}^{l_2} f(x, y)\cos\frac{n\pi x}{l_1}\sin\frac{m\pi y}{l_2}\,dx\,dy,$$

$$d_{mn}=\frac{1}{l_1 l_2}\int_{-l_1}^{l_1}\int_{-l_2}^{l_2} f(x, y)\sin\frac{n\pi x}{l_1}\sin\frac{m\pi y}{l_2}\,dx\,dy. \qquad (11.196)$$

Если $f(x, y)$ является четной функцией по каждому из аргументов, т. е.

$$f(-x, y)=f(x, -y)=f(x, y), \qquad (11.197)$$

то, как легко усмотреть, $b_{mn}=c'_{mn}=d_{mn}=0$ и ряд Фурье для такой функции принимает вид

$$f(x, y)=\sum_{m, n=0}^{+\infty}\lambda_{mn}a_{mn}\cos\frac{n\pi x}{l_1}\cos\frac{m\pi y}{l_2}. \qquad (11.198)$$

Если $f(x, y)$ нечетна по x и по y, то для нее могут быть отличными от нуля только d_{mn}, так что ряд Фурье принимает вид

$$f(x, y)=\sum_{m, n=0}^{+\infty}d_{mn}\sin\frac{n\pi x}{l_1}\sin\frac{m\pi y}{l_2}. \qquad (11.199)$$

Если $f(x, y)$ четна по y и нечетна по x, то она разлагается в ряд по $\sin\frac{n\pi x}{l_1}\cos\frac{m\pi y}{l_2}$; если же она нечетна по y и четна по x, то разлагается в ряд по $\cos\frac{n\pi x}{l_1}\sin\frac{m\pi y}{l_2}$.

Мы не будем исследовать условий разложимости функции $f(x, y)$ в двойной тригонометрический ряд Фурье, а сформулируем без доказательства, что *если $f(x, y)$, $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ и $\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}$ являются непрерывными функциями, периодическими по x с периодом $2l_1$ и по y с периодом $2l_2$, то тригонометрический ряд Фурье функции $f(x, y)$ сходится к $f(x, y)$ в каждой точке.*