§ 9. Интеграл Фурье

1. Неограниченное растяжение интервала разложения функции в ряд Фурье и интегральная формула Фурье. Если интервал $[-l, l]$, на котором функция $f(x)$ разлагается в тригонометрический ряд Фурье, неограниченно возрастает, т. е. $l \to +\infty$, то ряд Фурье превращается в интеграл Фурье. При переходе к пределу происходит качественный скачок: функция, заданная на любом конечном интервале $[-l, l]$, разлагается в ряд «гармонических колебаний», частоты которых образуют дискретную последовательность; функция $f(x)$, заданая на всей оси x или на полуоси x, разлагается в интеграл, который представляет собой сумму «гармонических колебаний», частоты которых непрерывно заполняют действительную полуось $0 \leqslant \lambda < +\infty$. Рассмотрим этот предельный переход от ряда Фурье к интегралу Фурье.

Пусть $f(x)$ задана на всей оси x и на каждом конечном отрезке $[-l, l]$ является кусочно-гладкой. Тогда, в силу основной теоремы о сходимости тригонометрического ряда Фурье, при любом $l > 0$

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty}\left(a_k \cos\frac{k\pi x}{l} + b_k \sin\frac{k\pi x}{l}\right), \tag{11.200}$$

где

$$\left.\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(\xi)\,d\xi, \quad a_k = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(\xi)\cos\frac{k\pi\xi}{l}\,d\xi, \\ b_k &= \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(\xi)\sin\frac{k\pi\xi}{l}\,d\xi. \end{aligned}\right\} \tag{11.201}$$

Равенство (11.200) имеет место, если x — внутренняя точка отрезка $[-l, l]$, в которой $f(x)$ непрерывна; если же x — внутренняя точка этого отрезка, в которой $f(x)$ разрывна, то в левой части равенства (11.200) $f(x)$ нужно заменить через $\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$.

Подставляя выражения (11.201) в (11.200), получим

$$f(x) = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(\xi)\,d\xi + \frac{1}{l}\sum_{k=1}^{+\infty}\int_{-l}^{l} f(\xi)\cos\frac{k\pi}{l}(\xi - x)\,d\xi. \tag{11.202}$$

Если $f(x)$ еще и абсолютно интегрируема на всей оси x, т. е.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|\,dx = Q < +\infty, \tag{11.203}$$

то при переходе к пределу при $l \to +\infty$ первое слагаемое в правой части (11.202) в силу условия (11.203) стремится к нулю. Следовательно,

$$f(x) = \lim_{l \to +\infty} \frac{1}{l} \sum_{k=1}^{+\infty} \int_{-l}^{l} f(\xi) \cos \frac{k\pi}{l} (\xi - x)\, d\xi. \tag{11.204}$$

Положим $\frac{k\pi}{l} = \lambda_k$, $\frac{\pi}{l} = \Delta\lambda_k$. Тогда (11.204) можно переписать в виде

$$f(x) = \lim_{\substack{l \to +\infty \\ \Delta\lambda_k \to 0}} \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{+\infty} \Delta\lambda_k \int_{-l}^{l} f(\xi) \cos \lambda_k (\xi - x)\, d\xi. \tag{11.205}$$

Будем теперь рассуждать нестрого:

1) при больших значениях l интеграл $\int_{-l}^{l} f(\xi) \cos \lambda_k (\xi - x)\, d\xi$ можно заменить интегралом $\int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) \cos \lambda_k (\xi - x)\, d\xi$,

2) $\sum_{k=1}^{+\infty} \Delta\lambda_k \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) \cos \lambda_k (\xi - x)\, d\xi$ является интегральной суммой для интеграла $\int_{0}^{+\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) \cos \lambda (\xi - x)\, d\xi$, поэтому из (11.205) получаем

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_{0}^{+\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) \cos \lambda (\xi - x)\, d\xi, \tag{11.206}$$

где в левой части равенства (11.206) вместо $f(x)$ нужно писать $\frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}$, если x является точкой разрыва функции $f(x)$. Равенство (11.206) называется *интегральной формулой Фурье*, а интеграл, стоящий в ее правой части, — *интегралом Фурье*.

2. Обоснование интегральной формулы Фурье. Равенство (11.206) было получено с помощью формальных предельных переходов, которые не были обоснованы. Вместо того чтобы их обосновывать, удобнее непосредственно доказывать справедливость равенства (11.206).

Теорема 11.11. *Если функция $f(x)$, кусочно-гладкая на каждом конечном отрезке оси x, абсолютно интегрируема* *на всей оси x, т. е. интеграл* $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|\,dx$ *сходится, то*

$$\lim_{l\to+\infty}\frac{1}{\pi}\int\limits_0^l d\lambda \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)\cos\lambda(\xi-x)\,d\xi=\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}. \qquad (11.207)$$

Доказательство. Заметим прежде всего, что интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)\cos\lambda(\xi-x)\,d\xi$, зависящий от параметра λ, сходится равномерно по параметру λ при $0\leqslant\lambda<+\infty$, так как $|f(\xi)\cos\lambda(\xi-x)|\leqslant|f(\xi)|$, а интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}|f(\xi)|\,d\xi$ по условию сходится. Следовательно, можно изменить порядок интегрирования (см. п. 3 § 2 гл. 10), т. е. записать так:

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_0^l d\lambda \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)\cos\lambda(\xi-x)\,d\xi=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} d\xi\int\limits_0^l f(\xi)\cos\lambda(\xi-x)\,d\lambda=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)\frac{\sin l(\xi-x)}{\xi-x}\,d\xi=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x+\zeta)\frac{\sin l\zeta}{\zeta}\,d\zeta, \qquad (11.208)$$

где $\zeta=\xi-x$, $d\zeta=d\xi$. Нам остается доказать, что

$$\lim_{l\to+\infty}\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{0} f(x+\zeta)\frac{\sin l\zeta}{\zeta}\,d\zeta=\frac{f(x-0)}{2}, \qquad (11.209)$$

$$\lim_{l\to+\infty}\frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{+\infty} f(x+\zeta)\frac{\sin l\zeta}{\zeta}\,d\zeta=\frac{f(x+0)}{2}. \qquad (11.210)$$

При доказательстве мы воспользуемся известным соотношением

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{+\infty}\frac{\sin l\zeta}{\zeta}\,d\zeta=\frac{1}{2} \qquad (11.211)$$

(см. п. 5 § 2 гл. 10).

Докажем, например, справедливость соотношения (11.210). В силу равенства (11.211), можно записать, что

$$\frac{f(x+0)}{2}=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{+\infty} f(x+0)\frac{\sin l\zeta}{\zeta}\,d\zeta. \qquad (11.212)$$

Поэтому разность между переменной величиной и предполагаемым пределом в соотношении (11.210) будет равна

$$J_{0,\,+\infty}=\frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{+\infty} f(x+\zeta)\frac{\sin l\zeta}{\zeta}\,d\zeta-\frac{f(x+0)}{2}=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{+\infty}[f(x+\zeta)-f(x+0)]\frac{\sin l\zeta}{\zeta}\,d\zeta. \quad (11.213)$$

Таким образом, нужно доказать, что этот интеграл стремится к нулю при $l\to+\infty$. Разобьем интервал интегрирования $0\leqslant\zeta<+\infty$ на три: $0\leqslant\zeta\leqslant\delta$, $\delta\leqslant\zeta\leqslant\Delta$, $\Delta\leqslant\zeta<+\infty$; тогда интеграл (11.213) будет представлен в виде суммы трех интегралов

$$J_{0,\,+\infty}=J_{0,\,\delta}+J_{\delta,\,\Delta}+J_{\Delta,\,+\infty}. \quad (11.214)$$

После этого будем действовать следующим образом. Сначала, задавшись произвольным $\varepsilon>0$, докажем, что при всех достаточно малых $\delta>0$ и всех достаточно больших $\Delta>\delta$ будут выполняться неравенства

$$|J_{0,\,\delta}|<\frac{\varepsilon}{3} \quad \text{и} \quad |J_{\Delta,\,+\infty}|<\frac{\varepsilon}{3} \quad (11.215)$$

сразу при всех $l\geqslant 1$. Затем, фиксировав δ и Δ так, чтобы выполнялись неравенства (11.215), выберем $l\geqslant 1$ столь большим, чтобы в силу основной леммы (см. § 5) выполнялось неравенство $|J_{\delta,\,\Delta}|<\frac{\varepsilon}{3}$. Отсюда, в силу (11.214), будет следовать, что $|J_{0,\,+\infty}|<\varepsilon$ при всех достаточно больших $l\geqslant 1$. Итак, оценим сначала интеграл

$$J_{0,\,\delta}=\frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\delta}\frac{f(x+\zeta)-f(x+0)}{\zeta}\sin l\zeta\,d\zeta.$$

При всех достаточно малых $\delta>0$

$$\left|\frac{f(x+\zeta)-f(x+0)}{\zeta}\right|<|f'_{\text{прав}}(x)|+1 \quad \text{при всех} \quad \zeta\in(0,\,\delta).$$

Следовательно,

$$|J_{0,\,\delta}|<\frac{\delta}{\pi}\left\{|f'_{\text{прав}}(x)|+1\right\}<\frac{\varepsilon}{3} \quad \text{при всех} \quad \delta<\frac{\varepsilon\pi}{3\left\{|f'_{\text{прав}}(x)|+1\right\}} \quad (11.216)$$

и при всех значениях l.

Оценим, далее, интеграл

$$J_{\Delta,\,+\infty}=\frac{1}{\pi}\int\limits_{\Delta}^{+\infty} f(x+\zeta)\frac{\sin l\zeta}{\zeta}\,d\zeta-\frac{f(x+0)}{\pi}\int\limits_{\Delta}^{+\infty}\frac{\sin l\zeta}{\zeta}\,d\zeta.$$

Мы имеем

$$|J_{\Delta,\,+\infty}|\leqslant\frac{1}{\pi}\int\limits_{\Delta}^{+\infty}|f(x+\zeta)|\frac{d\zeta}{\zeta}+\frac{|f(x+0)|}{\pi}\left|\int\limits_{\Delta}^{+\infty}\frac{\sin l\zeta}{\zeta}\,d\zeta\right|\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{\pi\Delta}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}|f(x+\zeta)|\,d\zeta+\frac{|f(x+0)|}{\pi}\left|\int\limits_{l\Delta}^{+\infty}\frac{\sin\zeta^*}{\zeta^*}\,d\zeta^*\right|=$$

$$=\frac{Q}{\pi\Delta}+\frac{|f(x+0)|}{\pi}\left|\int\limits_{l\Delta}^{+\infty}\frac{\sin\zeta^*}{\zeta^*}\,d\zeta^*\right|,\quad\text{где}\quad\zeta^*=l\zeta. \tag{11.217}$$

Напомним, что, согласно условию (11.203), $Q=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}|f(x)|\,dx<\infty$, поэтому при всех достаточно больших $\Delta>0$ будет $\frac{Q}{\pi\Delta}<\frac{\varepsilon}{6}$ сразу для всех l. Далее, так как интеграл $\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{\sin\zeta^*}{\zeta^*}\,d\zeta^*$ сходится, то при всех достаточно больших $\Delta>0$ и всех $l\geqslant 1$

$$\frac{|f(x+0)|}{\pi}\left|\int\limits_{l\Delta}^{+\infty}\frac{\sin\zeta^*}{\zeta^*}\,d\zeta^*\right|<\frac{\varepsilon}{6}.$$

Следовательно, в силу (11.217)

$$|J_{\Delta,\,+\infty}|<\frac{\varepsilon}{3} \tag{11.218}$$

при всех достаточно больших $\Delta>0$ и всех $l\geqslant 1$.

Оценим, наконец, интеграл

$$J_{\delta,\,\Delta}=\frac{1}{\pi}\int\limits_{\delta}^{\Delta}\frac{f(x+\zeta)-f(x+0)}{\zeta}\sin l\zeta\,d\zeta. \tag{11.219}$$

Функция $\frac{f(x+\zeta)-f(x+0)}{\zeta}$ по переменной ζ является кусочно-гладкой на отрезке $\delta\leqslant\zeta\leqslant\Delta$. Поэтому, в силу основной леммы (см. § 5), при всех достаточно больших значениях $l\geqslant 1$ будет выполняться неравенство

$$|J_{\delta,\,\Delta}|<\frac{\varepsilon}{3}. \tag{11.220}$$

Сопоставляя (11.216), (11.218) и (11.220), получим, что при всех достаточно больших $l \gg 1$

$$|J_{0,\,+\infty}| < \varepsilon, \tag{11.221}$$

что и требовалось доказать.

Замечание. Основная теорема об интеграле Фурье справедлива и при более слабых ограничениях, налагаемых на функцию $f(x)$. А именно, *если абсолютно интегрируемая на всей оси x функция $f(x)$ 1) кусочно-непрерывна на каждом конечном отрезке оси x и 2) отношение $\left|\frac{f(x+\zeta)-f(x+0)}{\zeta}\right|$ ограничено при любом фиксированном x для всех достаточно малых ζ, то основная теорема сохраняет силу.*

Действительно, доказательство основной теоремы сводится к оценке трех интегралов: $J_{0,\delta}$, $J_{\delta,\Delta}$, $J_{\Delta,\,+\infty}$ для $J_{0,\,+\infty}$ *). Последний из этих трех интегралов мал при достаточно большом Δ, в силу абсолютной интегрируемости $f(x)$. Интеграл $J_{0,\delta}$ мал при всех достаточно малых $\delta > 0$, если отношение $\left|\frac{f(x+\zeta)-f(x+0)}{\zeta}\right|$ ограничено при каждом фиксированном x для всех достаточно малых $\zeta > 0$. В интеграле же

$$J_{\delta,\Delta} = \frac{1}{\pi}\int\limits_{\delta}^{\Delta} \frac{f(x+\zeta)-f(x+0)}{\zeta}\sin l\zeta\,d\zeta$$

функция $\varphi(\zeta) = \dfrac{f(x+\zeta)-f(x+0)}{\zeta}$ кусочно-непрерывна на отрезке $0 < \delta \leqslant \zeta \leqslant \Delta$ при любом фиксированном x. Пусть $[a, b]$ — какой-либо сегмент, на котором $\varphi(\zeta)$ непрерывна, и пусть дано какое угодно $\varepsilon > 0$. Построим такую кусочно-гладкую функцию $g_\varepsilon(x)$ (как при доказательстве первой теоремы Вейерштрасса), чтобы выполнялось неравенство

$$|\varphi(\zeta) - g_\varepsilon(\zeta)| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \quad \text{при} \quad 0 < \delta \leqslant \zeta \leqslant \Delta.$$

Но тогда

$$\left|\int\limits_a^b \varphi(\zeta)\sin l\zeta\,d\zeta\right| \leqslant \int\limits_a^b |\varphi(\zeta) - g_\varepsilon(\zeta)|\,d\zeta + \left|\int\limits_a^b g_\varepsilon(\zeta)\sin l\zeta\,d\zeta\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

*) И соответствующих трех интегралов $J_{0,\,-\delta}$, $J_{-\delta,\,-\Delta}$, $J_{-\Delta,\,-\infty}$ для $J_{0,\,-\infty}$, которые рассматриваются совершенно аналогично.

при всех достаточно больших $l > 0$, так как для кусочно-гладкой функции $g_\varepsilon(\zeta)$ справедлива основная лемма. Разбивая интеграл $J_{\delta, \Delta}$ на интегралы по сегментам непрерывности $\varphi(\zeta)$, получаем, что $J_{\delta, \Delta} \to 0$ при $l \to +\infty$, чем и завершается доказательство теоремы.

3. Интеграл Фурье как разложение в сумму гармоник. Интегральную формулу Фурье (11.206) можно переписать следующим образом:

$$f(x) = \int_0^{+\infty} [A(\lambda)\cos\lambda x + B(\lambda)\sin\lambda x]\,d\lambda, \tag{11.222}$$

где

$$A(\lambda) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)\cos\lambda\xi\,d\xi, \quad B(\lambda) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)\sin\lambda\xi\,d\xi. \tag{11.223}$$

Равенство (11.222) аналогично разложению функции в тригонометрический ряд Фурье, а выражения (11.223) аналогичны формулам для коэффициентов Фурье. Выражение (11.222) можно несколько преобразовать. Мы имеем

$$A(\lambda)\cos\lambda x + B(\lambda)\sin\lambda x = N(\lambda)\sin(\lambda x + \varphi_\lambda), \tag{11.224}$$

где

$$N(\lambda) = \sqrt{A^2(\lambda) + B^2(\lambda)}, \quad \cos\varphi_\lambda = \frac{A(\lambda)}{N(\lambda)}, \quad \sin\varphi_\lambda = \frac{B(\lambda)}{N(\lambda)}. \tag{11.225}$$

Таким образом, соотношение (11.222) представляет собой разложение функции $f(x)$, заданной на бесконечном интервале $0 \leqslant \lambda < +\infty$, на гармонические колебания, частоты которых λ непрерывно заполняют действительную полуось $0 \leqslant \lambda < +\infty$, а функции $A(\lambda)$ и $B(\lambda)$ дают закон распределения амплитуд $0 \leqslant \lambda < +\infty$ и начальных фаз φ_λ в зависимости от частоты λ.

Если функция $f(x)$ задана на конечном отрезке $[-l, l]$, то, как было установлено выше, при надлежащих ограничениях она разлагается на «гармонические колебания»:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty}\left(a_k\cos\frac{k\pi x}{l} + b_k\sin\frac{k\pi x}{l}\right) =$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} N_k\sin(\lambda_k x + \varphi_k), \tag{11.226}$$

частоты которых $\lambda_k = \frac{k\pi}{l}$, $k = 1, 2, \ldots$, образуют арифметическую прогрессию.

4. Комплексная форма интеграла Фурье имеет вид

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)\, e^{i\lambda(x-\xi)}\, d\xi; \qquad (11.227)$$

она эквивалентна действительной форме (11.206). В самом деле, $\int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)\cos\lambda(x-\xi)\,d\xi$ является четной функцией λ, а $\int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)\sin\lambda(x-\xi)\,d\xi$ — нечетной функцией λ; поэтому

$$\frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)\cos\lambda(\xi-x)\,d\xi=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)\cos\lambda(x-\xi)\,d\xi,$$

$$0=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)\sin\lambda(x-\xi)\,d\xi.$$

Следовательно, в силу формулы Эйлера

$$e^{i\lambda(x-\xi)}\equiv\cos\lambda(x-\xi)+i\sin\lambda(x-\xi)$$

имеем

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)\, e^{i\lambda(x-\xi)}\,d\xi=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)\cos\lambda(x-\xi)\,d\xi+$$

$$+\frac{i}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)\sin\lambda(x-\xi)\,d\xi=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)\cos\lambda(x-\xi)\,d\xi,$$

откуда вытекает эквивалентность (11.206) и (11.227). При этом интеграл $0=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)\sin\lambda(x-\xi)\,d\xi$ понимается, вообще говоря, в смысле главного значения (см § 3 гл. 9):

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)\sin\lambda(x-\xi)\,d\xi=$$

$$=\lim_{l\to+\infty}\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} d\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)\sin\lambda(x-\xi)\,d\xi.$$

5. Преобразование Фурье. Равенство (11.227) можно переписать в виде

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda x}\,d\lambda\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)\,e^{-i\lambda\xi}\,d\xi\right). \qquad (11.228)$$

Если ввести обозначение

$$\overline{f}(\lambda)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)\,e^{-i\lambda\xi}\,d\xi, \qquad (11.229)$$

то, согласно (11.228), получим

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} \overline{f}(\lambda)\,e^{i\lambda x}\,d\lambda. \qquad (11.230)$$

Функция $\overline{f}(\lambda)$ называется *образом Фурье* или *спектральной характеристикой функции* $f(x)$, заданной на всей вещественной оси x, $-\infty<x<+\infty$, а переход от $f(x)$ к $\overline{f}(\lambda)$ по формуле (11.229) называется *преобразованием Фурье*. Восстановление «оригинала» $f(x)$ по образу $\overline{f}(\lambda)$ с помощью формулы (11.230) называется *обратным преобразованием Фурье*.

Перефразируя основную теорему об интеграле Фурье, мы можем теперь утверждать, что справедлива

Теорема 11.12. *Если $f(x)$ абсолютно интегрируема на всей оси x и является кусочно-гладкой на каждом ее конечном отрезке, то:* 1) *образ Фурье функции, определяемый соотношением* (11.229), *существует и* 2) *справедлива формула обращения* (11.230), *которую следует понимать как предельное соотношение:*

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\lim_{l\to+\infty}\int_{-l}^{l}\overline{f}(\lambda)\,e^{i\lambda x}\,d\lambda.$$

Замечание. В силу замечания к основной теореме об интеграле Фурье, теорема 11.12 сохраняет силу и для любой абсолютно интегрируемой на всей оси x функции $f(x)$, кусочно-непрерывной на каждом конечном ее отрезке, если отношение $\left|\frac{f(x+\zeta)-f(x+0)}{\zeta}\right|$ остается ограниченным при каждом фиксированном x для всех достаточно малых $|\zeta|$. Преобразование Фурье для функций, заданных при $-\infty<x<+\infty$, находит широкое применение в математике и математической физике (см. Дополнение 4 к гл. 11).

Наряду с преобразованием Фурье, которое применяется для функций, заданных на всей бесконечной прямой $-\infty<x<+\infty$, широко используются также синус- и косинус-преобразования Фурье для функций, заданных на полупрямой $0 \leqslant x < +\infty$. Остановимся на этих преобразованиях несколько подробнее. Раскрывая в формуле (11.206) косинус разности, получим

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) \cos \lambda\xi \cos \lambda x \, d\xi + \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) \sin \lambda\xi \sin \lambda x \, d\xi, \tag{11.231}$$

причем оба интеграла сходятся, в силу абсолютной интегрируемости $f(x)$, на всей оси x. Если $f(\xi)$ — четная функция, то $f(\xi) \sin \lambda\xi$ нечетная, а $f(\xi) \cos \lambda\xi$ четная, поэтому второе слагаемое в правой части (11.231) обращается в нуль и мы получаем

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \cos \lambda x \, d\lambda \int_0^{+\infty} f(\xi) \cos \lambda\xi \, d\xi. \tag{11.232}$$

Если функция $f(x)$ нечетная, то аналогично находим, что

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \sin \lambda x \, d\lambda \int_0^{+\infty} f(\xi) \sin \lambda\xi \, d\xi. \tag{11.233}$$

В случае, когда x является точкой разрыва, нужно в левых частях равенств (11.231), (11.232) и (11.233) заменить $f(x)$ на $\frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}$.

Если $f(x)$ определена только на отрезке $0 \leqslant x < +\infty$, то ее можно продолжить на отрезок $-\infty < x < 0$ четно или нечетно, и тогда для $f(x)$ мы получим два различных представления:

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} \cos \lambda x \, d\lambda \left(\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} f(\xi) \cos \lambda\xi \, d\xi \right), \tag{11.234}$$

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} \sin \lambda x \, d\lambda \left(\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} f(\xi) \sin \lambda\xi \, d\xi \right). \tag{11.235}$$

Если $f(x)$, заданная на полуоси $0 \leqslant x < +\infty$, непрерывна в точке $x = 0$, то при четном продолжении она будет непрерывной в точке $x = 0$ и как функция, определенная на всей оси, поэтому равенство (11.234) будет выполняться также при $x = 0$. Напротив, равенство (11.235) будет выполняться при $x = 0$ только в том случае, если $f(0) = 0$, так как при нечетном продолжении функции всегда $\frac{f(+0)+f(-0)}{2}=0$. Равенство (11.234) можно разложить на два более простых равенства следующим образом. Положим по определению

$$f_c(\lambda)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty} f(\xi)\cos\lambda\xi\,d\xi. \tag{11.236}$$

Тогда, согласно (11.234), будет

$$f(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty} f_c(\lambda)\cos\lambda x\,d\lambda. \tag{11.237}$$

Функция $f_c(\lambda)$ называется *косинус-образом Фурье* функции $f(x)$, заданной на полуоси $0\leqslant x<+\infty$, а переход от $f(x)$ к $f_c(\lambda)$ по формуле (11.236) называется *косинус-преобразованием Фурье*. Восстановление «оригинала» $f(x)$ по косинус-образу $f_c(\lambda)$ с помощью формулы (11.237) называется *обратным косинус-преобразованием Фурье*.

Мы видим, что преобразования (11.236) и (11.237) являются взаимно обратными.

Аналогично вместо (11.235) можно написать

$$f_s(\lambda)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty} f(\xi)\sin\lambda\xi\,d\xi \tag{11.238}$$

и

$$f(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty} f_s(\lambda)\sin\lambda x\,d\lambda, \tag{11.239}$$

где $f_s(\lambda)$ называется *синус-образом Фурье функции* $f(x)$, заданной на полуоси $0\leqslant x<+\infty$; переход от $f(x)$ к $f_s(\lambda)$ по формуле (11 238) называется *синус-преобразованием Фурье*, а восстановление «оригинала» $f(x)$ по формуле (11.239) называется *обратным синус-преобразованием Фурье*.

Примеры.

1. $$f(x)=\begin{cases}1 & \text{при } 0\leqslant x<a,\\ \frac{1}{2} & \text{при } x=a,\\ 0 & \text{при } x>a.\end{cases}$$

$$f_c(\lambda)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^a\cos\lambda\xi\,d\xi=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{\sin\lambda a}{\lambda}.$$

Применяя формулу (11.237), получаем

$$\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{+\infty}\frac{\sin\lambda a\cos\lambda x}{\lambda}\,d\lambda=\begin{cases}1 & \text{при}\quad 0\leqslant x<a,\\ \frac{1}{2} & \text{при}\quad x=a,\\ 0 & \text{при}\quad x>a.\end{cases}$$

2. $f(x)=e^{-ax}$, $a>0$, $x\geqslant 0$. Интегрируя по частям, по формулам (11.236) и (11.238) находим, что

$$f_c(\lambda)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_0^{+\infty}e^{-a\xi}\cos\lambda\xi\,d\xi=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{a}{a^2+\lambda^2},$$

$$f_s(\lambda)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_0^{+\infty}e^{-a\xi}\sin\lambda\xi\,d\xi=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{\lambda}{a^2+\lambda^2}.$$

Применяя к полученным равенствам соответственно формулы (11.237) и (11.239), получим

$$\frac{2a}{\pi}\int\limits_0^{+\infty}\frac{\cos\lambda x}{a^2+\lambda^2}\,d\lambda=e^{-ax},\qquad x>0,$$

$$\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{+\infty}\frac{\lambda\sin\lambda x}{a^2+\lambda^2}\,d\lambda=e^{-ax},\qquad x>0.$$

Так, применяя косинус- и синус-преобразования Фурье, мы можем получить таблицу значений несобственных интегралов, зависящих от параметра. Однако основное назначение синус- и косинус-преобразований Фурье состоит в применениях к решению задач математической физики (см. Дополнение 3 к гл. 11).

6. Интеграл Фурье для функций нескольких независимых переменных. Остановимся сначала на случае двух независимых переменных. Пусть функция $f(x_1, x_2)$ определена при $-\infty<x_1<+\infty$, $-\infty<x_2<+\infty$ и абсолютно интегрируема от $-\infty$ до $+\infty$ по каждой из переменных x_1, x_2 при каждом фиксированном значении другой из них. Если, кроме того, $f(x_1, x_2)$ является непрерывной и кусочно-гладкой по каждой из переменных x_1, x_2 при каждом фиксированном значении другой из них, то к функции $f(x_1, x_2)$ по каждой из переменных x_1, x_2 в отдельности при любом фиксированном значении другой из них применима интегральная формула Фурье. Фиксировав x_2 и применяя формулу Фурье (11.206) по x_1, получим

$$f(x_1, x_2)=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{+\infty}d\lambda_1\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(\xi_1, x_2)\cos\lambda_1(x_1-\xi_1)\,d\xi_1. \qquad (11.240)$$

Фиксировав ξ_1 и применяя к $f(\xi_1, x_2)$ формулу Фурье (11.206) по x_2, получим

$$f(\xi_1, x_2) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{+\infty} d\lambda_2 \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(\xi_1, \xi_2)\cos\lambda_2(x_2-\xi_2)\,d\xi_2. \tag{11.241}$$

Подставляя (11.241) в (11.242), найдем

$$f(x_1, x_2) =$$

$$= \frac{1}{\pi^2}\int\limits_0^{+\infty} d\lambda_1 \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \cos\lambda_1(x_1-\xi_1)\,d\xi_1 \int\limits_0^{+\infty} d\lambda_2 \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(\xi_1, \xi_2)\cos\lambda_2(x_2-\xi_2)\,d\xi_2 =$$

$$= \frac{1}{\pi^2}\int\limits_0^{+\infty} d\lambda_1 \int\limits_{-\infty}^{+\infty} d\xi_1 \int\limits_0^{+\infty} d\lambda_2 \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(\xi_1, \xi_2)\cos\lambda_1(x_1-\xi_1)\cos\lambda_2(x_2-\xi_2)\,d\xi_2. \tag{11.242}$$

Если $f(x_1, x_2)$ четна как по x_1, так и по x_2, то формула (11.242) преобразуется к виду

$$f(x_1, x_2) = \frac{4}{\pi^2}\int\limits_0^{+\infty} \cos\lambda_1 x_1\,d\lambda_1 \int\limits_0^{+\infty} \cos\lambda_1\xi_1\,d\xi_1 \int\limits_0^{+\infty} \cos\lambda_2 x_2\,d\lambda_2 \times$$

$$\times \int\limits_0^{+\infty} f(\xi_1, \xi_2)\cos\lambda_2\xi_2\,d\xi_2. \tag{11.243}$$

Если же $f(x_1, x_2)$ нечетна как по x_1, так и по x_2, то

$$f(x_1, x_2) = \frac{4}{\pi^2}\int\limits_0^{+\infty} \sin\lambda_1 x_1\,d\lambda_1 \int\limits_0^{+\infty} \sin\lambda_1\xi_1\,d\xi_1 \int\limits_0^{+\infty} \sin\lambda_2 x_2\,d\lambda_2 \times$$

$$\times \int\limits_0^{+\infty} f(\xi_1, \xi_2)\sin\lambda_2\xi_2\,d\xi_2. \tag{11.244}$$

Переходя к комплексной форме интеграла Фурье, формулу (11.242) можно преобразовать к виду

$$f(x_1, x_2) =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^3}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} d\lambda_1 \int\limits_{-\infty}^{+\infty} d\xi_1 \int\limits_{-\infty}^{+\infty} d\lambda_2 \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(\xi_1, \xi_2)\,e^{i[\lambda_1(x_1-\xi_1)+\lambda_2(x_2-\xi_2)]}\,d\xi_2, \tag{11.245}$$

причем интегралы по λ_1 и по λ_2 следует понимать, вообще говоря, в смысле главного значения (см. § 3 гл. 9, а также п. 4 § 9 настоящей главы). Если возможно изменение порядка интегрирования по ξ_1 и λ_2, то формула (11.245) оказывается эквивалентной совокупности следующих двух формул:

$$\overline{\overline{f}}(\lambda_1, \lambda_2) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi_1 \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi_1, \xi_2) e^{-i[\lambda_1\xi_1+\lambda_2\xi_2]} d\xi_2, \tag{11.246}$$

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda_1 \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{\overline{f}}(\lambda_1, \lambda_2) e^{i[\lambda_1 x_1+\lambda_2 x_2]} d\lambda_2. \tag{11.247}$$

Первая из них называется прямым преобразованием Фурье функции $f(x_1, x_2)$, а вторая — обратным.

Аналогично обстоит дело и в случае функции трех и большего числа независимых переменных. Приведем соответствующие формулы для функции трех независимых переменных. Интегральная формула Фурье имеет вид

$$f(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{\pi^3} \int_0^{+\infty} d\lambda_1 \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi_1 \int_0^{+\infty} d\lambda_2 \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi_2 \int_0^{+\infty} d\lambda_3 \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \times$$
$$\times \cos\lambda_1(x_1-\xi_1)\cos\lambda_2(x_2-\xi_2)\cos\lambda_3(x_3-\xi_3)\, d\xi_3, \tag{11.248}$$

а в комплексной форме

$$f(x_1, x_2, x_3) =$$
$$= \frac{1}{(2\pi)^3} \int_0^{+\infty} d\lambda_1 \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi_1 \int_0^{+\infty} d\lambda_2 \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi_2 \int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda_3 \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \times$$
$$\times e^{i[\lambda_1(x_1-\xi_1)+\lambda_2(x_2-\xi_2)+\lambda_3(x_3-\xi_3)]} d\xi_3. \tag{11.249}$$

Если промежуточные интегрирования перестановочны, то формула (11.249) эквивалентна совокупности следующих двух формул:

$$\overline{\overline{\overline{f}}}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) =$$
$$= \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^3} \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi_1 \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi_2 \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi_1, \xi_2, \xi_3) e^{-i[\lambda_1\xi_1+\lambda_2\xi_2+\lambda_3\xi_3]} d\xi_3 \tag{11.250}$$

и

$$f(x_1, x_2, x_3) =$$
$$= \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^3} \int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda_1 \int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda_2 \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{\overline{\overline{f}}}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) e^{i[\lambda_1 x_1+\lambda_2 x_2+\lambda_3 x_3]} d\lambda_3. \tag{11.251}$$

Интегралы (11.247) и (11.251) понимаются, вообще говоря, в смысле главного значения.

Остановимся вкратце на обосновании формул (11.246) и (11.247). Аналогично обосновываются формулы (11.250) и (11.251). Справедлива следующая

Теорема 11.13. *Пусть функция $f(x_1, x_2)$ непрерывна на всей плоскости x_1x_2 и выполнены следующие условия:* 1) *интегралы*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x_1, x_2)|\, dx_1 \quad \text{и} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x_1, x_2)|\, dx_2 \qquad (11.252)$$

сходятся равномерно по x_2 и x_1 на каждом конечном отрезке $\underline{x}_2 \leqslant x_2 \leqslant \overline{x}_2$ и *$\underline{x}_1 \leqslant x_1 \leqslant \overline{x}_1$, соответственно,* 2) *повторный интеграл*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx_2 \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x_1, x_2)|\, dx_1 \qquad (11.253)$$

сходится; тогда если при всех достаточно малых $|\zeta|$:

3) $\left| \dfrac{f(x_1+\zeta, x_2) - f(x_1+0, x_2)}{\zeta} \right| \leqslant C_1$ *при каждом фиксированном x_1 и всех x_2,*

4) $\left| \dfrac{f(x_1, x_2+\zeta) - f(x_1, x_2+0)}{\zeta} \right| \leqslant C_2(x_1)$ *при каждом фиксированном x_2 и всех x_1, причем* $\int_{-\infty}^{+\infty} C_2(x_1)\, dx_1$ сходится, то существует образ Фурье функции $f(x_1, x_2)$

$$\overline{\overline{f}}(\lambda_1, \lambda_2) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi_1 \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi_1, \xi_2)\, e^{-i(\lambda_1\xi_1+\lambda_2\xi_2)}\, d\xi_2 \qquad (11.254)$$

и справедлива формула обращения

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda_1 \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{\overline{f}}(\lambda_1, \lambda_2)\, e^{i[\lambda_1x_1+\lambda_2x_2]}\, d\lambda_2, \qquad (11.255)$$

понимаемая в следующем смысле:

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi} \lim_{l_1,\, l_2 \to +\infty} \int_{-l_1}^{l_1} d\lambda_1 \int_{-l_2}^{l_2} \overline{\overline{f}}(\lambda_1, \lambda_2)\, e^{i(\lambda_1x_1+\lambda_2x_2)}\, d\lambda_2, \qquad (11.256)$$

где предельный переход осуществляется сначала по l_2, а затем по l_1.

Доказательство. Образ Фурье функции $f(x_1, x_2)$ по аргументу x_1

$$\overline{f}(\lambda_1, x_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(\xi_1, x_2)\, e^{-i\lambda_1\xi_1}\, d\xi_1 \qquad (11.257)$$

существует, в силу сходимости первого интеграла (11.252), и является непрерывной функцией x_2, в силу равномерной сходимости, вытекающей из равномерной сходимости первого интеграла (11.252). Интеграл

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |\overline{f}(\lambda_1, x_2)|\, dx_2 = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} dx_2 \left| \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(\xi_1, x_2)\, e^{i\lambda_1\xi_1}\, d\xi_1 \right| \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \qquad (11.258)$$

сходится, в силу сходимости интеграла (11.253).

В силу условий 1) и 3) и непрерывности функции $f(x_1, x_2)$ по x_1 и в силу замечания к основной теореме о преобразованиях Фурье (см. теорему 11.10 п. 4 § 6), справедлива формула обращения

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \overline{f}(\lambda_1, x_2)\, e^{i\lambda_1 x_1}\, d\lambda_1 =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{l_1 \to +\infty} \int\limits_{-l_1}^{l_1} \overline{f}(\lambda_1, x_2)\, e^{i\lambda_1 x_1}\, d\lambda_1. \qquad (11.259)$$

В силу условия 4) и равенства (11.257), имеем

$$|\overline{f}(\lambda_1, x_2 + \zeta) - \overline{f}(\lambda_1, x_2 + 0)| \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f(\xi_1, x_2 + \zeta) - f(\xi_1, x_2 + 0)|\, d\xi_1 \leqslant |\zeta| \int\limits_{-\infty}^{+\infty} C_2(\xi_1)\, d\xi_1,$$

т. е.

$$\left| \frac{\overline{f}(\lambda_1, x_2 + \zeta) - \overline{f}(\lambda_1, x_2 + 0)}{\zeta} \right| < \int\limits_{-\infty}^{+\infty} C_2(\xi_1)\, d\xi_1. \qquad (11.260)$$

В силу сходимости интеграла (11.258), существует двукратный образ Фурье функции $f(x_1, x_2)$:

$$\overline{\overline{f}}(\lambda_1, \lambda_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \overline{f}(\lambda_1, \xi_2)\, e^{-i\lambda_2\xi_2}\, d\xi_2 =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} d\xi_2 \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(\xi_1, \xi_1)\, e^{-i(\lambda_1\xi_1 + \lambda_2\xi_2)}\, d\xi_1, \qquad (11.261)$$

причем, в силу непрерывности $\bar{f}(\lambda_1, x_2)$ по x_2 и выполнения условия (11.260), справедлива формула обращения

$$\bar{f}(\lambda_1, x_2)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\bar{\bar{f}}(\lambda_1, \lambda_2)\, e^{i\lambda_2 x_2}\, d\lambda_2=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\lim_{l_2\to+\infty}\int_{-l_2}^{l_2}\bar{\bar{f}}(\lambda_1, \lambda_2)\, e^{i\lambda_2 x_2}\, dx_2. \quad (11.262)$$

Подставляя (11.262) в (11.259), получим

$$f(x_1, x_2)=\frac{1}{2\pi}\lim_{l_1\to+\infty}\int_{-l_1}^{l_1} e^{i\lambda_1 x_1}\, d\lambda_1\left\{\lim_{l_2\to+\infty}\int_{-l_2}^{l_2}\bar{\bar{f}}(\lambda_1, \lambda_2)\, e^{i\lambda_2 x_2}\, d\lambda_2\right\}, \quad (11.263)$$

или иначе

$$f(x_1, x_2)=\frac{1}{2\pi}\lim_{l_1, l_2\to+\infty}\int_{-l_1}^{l_1} d\lambda_1\int_{-l_2}^{l_2}\bar{\bar{f}}(\lambda_1, \lambda_2)\, e^{i(\lambda_1 x_1+\lambda_2 x_2)}\, d\lambda_2, \quad (11.264)$$

где предельный переход совершается сначала по l_2, а затем по l_1. Теорема доказана.

В случае функции трех переменных $f(x_1, x_2, x_3)$ формулы прямого и обратного преобразований Фурье запишутся следующим образом:

$$\bar{\bar{\bar{f}}}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)=\frac{1}{(\sqrt{2\pi})^3}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi_1, \xi_2, \xi_3)\times$$

$$\times e^{-i(\lambda_1\xi_1+\lambda_2\xi_2+\lambda_3\xi_3)}\, d\xi_1\, d\xi_2\, d\xi_3 \quad (11.265)$$

и

$$f(x_1, x_2, x_3)=\frac{1}{(\sqrt{2\pi})^3}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\bar{\bar{\bar{f}}}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)\times$$

$$\times e^{i(\lambda_1 x_1+\lambda_2 x_2+\lambda_3 x_3)}\, d\lambda_1\, d\lambda_2\, d\lambda_3. \quad (11.266)$$

Если подставить (11.265) в (11.266), то получится равенство

$$f(x_1, x_2, x_3)=\frac{1}{(2\pi)^3}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi_1, \xi_2, \xi_3)\times$$

$$\times e^{i[\lambda_1(x_1-\xi_1)+\lambda_2(x_2-\xi_2)+\lambda_3(x_3-\xi_3)]}\, d\xi_1\, d\xi_2\, d\xi_3\, d\lambda_1\, d\lambda_2\, d\lambda_3. \quad (11.267)$$

Не составляет труда выписать соответствующие формулы и для функции N переменных.

Для обоснования системы равенства (11.265), (11.266), кроме требований к сходимости интегралов, аналогичных рассмотренным в случае функций двух переменных, достаточно потребовать, чтобы при всех достаточно малых $|\zeta|$ выполнялись неравенства:

1) $$\left|\frac{f(x_1+\zeta_1, x_2, x_3)-f(x_1+0, x_2, x_3)}{\zeta_1}\right| \leqslant C_1$$

при каждом фиксированном x_1 и всех x_2 и x_3,

2) $$\left|\frac{f(x_1, x_2+\zeta_2, x_3)-f(x_1, x_2+0, x_3)}{\zeta_2}\right| \leqslant C_2(x_1)$$

при каждом фиксированном x_2 и всех x_1 и x_3,

3) $$\left|\frac{f(x_1, x_2, x_3+\zeta_3)-f(x_1, x_2, x_3+0)}{\zeta_3}\right| \leqslant C_3(x_1, x_2)$$

при каждом фиксированном x_3 и всех x_1 и x_2, причем интегралы $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} C_2(x_1)\,dx_1$ и $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} dx_2 \int\limits_{-\infty}^{+\infty} C_3(x_1, x_2)\,dx_1$ должны сходиться. Тогда существует трехкратный образ Фурье (11.265) функции $f(x_1, x_2, x_3)$ и имеет место равенство (11.265), понимаемое в следующем смысле:

$$f(x_1, x_2, x_3)=\frac{1}{(\sqrt{2\pi})^3}\lim_{l_1\to+\infty}\int\limits_{-l_1}^{l_1} d\lambda_1 \times$$
$$\times\left\{\lim_{l_2\to+\infty}\int\limits_{-l_2}^{l_2} d\lambda_2\left\{\lim_{l_3\to+\infty}\int\limits_{-l_3}^{l_3}\overset{\equiv}{f}(\lambda_1\lambda_2\lambda_3)\,e^{i[\lambda_1x_1+\lambda_2x_2+\lambda_3x_3]}\,d\lambda_3\right\}\right\}, \qquad (11.268)$$

где предельный переход осуществляется сначала по l_3, затем по l_2 и, наконец, по l_1.

Случай N независимых переменных рассматривается аналогично.

ДОПОЛНЕНИЕ 1 К ГЛ. 11

О ПОЛИНОМАХ ЛЕЖАНДРА

Докажем, что полиномы Лежандра

$$P_0(x)\equiv 1, \quad P_n(x)=\frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}[(x^2-1)^n], \quad n=1, 2, \ldots, \qquad (1)$$

ортогональны на отрезке $[-1, 1]$, т. е. что

$$\int\limits_{-1}^{+1} P_n(x)\,P_m(x)\,dx=0 \quad \text{при} \quad m\neq n. \qquad (2)$$