Для обоснования системы равенства (11.265), (11.266), кроме требований к сходимости интегралов, аналогичных рассмотренным в случае функций двух переменных, достаточно потребовать, чтобы при всех достаточно малых $|\zeta|$ выполнялись неравенства:

1) $$\left|\frac{f(x_1+\zeta_1, x_2, x_3)-f(x_1+0, x_2, x_3)}{\zeta_1}\right| \leqslant C_1$$

при каждом фиксированном x_1 и всех x_2 и x_3,

2) $$\left|\frac{f(x_1, x_2+\zeta_2, x_3)-f(x_1, x_2+0, x_3)}{\zeta_2}\right| \leqslant C_2(x_1)$$

при каждом фиксированном x_2 и всех x_1 и x_3,

3) $$\left|\frac{f(x_1, x_2, x_3+\zeta_3)-f(x_1, x_2, x_3+0)}{\zeta_3}\right| \leqslant C_3(x_1, x_2)$$

при каждом фиксированном x_3 и всех x_1 и x_2, причем интегралы $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} C_2(x_1)\,dx_1$ и $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} dx_2 \int\limits_{-\infty}^{+\infty} C_3(x_1, x_2)\,dx_1$ должны сходиться. Тогда существует трехкратный образ Фурье (11.265) функции $f(x_1, x_2, x_3)$ и имеет место равенство (11.265), понимаемое в следующем смысле:

$$f(x_1, x_2, x_3)=\frac{1}{(\sqrt{2\pi})^3}\lim_{l_1\to+\infty}\int\limits_{-l_1}^{l_1} d\lambda_1 \times$$
$$\times\left\{\lim_{l_2\to+\infty}\int\limits_{-l_2}^{l_2} d\lambda_2\left\{\lim_{l_3\to+\infty}\int\limits_{-l_3}^{l_3}\overset{\equiv}{f}(\lambda_1\lambda_2\lambda_3)\,e^{i[\lambda_1x_1+\lambda_2x_2+\lambda_3x_3]}\,d\lambda_3\right\}\right\}, \quad (11.268)$$

где предельный переход осуществляется сначала по l_3, затем по l_2 и, наконец, по l_1.

Случай N независимых переменных рассматривается аналогично.

ДОПОЛНЕНИЕ 1 К ГЛ. 11

О ПОЛИНОМАХ ЛЕЖАНДРА

Докажем, что полиномы Лежандра

$$P_0(x)\equiv 1, \quad P_n(x)=\frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}[(x^2-1)^n], \quad n=1, 2, \ldots, \quad (1)$$

ортогональны на отрезке $[-1, 1]$, т. е. что

$$\int\limits_{-1}^{+1} P_n(x)P_m(x)\,dx=0 \quad \text{при} \quad m\neq n. \quad (2)$$

Очевидно, достаточно доказать, что равенство (2) выполняется при $m < n$ (ввиду равноправия m и n), а для этого в свою очередь достаточно доказать, что

$$\int_{-1}^{+1} P_n(x)\, x^m\, dx = 0 \quad \text{при} \quad m < n, \tag{3}$$

где m — целое и неотрицательное. Полагая

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n u_n(x)}{dx^n}, \quad \text{где} \quad u_n(x) = [x^2 - 1]^n,$$

получим, что

$$\int_{-1}^{+1} P_n(x)\, x^m\, dx = \frac{1}{2^n n!} \int_{-1}^{+1} \frac{d^n u_n(x)}{dx^n} x^m\, dx. \tag{4}$$

Выполняя в последнем интеграле интегрирование по частям до исчезновения x^m и учитывая, что

$$u_n(\pm 1) = u_n'(\pm 1) = \ldots = u_n^{(n-1)}(\pm 1) = 0,$$

получим равенство (3). Этим доказательство ортогональности полиномов Лежандра на отрезке $[-1, 1]$ завершено.

Вычислим теперь норму n-го полинома Лежандра. Для этого снова применим интегрирование по частям в интеграле

$$\|P_n(x)\|^2 = \frac{1}{2^n n!} \int_{-1}^{+1} \left[\frac{d^n u_n(x)}{dx^n}\right]^2 dx. \tag{5}$$

Интегрируя по частям n раз и учитывая, что $u_n(x)$ имеет степень $2n$ и $u_n(\pm 1) = u_n'(\pm 1) = \ldots = u_n^{(n-1)}(\pm 1) = 0$, получим

$$\int_{-1}^{+1} \frac{d^n u_n(x)}{dx^n} \frac{d^n u_n(x)}{dx^n} dx = -\int_{-1}^{+1} \frac{d^{n-1} u_n(x)}{dx^{n-1}} \frac{d^{n+1} u_n(x)}{dx^{n+1}} dx =$$

$$= (-1)^2 \int_{-1}^{+1} \frac{d^{n-2} u_n(x)}{dx^{n-2}} \frac{d^{n+2} u_n(x)}{dx^{n+2}} dx = \ldots$$

$$\ldots = (-1)^n \int_{-1}^{+1} u_n(x) \frac{d^{2n} u_n(x)}{dx^{2n}} dx = (2n)! \int_{-1}^{+1} (1-x)^n (1+x)^n dx. \tag{6}$$

Но

$$\int_{-1}^{+1}(1-x)^n(1+x)^n\,dx=\frac{n}{n+1}\int_{-1}^{+1}(1-x)^{n-1}(1+x)^{n+1}\,dx=\ldots$$

$$\ldots=\frac{n(n-1)\ldots1}{(n+1)(n+2)\ldots(2n)}\int_{-1}^{+1}(1+x)^{2n}\,dx=\frac{(n!)^2}{(2n)!\,(2n+1)}\,2^{2n+1}. \quad (7)$$

Подставляя (7) в (6) и (6) в (5), получим

$$\|P_n(x)\|^2=\int_{-1}^{+1}[P_n(x)]^2\,dx=\frac{2}{2n+1}. \quad (8)$$

Следовательно, норма n-го полинома Лежандра равна

$$\|P_n(x)\|=\sqrt{\frac{2}{2n+1}}. \quad (9)$$

Заметим, что степень n-го полинома Лежандра $P_n(x)$ равна n при $n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$ Так как полиномы Лежандра $P_0(x)$, $P_1(x)$, ..., $P_n(x)$ ортогональны на отрезке $[-1,\ 1]$, то они линейно независимы, а следовательно, образуют базис пространства всех алгебраических многочленов степени $\leqslant n$; отсюда вытекает, что любой многочлен степени $\leqslant n$ может быть представлен в виде линейной комбинации многочленов Лежандра $P_0(x)$, $P_1(x)$, ..., $P_n(x)$ и, в частности,

$$x^n=\alpha_{0n}P_0(x)+\alpha_{1n}P_1(x)+\ldots+\alpha_{nn}P_n(x)$$

(см. Дополнение 2 к гл. 11).

ДОПОЛНЕНИЕ 2 К ГЛ. 11

ОРТОГОНАЛЬНОСТЬ С ВЕСОМ И ОРТОГОНАЛИЗАЦИЯ

Обобщением введенного ранее понятия ортогональности функций является понятие *ортогональности функций с весом*. Пусть $p(x)$ — неотрицательная функция, не равная тождественно нулю и непрерывная на открытом интервале $(a,\ b)$, причем интеграл

$$\int_a^b p(x)\,dx \quad (1)$$