Но

$$\int_{-1}^{+1} (1-x)^n (1+x)^n \, dx = \frac{n}{n+1} \int_{-1}^{+1} (1-x)^{n-1} (1+x)^{n+1} \, dx = \ldots$$

$$\ldots = \frac{n(n-1)\ldots 1}{(n+1)(n+2)\ldots(2n)} \int_{-1}^{+1} (1+x)^{2n} \, dx = \frac{(n!)^2}{(2n)!\,(2n+1)} \, 2^{2n+1}. \quad (7)$$

Подставляя (7) в (6) и (6) в (5), получим

$$\|P_n(x)\|^2 = \int_{-1}^{+1} [P_n(x)]^2 \, dx = \frac{2}{2n+1}. \quad (8)$$

Следовательно, норма n-го полинома Лежандра равна

$$\|P_n(x)\| = \sqrt{\frac{2}{2n+1}}. \quad (9)$$

Заметим, что степень n-го полинома Лежандра $P_n(x)$ равна n при $n = 0, 1, 2, \ldots$ Так как полиномы Лежандра $P_0(x), P_1(x), \ldots$ $\ldots, P_n(x)$ ортогональны на отрезке $[-1, 1]$, то они линейно независимы, а следовательно, образуют базис пространства всех алгебраических многочленов степени $\leqslant n$; отсюда вытекает, что любой многочлен степени $\leqslant n$ может быть представлен в виде линейной комбинации многочленов Лежандра $P_0(x), P_1(x), \ldots, P_n(x)$ и, в частности,

$$x^n = \alpha_{0n} P_0(x) + \alpha_{1n} P_1(x) + \ldots + \alpha_{nn} P_n(x)$$

(см. Дополнение 2 к гл. 11).

ДОПОЛНЕНИЕ 2 К ГЛ. 11

ОРТОГОНАЛЬНОСТЬ С ВЕСОМ И ОРТОГОНАЛИЗАЦИЯ

Обобщением введенного ранее понятия ортогональности функций является понятие *ортогональности функций с весом*. Пусть $p(x)$ — неотрицательная функция, не равная тождественно нулю и непрерывная на открытом интервале (a, b), причем интеграл

$$\int_a^b p(x) \, dx \quad (1)$$

существует (как собственный или как несобственный) и положителен *). Будем называть функцию $p(x)$ *весом.*

Пусть для функции $f(x)$, заданной на $[a, b]$, интегралы

$$\int_a^b p(x) f(x)\,dx \quad \text{и} \quad \int_a^b p(x)[f(x)]^2\,dx \tag{2}$$

(собственные или несобственные) существуют; тогда функция называется *интегрируемой с квадратом с весом* $p(x)$ на $[a, b]$. В частности, если $p(x) \equiv 1$, то мы приходим к сформулированному ранее (стр. 479, соотношение (11.93)) определению интегрируемости с квадратом.

Пусть функции системы

$$\varphi_1(x),\ \varphi_2(x),\ \ldots,\ \varphi_n(x),\ \ldots, \tag{3}$$

заданной на $[a, b]$, также интегрируемы с квадратом с весом $p(x)$ на $[a, b]$, т. е. интегралы

$$\int_a^b p(x)\varphi_n(x)\,dx \quad \text{и} \quad \int_a^b p(x)[\varphi_n(x)]^2\,dx, \qquad n = 1, 2, \ldots \tag{4}$$

(собственные или несобственные), существуют. Если интервал $[a, b]$ конечен, то из существования интегралов (2) и (4) и элементарных неравенств

$$\begin{aligned} |f(x)\varphi_n(x)| &\leqslant \frac{1}{2}\left[f^2(x) + \varphi_n^2(x)\right], \\ |\varphi_n(x)\varphi_m(x)| &\leqslant \frac{1}{2}\left[\varphi_n^2(x) + \varphi_m^2(x)\right] \end{aligned} \tag{5}$$

следует существование интегралов

$$\int_a^b p(x) f(x)\varphi_n(x)\,dx \quad \text{и} \quad \int_a^b p(x)\varphi_n(x)\varphi_m(x)\,dx. \tag{6}$$

Если же интервал $[a, b]$ бесконечен, то существование интегралов (6) будем предполагать дополнительно.

Мы будем предполагать, далее, что каждая из рассматриваемых функций непрерывна на $[a, b]$ всюду, кроме, может быть, конечного числа точек, которые могут быть, в частности, особыми точками функций.

---

*) Интеграл при сформулированных условиях может оказаться несобственным, если функция $p(x)$ не ограничена при $x \to a+0$ или $x \to b-0$. Такого типа особенности у $p(x)$ встречаются в случае некоторых важных классов специальных функций (см., например, полиномы Чебышева первого рода в конце этого Дополнения).

Функции $\varphi_n(x)$ и $\varphi_m(x)$ называются *ортогональными с весом* $p(x)$ на отрезке $[a, b]$, если

$$\int_a^b p(x)\varphi_n(x)\varphi_m(x)\,dx = 0 \quad \text{при} \quad m \neq n. \tag{7}$$

Система функций 2), *интегрируемых с квадратом с весом* $p(x)$ *на* $[a, b]$, *называется ортогональной с весом* $p(x)$ *на* $[a, b]$, *если*

$$\int_a^b p(x)\varphi_n(x)\varphi_m(x)\,dx = 0 \quad \text{при} \quad n \neq m \tag{8}$$

и

$$\int_a^b p(x)\varphi_n^2(x)\,dx > 0 \quad \text{при} \quad n = 1, 2, \ldots \tag{9}$$

Обычная ортогональность функций является частным случаем ортогональности с весом, когда вес $p(x) \equiv 1$.

Пусть функция $f(x)$ интегрируема с квадратом с весом $p(x)$ на $[a, b]$, а система (3) ортогональна с весом $p(x)$ на $[a, b]$.

Если коэффициенты ряда

$$f(x) \sim c_1\varphi_1(x) + c_2\varphi_2(x) + \ldots + c_n\varphi_n(x), \ldots \tag{А}$$

определяются по формулам

$$c_n = \frac{\int_a^b p(x) f(x)\varphi_n(x)\,dx}{\int_a^b p(x)\varphi_n^2(x)\,dx}, \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{Б}$$

то он называется рядом Фурье для функции $f(x)$ *по системе* (3).

Мы скажем, что *ряд* (А) *сходится к* $f(x)$ *в среднем с весом* $p(x)$ *на* $[a, b]$, *если*

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b p(x)\left[f(x) - \sum_{k=1}^{m} c_k\varphi_k(x)\right]^2 dx = 0. \tag{В}$$

Если ряд (А) сходится равномерно или в среднем с весом $p(x)$ к функции $f(x)$ на $[a, b]$, то его коэффициенты однозначно определяются по формулам (Б). Действительно, при сформулированных условиях, в силу неравенства Коши — Буняковского, имеем

$$\left|\int_a^b p(x)\varphi_n(x)\left[f(x)-\sum_{k=1}^m c_k\varphi_k(x)\right]dx\right| \leqslant$$

$$\leqslant\left(\int_a^b p(x)\varphi_n^2(x)\,dx\right)^{1/2}\left(\int_a^b p(x)\left[f(x)-\sum_{k=1}^m c_k\varphi_k(x)\right]^2 dx\right)^{1/2}\to 0$$

при $m\to+\infty$ и любом фиксированном n. С другой стороны, в силу ортогональности с весом $p(x)$ функций $\varphi_i(x)$ на $[a, b]$ при $m \geqslant n$, имеем

$$\int_a^b p(x)\varphi_n(x)\left[f(x)-\sum_{k=1}^m c_k\varphi_k(x)\right]dx =$$

$$= \int_a^b p(x)f(x)\varphi_n(x)\,dx - c_n\int_a^b p(x)\varphi_n^2(x)\,dx = \text{const}$$

при фиксированном n. Следовательно,

$$\int_a^b p(x)f(x)\varphi_n(x)\,dx - c_n\int_a^b p(x)\varphi_n^2(x)\,dx = 0,$$

откуда и следует (Б).

Понятие полноты и замкнутости (см. § 6 гл. 11), а также основные связанные с ними теоремы (теоремы 11.4—11.7 § 5, 6 гл. 11) легко обобщаются на случай систем, ортогональных с весом.

Разложение функций в ряд по системам, ортогональным с весом, находит широкое применение в математической физике. Из систем, ортогональных с весом, назовем прежде всего различные системы специальных полиномов, о которых речь будет идти ниже, а также системы собственных функций круглой и кольцевой мембран, шара и шарового слоя (см. вып. 4).

Разложение функций в ряд по системам, ортогональным с весом (в частности, с весом $p(x)\equiv 1$), весьма удобно в силу простоты определения коэффициентов разложения. Ортогональные с весом системы можно строить, отправляясь от линейно независимых систем, путем так называемой *ортогонализации*.

Функции *) $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x)$ *называют* ***линейно зависимыми*** *на* $[a, b]$, *если существуют такие константы* $C_1, C_2, \ldots, C_n$, *не все равные нулю, что линейная комбинация*

$$C_1\varphi_1(x)+C_2\varphi_2(x)+\ldots+C_n\varphi_n(x)=0 \qquad (10)$$

---

*) Напомним, что каждую из рассматриваемых функций мы считаем непрерывной всюду на $[a, b]$, кроме, быть может, конечного числа точек.

тождественно равна нулю на $[a, b]$ *всюду, кроме, быть может, точек разрыва функций* $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x)$.

Если же из тождественного в указанном смысле равенства (10) *следует, что все коэффициенты* C_i *линейной комбинации равны нулю, то функции* $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x)$ *называются линейно независимыми на* $[a, b]$.

Если система функций $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x)$ *ортогональна на* $[a, b]$ *с весом* $p(x)$, *то функции системы линейно независимы на* $[a, b]$. Действительно, пусть

$$C_1\varphi_1(x) + C_2\varphi_2(x) + \ldots + C_n\varphi_n(x) \equiv 0 \text{ на } [a, b] \tag{11}$$

всюду, кроме, быть может, конечного числа точек. Умножим равенство (11) на $p(x)\varphi_m(x)$ и проинтегрируем по x от a до b, учитывая ортогональность функций с весом $p(x)$ на $[a, b]$. Получим, что

$$C_m \int_a^b p(x)\varphi_m^2(x)\,dx = 0, \tag{12}$$

а так как интеграл $\neq 0$, то $C_m = 0$. В силу произвольности m, получаем, что $C_1 = C_2 = \ldots = C_n = 0$.

Отправляясь от линейно независимой системы $\psi_1(x), \psi_2(x), \ldots$ $\ldots, \psi_n(x)$, легко построить ортогональную систему (с весом $p(x)$) $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x)$ такую, что

$$\left.\begin{aligned}
&\varphi_1(x) = \psi_1(x),\\
&\varphi_2(x) = \psi_2(x) + \lambda_{21}\psi_1(x),\\
&\varphi_3(x) = \psi_3(x) + \lambda_{31}\psi_1(x) + \lambda_{32}\psi_2(x),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\varphi_n(x) = \psi_n(x) + \lambda_{n1}\psi_1(x) + \lambda_{n2}\psi_2(x) + \ldots + \lambda_{nn-1}\psi_{n-1}(x).
\end{aligned}\right\} \tag{13}$$

Из соотношений (13) следует, что при каждом $k = 1, 2, \ldots, n$ функция $\varphi_k(x)$ является линейной комбинацией $\psi_1(x), \ldots, \psi_k(x)$ с коэффициентом 1 при $\psi_k(x)$ и, следовательно, не может быть равной тождественно нулю всюду, кроме точек разрыва функций $\psi_1(x), \ldots, \psi_k(x)$, так как иначе функции $\psi_1(x), \ldots, \psi_k(x)$ были бы линейно зависимыми на $[a, b]$, что противоречит условию. Следовательно, каждая функция $\varphi_k(x)$ отлична от нуля в некоторой точке своей непрерывности, поэтому

$$\int_a^b p(x)\varphi_k^2(x)\,dx > 0, \qquad k = 1, 2, \ldots, n. \tag{14}$$

(Из соотношений (13) следует также, что $\psi_k(x)$ при каждом $k = 1, 2, \ldots, n$ является линейной комбинацией $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_k(x)$ с коэффициентами 1 при $\varphi_k(x)$.)

Числа λ_{ij}, входящие в (13), однозначно определяются из условий ортогональности функций $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, ..., $\varphi_n(x)$. Это можно доказать по индукции. Умножая обе части второго из равенств (13) на $p(x)\varphi_1(x)$ и интегрируя по x от a до b, получим

$$\int_a^b p(x)\varphi_1(x)\varphi_2(x)\,dx = \int_a^b p(x)\varphi_1(x)\psi_2(x)\,dx + \lambda_{21}\int_a^b p(x)\varphi_1^2(x)\,dx = 0.$$

Следовательно,

$$\lambda_{21} = -\frac{\int_a^b p(x)\varphi_1(x)\psi_2(x)\,dx}{\int_a^b p(x)\varphi_1^2(x)\,dx}.$$

Пусть λ_{ij} при $i \leqslant k-1$ уже вычислены и функции $\varphi_1(x)$, ..., $\varphi_{k-1}(x)$ попарно ортогональны на $[a, b]$ с весом $p(x)$. Тогда из соотношений ортогональности

$$0 = (\varphi_k, \varphi_j) = (\psi_k, \varphi_j) + \sum_{i=1}^{k-1}\lambda_{ki}(\varphi_i, \varphi_j) = (\psi_k, \varphi_j) + \lambda_{kj}(\varphi_j, \varphi_j)$$

при $j = 1, 2, \ldots, k-1$ находим, что

$$\lambda_{kj} = -\frac{(\psi_k, \varphi_j)}{(\varphi_j, \varphi_j)}, \qquad j = 1, 2, \ldots, k-1,$$

где

$$(\psi_k, \varphi_j) = \int_a^b p(x)\psi_k(x)\varphi_j(x)\,dx, \quad (\varphi_j, \varphi_j) = \int_a^b p(x)\varphi_j^2(x)\,dx.$$

После этого уже все функции $\varphi_1(x)$, ..., $\varphi_k(x)$ определены и попарно ортогональны на $[a, b]$ с весом $p(x)$. Этим доказательство утверждения закончено.

Описанный процесс построения по системе линейно независимых функций $\psi_1(x)$, ..., $\psi_n(x)$ ортогональной системы $\varphi_1(x)$, ..., $\varphi_n(x)$, связанной с ней соотношениями (13), называется *ортогонализацией*.

Ортогонализуя систему целых неотрицательных степеней x

$$1,\ x,\ x^2,\ \ldots,\ x^n,\ \ldots \tag{15}$$

на отрезке $[-1, 1]$ с весом $p(x) \equiv 1$, мы получим систему ортогональных на отрезке $[-1, 1]$ многочленов, которые лишь постоянными множителями отличаются от многочленов Лежандра, определяемых по формуле Родрига

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} [(x^2 - 1)^n], \qquad n = 1, 2, \ldots; \quad P_0(x) \equiv 1. \tag{16}$$

Ортогонализуя ту же систему степеней (15) на отрезке $[-1, 1]$ с весом $p(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, получим систему полиномов Чебышева первого рода; если же взять вес $p(x) = \sqrt{1-x^2}$, то получаются полиномы Чебышева второго рода.

Ортогонализуя систему степеней (15) на полупрямой $[0, +\infty)$ с весом $p(x) = e^{-x}$, получим систему полиномов Чебышева — Лагерра. Если же взять $p(x) = x^s e^{-x}$, где $s > -1$, то при ортогонализации системы (15) на той же полуоси $[0, +\infty)$ получатся обобщенные полиномы Чебышева — Лагерра.

Наконец, ортогонализуя систему степеней (15) на всей прямой $-\infty < x < +\infty$ с весом $p(x) = e^{-x^2}$, получим систему полиномов Чебышева — Эрмита. Для всех специальных полиномов существуют удобные общие формулы, подобные формуле Родрига (16) (см. вып. 4).

Перечисленные системы ортогональных полиномов находят важные применения в математической физике (см. вып. 4).

ДОПОЛНЕНИЕ 3 К ГЛ. II

ФУНКЦИОНАЛЬНОЕ ПРОСТРАНСТВО И ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ АНАЛОГИИ

Множество функций $Q[a, b]$, определенное в § 6, можно рассматривать как *функциональное пространство*, считая, что две функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ из $Q[a, b]$ представляют один и тот же элемент или «вектор» пространства, если они могут отличаться самое большее в конечном числе точек на $[a, b]$. Элементы пространства $Q[a, b]$, определяемые функциями $\varphi(x)$, $\psi(x)$, $\eta(x)$, ... будем обозначать, опуская аргумент x, через φ, ψ, η, ...

Определив сумму элементов $\varphi + \psi$ и произведение $\lambda\varphi$ элемента φ на число λ соответственно через сумму $\varphi(x) + \psi(x)$ и произведение на число λ функций $\varphi(x)$, представляющих эти элементы, получим, что $Q[a, b]$ относительно этих операций ведет себя так же, как множество всех векторов трехмерного евклидова пространства относительно операций сложения векторов и умножения их на числа. Нулевой элемент 0 пространства представляется любой функцией из $Q[a, b]$, которая может отличаться от нуля самое большее в конечном числе точек на $[a, b]$.