ными множителями отличаются от многочленов Лежандра, определяемых по формуле Родрига

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} [(x^2-1)^n], \qquad n = 1, 2, \ldots; \quad P_0(x) \equiv 1. \tag{16}$$

Ортогонализуя ту же систему степеней (15) на отрезке $[-1, 1]$ с весом $p(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, получим систему полиномов Чебышева первого рода; если же взять вес $p(x) = \sqrt{1-x^2}$, то получаются полиномы Чебышева второго рода.

Ортогонализуя систему степеней (15) на полупрямой $[0, +\infty)$ с весом $p(x) = e^{-x}$, получим систему полиномов Чебышева — Лагерра. Если же взять $p(x) = x^s e^{-x}$, где $s > -1$, то при ортогонализации системы (15) на той же полуоси $[0, +\infty)$ получатся обобщенные полиномы Чебышева — Лагерра.

Наконец, ортогонализуя систему степеней (15) на всей прямой $-\infty < x < +\infty$ с весом $p(x) = e^{-x^2}$, получим систему полиномов Чебышева — Эрмита. Для всех специальных полиномов существуют удобные общие формулы, подобные формуле Родрига (16) (см. вып. 4).

Перечисленные системы ортогональных полиномов находят важные применения в математической физике (см. вып. 4).

ДОПОЛНЕНИЕ 3 К ГЛ. II

ФУНКЦИОНАЛЬНОЕ ПРОСТРАНСТВО И ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ АНАЛОГИИ

Множество функций $Q[a, b]$, определенное в § 6, можно рассматривать как *функциональное пространство*, считая, что две функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ из $Q[a, b]$ представляют один и тот же элемент или «вектор» пространства, если они могут отличаться самое большее в конечном числе точек на $[a, b]$. Элементы пространства $Q[a, b]$, определяемые функциями $\varphi(x)$, $\psi(x)$, $\eta(x)$, ... будем обозначать, опуская аргумент x, через φ, ψ, η, ...

Определив сумму элементов $\varphi + \psi$ и произведение $\lambda\varphi$ элемента φ на число λ соответственно через сумму $\varphi(x) + \psi(x)$ и произведение на число λ функций $\varphi(x)$, представляющих эти элементы, получим, что $Q[a, b]$ относительно этих операций ведет себя так же, как множество всех векторов трехмерного евклидова пространства относительно операций сложения векторов и умножения их на числа. Нулевой элемент 0 пространства представляется любой функцией из $Q[a, b]$, которая может отличаться от нуля самое большее в конечном числе точек на $[a, b]$.

Определим *скалярное произведение* любых двух элементов φ и ψ из $Q[a, b]$ равенством

$$(\varphi, \psi) = \int_a^b \varphi(x)\psi(x)\,dx. \tag{1}$$

Нетрудно проверить, что определенное таким образом скалярное произведение удовлетворяет обычным требованиям, а именно:

(1) $(\varphi, \psi) = (\psi, \varphi)$,

(2) $(\lambda\varphi, \psi) = \lambda(\varphi, \psi)$, где λ — любое вещественное число,

(3) $(\varphi, \psi_1 + \psi_2) = (\varphi, \psi_1) + (\varphi, \psi_2)$,

(4) $(\varphi, \varphi) \geqslant 0$; если же $(\varphi, \varphi) = 0$, то $\varphi = 0$.

(Выполнение требования (4) уже было доказано в ходе доказательства теоремы 11.6 п. 3 § 6.)

Таким образом, относительно скалярного произведения, определяемого равенством (1), пространство $Q[a, b]$ ведет себя так же, как множество всех векторов трехмерного евклидова пространства относительно обычного скалярного произведения.

Два «вектора» φ и ψ из $Q[a, b]$ называются *ортогональными*, если их скалярное произведение равно нулю, т. е. если

$$(\varphi, \psi) = \int_a^b \varphi(x)\psi(x)\,dx = 0. \tag{2}$$

Норму или «длину» вектора $\varphi \in Q[a, b]$ можно теперь определить равенством

$$\|\varphi\| = \sqrt{(\varphi, \varphi)}. \tag{3}$$

Если $\|\varphi\| \neq 0$, то, полагая $\psi(x) = \dfrac{\varphi(x)}{\|\varphi\|}$, получим, что

$$\|\psi\|^2 = \left(\frac{\varphi}{\|\varphi\|}, \frac{\varphi}{\|\varphi\|}\right) = \frac{1}{\|\varphi\|^2}(\varphi, \varphi) = 1, \tag{4}$$

в силу определения (3). Косинус угла между $f(x)$ и $g(x)$ определим соотношением

$$\cos(\widehat{f, g}) = \frac{(f, g)}{\|f\|\,\|g\|}. \tag{5}$$

Это определение закономерно, так как, в силу неравенства Коши — Буняковского (ср. п. 2 § 6 гл. 8),

$$|(f, g)| \leqslant \|f\|\,\|g\|. \tag{6}$$

Проекцией f на g, где $g \neq 0$, называют

$$\|f\|\cos(\widehat{f, g}) = \frac{(f, g)}{\|g\|}. \tag{7}$$

Определим теперь сходимость в пространстве $Q[a, b]$. Мы скажем, что $\varphi_n \to \varphi$ при $n \to +\infty$, если

$$\|\varphi_n - \varphi\| = \left(\int_a^b [\varphi_n(x) - \varphi(x)]^2 \, dx \right)^{1/2} \to 0 \tag{8}$$

при $n \to +\infty$, т. е. если последовательность $\{\varphi_n(x)\}$ сходится в среднем к $\varphi(x)$ на $[a, b]$.

Мы скажем, что имеет место равенство

$$f \doteq f_1 + f_2 + \ldots + f_n + \ldots, \tag{9}$$

если

$$\left\| f - \sum_{k=1}^{n} f_k \right\| = \left(\int_a^b \left[f(x) - \sum_{k=1}^{n} f_k(x) \right]^2 dx \right)^{1/2} \to 0 \tag{10}$$

при $n \to +\infty$, т. е. если ряд $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} f_k(x)$ сходится в среднем к $f(x)$ на $[a, b]$.

Установим аналогию между разложением вектора $\mathbf{x}$ трехмерного евклидова пространства по ортогональному базису $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ и разложением функции $f(x) \in Q[a, b]$ в ряд Фурье по полной ортогональной системе

$$\varphi_1(x), \ \varphi_2(x), \ \ldots, \ \varphi_n(x), \ \ldots \tag{11}$$

В трехмерном евклидовом пространстве для каждого вектора $\mathbf{x}$ в любом фиксированном базисе существует единственное разложение

$$\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + x_3\mathbf{e}_3. \tag{12}$$

Коэффициенты этого разложения легко найти, если воспользоваться скалярным произведением. Умножая равенство (12) скалярно на $\mathbf{e}_i$, получим

$$(\mathbf{x}, \mathbf{e}_i) = x_i(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_i) = x_i \|\mathbf{e}_i\|^2, \tag{13}$$

в силу ортогональности базиса $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ *). Из (13) находим, что

$$x_i = \frac{(\mathbf{x}, \mathbf{e}_i)}{\|\mathbf{e}_i\|^2}. \tag{14}$$

Величины

$$x_k \|\mathbf{e}_k\| = \frac{(\mathbf{x}, \mathbf{e}_k)}{\|\mathbf{e}_k\|}, \qquad k = 1, \ 2, \ 3, \tag{15}$$

где символом $\| \quad \|$ обозначена длина вектора, являются проекциями вектора $\mathbf{x}$ на направление векторов $\mathbf{e}_k$, $k = 1, 2, 3$.

---

*) Векторы $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ мы не предполагаем, вообще говоря, единичными.

Возводя обе части равенства (12) в скалярный квадрат, получим равенство

$$\|\mathbf{x}\|^2 = x_1^2\|\mathbf{e}_1\|^2 + x_2^2\|\mathbf{e}_2\|^2 + x_3^2\|\mathbf{e}_3\|^2, \tag{16}$$

выражающее теорему Пифагора для трехмерного случая: квадрат длины вектора равен сумме квадратов его проекций на три взаимно перпендикулярных направления.

Совершенно аналогично в пространстве $Q[a, b]$ каждый «вектор» f может быть единственным образом разложен по «векторам» полной ортогональной системы $\{\varphi\}$, т. е. представлен в виде (см. п. 1 § 6 гл. 11)

$$f = c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2 + \ldots + c_k\varphi_k + \ldots, \tag{17}$$

причем коэффициенты c_k разложения (17) определяются по формулам

$$c_k = \frac{(f, \varphi_k)}{\|\varphi_k\|}, \quad k = 1, 2, \ldots \tag{18}$$

Таким образом, каждый «вектор» f из $Q[a, b]$ однозначно определяется бесконечной последовательностью своих «координат» (c_k) в «базисе» $\{\varphi_k\}$.

В силу полноты системы $\{\varphi_n\}$, имеет место равенство Парсеваля (см. п. 2 § 6)

$$\|f\|^2 = c_1^2\|\varphi_1\|^2 + c_2^2\|\varphi_2\|^2 + \ldots + c_n^2\|\varphi_n\|^2 + \ldots, \tag{19}$$

выражающее теорему Пифагора для функционального пространства $Q[a, b]$.

Если взять проекции вектора $\mathbf{x}$ не на все базисные векторы $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$, а, например, только на $\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e}_2$, то равенство (16) заменится неравенством

$$\|\mathbf{x}\|^2 \geqslant x_1^2\|\mathbf{e}_1\|^2 + x_2^2\|\mathbf{e}_2\|^2. \tag{20}$$

Аналогично, если ортогональная система $\{\varphi_n\}$ не полна в $Q[a, b]$, то равенство Парсеваля (19) заменится неравенством Бесселя

$$\|f\|^2 \geqslant c_1^2\|\varphi_1\|^2 + c_2^2\|\varphi_2\|^2 + \ldots + c_n^2\|\varphi_n\|^2 + \ldots \tag{21}$$

Эти геометрические идеи используются в теории так называемых гильбертовых пространств, находящей применения в квантовой механике и математической физике.