Применение кратных преобразований Фурье позволяет решать краевые задачи для неограниченных областей на плоскости и в пространстве, таких, как вся плоскость, полуплоскость, квадрант, все пространство, полупространство и т. п.

ДОПОЛНЕНИЕ 5 К ГЛ. II

РАЗЛОЖЕНИЕ δ-ФУНКЦИИ В РЯД ФУРЬЕ И ИНТЕГРАЛ ФУРЬЕ

Вычисляя коэффициенты Фурье для δ-функции $\delta(x_0, x)$ по обычным формулам, получаем

$$a_k = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l}\delta(x_0, \xi)\cos\frac{k\pi\xi}{l}\,d\xi = \frac{1}{l}\cos\frac{k\pi x_0}{l},$$

$$a_0 = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l}\delta(x_0, \xi)\,d\xi = \frac{1}{l},$$

$$b_k = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l}\delta(x_0, \xi)\sin\frac{k\pi\xi}{l}\,d\xi = \frac{1}{l}\sin\frac{k\pi x_0}{l} \quad (\text{при } x_0 \in (-l, l)).$$

Следовательно, ряд Фурье для δ-функции $\delta(x_0, x)$ имеет вид

$$\delta(x_0, x) \sim \frac{1}{2l} + \frac{1}{l}\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\cos\frac{k\pi x_0}{l}\cos\frac{k\pi x}{l} + \sin\frac{k\pi x_0}{l}\sin\frac{k\pi x}{l}\right) =$$

$$= \frac{1}{2l} + \frac{1}{l}\sum_{k=1}^{+\infty}\cos\frac{k\pi}{l}(x - x_0) \tag{1}$$

или в комплексной форме

$$\delta(x_0, x) \sim \frac{1}{2l}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{ik\frac{\pi}{l}(x - x_0)}. \tag{2}$$

Рассмотрим последовательность частичных сумм этого ряда

$$\tilde{\delta}_n(x_0, x) = \frac{1}{2l} + \frac{1}{l}\sum_{k=1}^{n}\left(\cos\frac{k\pi x_0}{l}\cos\frac{k\pi x}{l} + \sin\frac{k\pi x_0}{l}\sin\frac{k\pi x}{l}\right), \tag{3}$$

$$n = 1, 2, \ldots,$$

или в комплексной форме

$$\delta_n(x_0, x) = \frac{1}{2l}\sum_{k=-n}^{n} e^{ik\frac{\pi}{l}(x - x_0)}, \qquad n = 1, 2, \ldots \tag{4}$$

Если $f(x)$ является кусочно-гладкой на интервале $(-l, l)$, то, очевидно,

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{-l}^{l} f(x)\tilde{\delta}_n(x_0, x)\,dx = f(x_0), \tag{5}$$

если считать $f(x)$ доопределенной в каждой точке разрыва x^* равенством $f(x^*) = \frac{f(x^*-0)+f(x^*+0)}{2}$. Поэтому (см. замечание после соотношений (7), (8) и (9) в Дополнении 2 к гл. 8 и сноску на стр. 356) последовательность $\{\tilde{\delta}_n(x_0, x)\}$ будет слабо сходящейся к δ-функции $\delta(x_0, x)$ в классе кусочно-гладких функций на $(-l, l)$; иными словами, ряд (1) слабо сходится к $\delta(x_0, x)$ в классе кусочно-гладких функций на $(-l, l)$. Этот факт можно выразить символическим равенством

$$\delta(x_0, x) = \frac{1}{2l} + \frac{1}{l}\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\cos\frac{k\pi x_0}{l}\cos\frac{k\pi x}{l} + \sin\frac{k\pi x_0}{l}\sin\frac{k\pi x}{l}\right). \tag{6}$$

Умножив обе части равенства (6) на любую кусочно-гладкую функцию $f(x)$ и интегрируя почленно по x от $-l$ до l, мы приходим к доказанному выше равенству

$$f(x_0) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty}\left(a_k\cos\frac{k\pi x_0}{l} + b_k\sin\frac{k\pi x_0}{l}\right), \tag{7}$$

где a_k и b_k определяются по обычным формулам для коэффициентов тригонометрического ряда Фурье функции $f(x)$ на интервале $(-l, l)$.

Равенство (6), понимаемое в смысле слабой сходимости в классе кусочно-гладких функций на $(-l, l)$, называется *разложением δ-функции $\delta(x_0, x)$ в тригонометрический ряд Фурье.*

Аналогично обстоит дело с разложением δ-функции $\delta(x_0, x)$ в интеграл Фурье. Применяя к $\delta(x_0, x)$ формально интегральную формулу Фурье (см. § 9)

$$\delta(x_0, x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x_0, \xi)\cos\lambda(\xi - x)\,d\xi,$$

получим

$$\delta(x_0, x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}\cos\lambda(x_0 - x)\,d\lambda. \tag{8}$$

Это равенство, называемое *разложением δ-функции $\delta(x_0, x)$ в интеграл Фурье*, также следует понимать в смысле слабой сходимости. Умножая обе его части на любую абсолютно интегрируемую на всей оси x функцию $f(x)$, кусочно-гладкую на каждом конечном интервале, и интегрируя по x от $-\infty$ до $+\infty$ (с изменением порядка интегрирования по x и λ в правой части), получим известное равенство

$$f(x_0)=\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)\cos\lambda(x_0-\xi)\,d\xi. \tag{9}$$

Итак, при разложении δ-функции $\delta(x_0, x)$ в ряд Фурье (6) и в интеграл Фурье (8) с δ-функцией можно обращаться так же, как с обычной кусочно-гладкой функцией (абсолютно интегрируемой на всей оси в случае интеграла Фурье), а с разложениями (6) и (8), понимаемыми в смысле слабой сходимости, можно, в известном смысле, обращаться, как с обычными равенствами.

По поводу дальнейших сведений о δ-функции мы отсылаем к вып. 4 настоящего курса, а также к [5] и [6].

ДОПОЛНЕНИЕ 6 К ГЛ. 11

РАВНОМЕРНАЯ АППРОКСИМАЦИЯ ФУНКЦИЙ МНОГОЧЛЕНАМИ

Приведем доказательство теоремы Вейерштрасса о равномерной аппроксимации непрерывной функции f алгебраическими многочленами, легко распространяющееся на функции многих независимых переменных. Это доказательство в случае N-кратно непрерывно дифференцируемой функции f позволяет построить равномерно аппроксимирующий функцию f алгебраический многочлен, производные которого до N-го порядка включительно равномерно аппроксимируют соответствующие производные функции f.

***Теорема 1* (*Вейерштрасса*).** *Любую функцию $f(x)$, непрерывную на замкнутом ограниченном отрезке $a \leqslant x \leqslant b$, можно равномерно аппроксимировать алгебраическим многочленом со сколь угодно высокой точностью.*

Доказательство. Предположим, что $0 < a < b < 1$ (в противном случае сделаем надлежащую замену независимой переменной x). Возьмем числа α и β, удовлетворяющие неравенствам $0 < \alpha < a < b < \beta < 1$, и продолжим $f(x)$ непрерывно на весь отрезок $0 \leqslant x \leqslant 1$ так, чтобы было $f(x) \equiv 0$ при $0 \leqslant x \leqslant \alpha$ и $\beta \leqslant x \leqslant 1$.