Это равенство, называемое *разложением δ-функции* $\delta(x_0, x)$ *в интеграл Фурье*, также следует понимать в смысле слабой сходимости. Умножая обе его части на любую абсолютно интегрируемую на всей оси x функцию $f(x)$, кусочно-гладкую на каждом конечном интервале, и интегрируя по x от $-\infty$ до $+\infty$ (с изменением порядка интегрирования по x и λ в правой части), получим известное равенство

$$f(x_0)=\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)\cos\lambda(x_0-\xi)\,d\xi. \tag{9}$$

Итак, при разложении δ-функции $\delta(x_0, x)$ в ряд Фурье (6) и в интеграл Фурье (8) с δ-функцией можно обращаться так же, как с обычной кусочно-гладкой функцией (абсолютно интегрируемой на всей оси в случае интеграла Фурье), а с разложениями (6) и (8), понимаемыми в смысле слабой сходимости, можно, в известном смысле, обращаться, как с обычными равенствами.

По поводу дальнейших сведений о δ-функции мы отсылаем к вып. 4 настоящего курса, а также к [5] и [6].

ДОПОЛНЕНИЕ 6 К ГЛ. 11

РАВНОМЕРНАЯ АППРОКСИМАЦИЯ ФУНКЦИЙ МНОГОЧЛЕНАМИ

Приведем доказательство теоремы Вейерштрасса о равномерной аппроксимации непрерывной функции f алгебраическими многочленами, легко распространяющееся на функции многих независимых переменных. Это доказательство в случае N-кратно непрерывно дифференцируемой функции f позволяет построить равномерно аппроксимирующий функцию f алгебраический многочлен, производные которого до N-го порядка включительно равномерно аппроксимируют соответствующие производные функции f.

***Теорема 1* (*Вейерштрасса*).** *Любую функцию $f(x)$, непрерывную на замкнутом ограниченном отрезке $a \leqslant x \leqslant b$, можно равномерно аппроксимировать алгебраическим многочленом со сколь угодно высокой точностью.*

Доказательство. Предположим, что $0 < a < b < 1$ (в противном случае сделаем надлежащую замену независимой переменной x). Возьмем числа α и β, удовлетворяющие неравенствам $0 < \alpha < a < b < \beta < 1$, и продолжим $f(x)$ непрерывно на весь отрезок $0 \leqslant x \leqslant 1$ так, чтобы было $f(x) \equiv 0$ при $0 \leqslant x \leqslant \alpha$ и $\beta \leqslant x \leqslant 1$.

Докажем, что алгебраический многочлен степени $2n$ (относительно x)

$$P_n(x)=\frac{\int\limits_{\alpha}^{\beta} f(u)\,[1-(u-x)^2]^n\,du}{\int\limits_{-1}^{+1}(1-u^2)^n\,du} \tag{1}$$

при достаточно большом n равномерно аппроксимирует функцию $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ с любой наперед заданной степенью точности. Для этого заметим, что

$$J_n=\int\limits_0^1(1-v^2)^n\,dv\geqslant\int\limits_0^1(1-v)^n\,dv=-\frac{(1-v)^n}{n+1}\Bigg|_{v=0}^{v=1}=\frac{1}{n+1},$$

$$J_n^*=\int\limits_{\delta}^1(1-v^2)^n\,dv<(1-\delta^2)^n \quad \text{при любом } \delta,\ 0<\delta<1.$$

Следовательно,

$$0<\frac{J_n^*}{J_n}\leqslant(1-\delta^2)^n(n+1)\to 0 \quad \text{при} \quad n\to+\infty, \tag{2}$$

если $\delta=\text{const}$, $0<\delta<1$. Сделав замену $u-x=v$, перепишем интеграл (1) в виде

$$P_n(x)=\frac{\int\limits_{\alpha-x}^{\beta-x} f(v+x)\,(1-v^2)^n\,dv}{\int\limits_{-1}^{+1}(1-v^2)^n\,dv} \tag{3}$$

и оценим на отрезке $a\leqslant x\leqslant b$ разность

$$P_n(x)-f(x)=\frac{\int\limits_{\alpha-x}^{\beta-x} f(v+x)\,(1-v^2)^n\,dv-\int\limits_{-1}^{+1} f(x)\,(1-v^2)^n\,dv}{2J_n}. \tag{4}$$

Пусть дано $\varepsilon>0$. Выберем δ, $0<\delta<1$, так, чтобы выполнялось неравенство

$$|f(x+v)-f(x)|<\frac{\varepsilon}{2} \quad \text{при} \quad a\leqslant x\leqslant b \quad \text{и} \quad |v|\leqslant\delta \tag{5}$$

и чтобы было $0<x+v<1$ при $a\leqslant x\leqslant b$ и $|v|\leqslant\delta$. Представим числитель дроби (4) в виде

$$\int_{\alpha-x}^{-\delta} f(v+x)(1-v^2)^n\,dv + \int_{\delta}^{\beta-x} f(v+x)(1-v^2)^n\,dv +$$
$$+\int_{-\delta}^{\delta} [f(x+v)-f(x)](1-v^2)^n\,dv +$$
$$+\int_{-1}^{-\delta} f(x)(1-v^2)^n\,dv + \int_{\delta}^{1} f(x)(1-v^2)^n\,dv. \tag{6}$$

В силу (5) имеем

$$\left|\int_{-\delta}^{\delta} [f(x+v)-f(x)](1-v^2)^n\,dv\right| \leqslant 2\frac{\varepsilon}{2}[J_n - J_n^*]. \tag{7}$$

Полагая $M = \max\limits_{a \leqslant x \leqslant b} |f(x)|$, получаем оценки

$$\left.\begin{aligned}\left|\int_{\alpha-x}^{-\delta} f(v+x)(1-v^2)^n\,dv\right| &\leqslant MJ_n^*,\\ \left|\int_{\delta}^{\beta-x} f(v+x)(1-v^2)^n\,dv\right| &\leqslant MJ_n^*,\end{aligned}\right\} \tag{8}$$

так как $-1 < \alpha - x < 0$ и $0 < \beta - x < 1$ при $a \leqslant x \leqslant b$, и оценки

$$\left|\int_{-1}^{\delta} f(x)(1-v^2)^n\,dv\right| \leqslant MJ_n^* \quad \text{и} \quad \left|\int_{\alpha}^{1} f(x)(1-v^2)^n\,dv\right| \leqslant MJ_n^*. \tag{9}$$

Поэтому числитель дроби (4) не превосходит величины

$$2\frac{\varepsilon}{2}J_n + 4MJ_n^*. \tag{10}$$

Заметив это, получаем следующую оценку для (4):

$$|P_n(x) - f(x)| < \frac{2\frac{\varepsilon}{2}J_n + 4MJ_n^*}{2J_n} = \frac{\varepsilon}{2} + 2M\frac{J_n^*}{J_n} \tag{11}$$
$$\text{для всех } x \in [a,\ b].$$

Но, в силу (2), второе слагаемое в правой части неравенства (11) будет меньше $\varepsilon/2$ при всех достаточно больших n. Следовательно, при всех достаточно больших n

$$|P_n(x) - f(x)| < \varepsilon \quad \text{для всех} \quad x \in [a,\ b]. \tag{12}$$

Теорема доказана.

Совершенно аналогично для функции многих переменных может быть доказана

Теорема 2 (Вейерштрасса). *Пусть $f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ непрерывна в области* П: $a_i \leqslant x_i \leqslant b_i$, $i = 1, 2, \ldots, m$, *причем* $0 < a_i < b_i < 1$. *Продолжим f непрерывно на весь единичный m-мерный куб E_m:* $0 \leqslant x_i \leqslant 1$, $i = 1, 2, \ldots, m$, *так, чтобы f была тождественно равна нулю вне параллелепипеда* П*: $\alpha_i \leqslant x_i \leqslant \beta_i$, *где* $0 < \alpha_i < a_i < b_i < \beta_i < 1$. *Тогда алгебраический многочлен степени nm относительно* $x_1, x_2, \ldots, x_m$

$$P_n(x_1, x_2, \ldots, x_m) = \frac{\int\limits_{\alpha_1}^{\beta_1} \ldots \int\limits_{\alpha_m}^{\beta_m} f(u_1, \ldots, u_m)[1-(u_1-x_1)^2]^n \ldots [1-(u_m-x_m)^2]^n \, du_1 \ldots du_m}{\left[\int\limits_{-1}^{+1} (1-u^2)^n (du)\right]^m} \tag{13}$$

при достаточно большом n равномерно аппроксимирует функцию $f(x_1, \ldots, x_m)$ в П *с любой наперед заданной точностью.*

Замечание 1. Если функция $f(x)$ ($f(x_1, \ldots, x_m)$) имеет непрерывные производные до некоторого порядка N включительно, то производные $P_n(x)$ ($P_n(x_1, \ldots, x_m)$) до N-го порядка включительно равномерно аппроксимируют соответствующие производные $f(x)$ ($f(x_1, \ldots, x_m)$) со сколь угодно высокой точностью на отрезке $[a, b]$ (в параллелепипеде П) при всех достаточно больших значениях n.

Докажем справедливость этого утверждения в простейшем случае. Пусть $f(x)$ и $f'(x)$ непрерывны на отрезке $a \leqslant x \leqslant b$, $0 < a < b < 1$. Продолжим $f(x)$ на весь отрезок $0 \leqslant x \leqslant 1$ так, чтобы $f(x)$ и $f'(x)$ были непрерывны на всем этом отрезке и тождественно равны нулю вне отрезка $\alpha \leqslant x \leqslant \beta$, где $0 < \alpha < a < b < \beta < 1$. Дифференцируя многочлен (1) по x и интегрируя по частям, получим

$$P_n'(x) = \frac{\dfrac{d}{dx} \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(u)[1-(u-x)^2]^n \, du}{2J_n} =$$

$$= \frac{\int\limits_{\alpha}^{\beta} f(u) \dfrac{d}{dx}[1-(u-x)^2]^n \, du}{2J_n} = \frac{-\int\limits_{\alpha}^{\beta} f(u) \dfrac{d}{du}[1-(u-x)^2]^n \, du}{2J_n} =$$

$$= \frac{\int\limits_{\alpha}^{\beta} f'(u)[1-(u-x)^2]^n \, du}{2J_n} = \frac{\int\limits_{\alpha-x}^{\beta-x} f'(v+x)(1-v^2)^n \, dv}{\int\limits_{-1}^{+1} (1-v^2)^n \, dv}.$$

После этого разность

$$P_n'(x) - f'(x) = \frac{\int\limits_{\alpha-x}^{\beta-x} f'(x+v)(1-v^2)^n\,dv - \int\limits_{-1}^{+1} f'(x)(1-v^2)^n\,dv}{2J_n}$$

оценивается так же, как разность (4) при доказательстве теоремы 1.

Замечание 2. Простым следствием теоремы 2 является

Теорема 3 (Вейерштрасса). *Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $-l \leqslant x \leqslant l$ и имеет равные значения на его концах, т. е. $f(-l) = f(l)$, то она может быть с любой наперед заданной степенью точности равномерно аппроксимирована на этом отрезке тригонометрическим многочленом вида*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k \cos\frac{k\pi x}{l} + b_k \sin\frac{k\pi x}{l}\right). \tag{14}$$

Доказательство. Положим $\frac{\pi x}{l} = \theta$. Тогда функция $F(\theta) = f\left(\frac{l\theta}{\pi}\right) = f(x)$ будет непрерывной на отрезке $-\pi \leqslant \theta \leqslant \pi$, причем $F(-\pi) = F(\pi)$. Введем на плоскости с декартовыми прямоугольными координатами ξ, η полярные координаты θ, ρ: $\xi = \rho\cos\theta$, $\eta = \rho\sin\theta$, и рассмотрим функцию $\varphi(\xi, \eta) = \rho F(\theta)$. Эта функция непрерывна на всей плоскости ξ, η и при $\rho = 1$ совпадает с $F(\theta)$, т. е. $\varphi(\xi, \eta) = F(\theta)$ на окружности $\xi^2 + \eta^2 = 1$. По теореме 2 функцию $\varphi(\xi, \eta)$ можно в квадрате $-1 \leqslant \xi \leqslant 1$, $-1 \leqslant \eta \leqslant 1$ равномерно аппроксимировать со сколь угодно высокой точностью алгебраическим многочленом $P_n(\xi, \eta)$. Полагая $\rho = 1$, получим равномерную аппроксимацию $F(\theta)$ с той же точностью на отрезке $-\pi \leqslant \theta \leqslant \pi$ тригонометрическим многочленом $P_n(\cos\theta, \sin\theta)$ или, возвращаясь к $x = \frac{l\theta}{\pi}$, равномерную аппроксимацию $f(x)$ с той же точностью на отрезке $-l \leqslant x \leqslant l$ тригонометрическим многочленом $P_n\left(\cos\frac{\pi x}{l}, \sin\frac{\pi x}{l}\right)$. Заменяя в последнем произведения и высшие степени $\cos\frac{\pi x}{l}$ и $\sin\frac{\pi x}{l}$ линейными комбинациями синусов и косинусов кратных дуг, этот многочлен можно привести к виду (14). Теорема доказана.