ОБ УСТОЙЧИВОМ СУММИРОВАНИИ РЯДОВ ФУРЬЕ С ВОЗМУЩЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Пусть известны точные значения c_k коэффициентов Фурье функции $f(x)$, интегрируемой с квадратом на $[a, b]$ по ортонормированной системе $\{\varphi_k(x)\}$:

$$c_k = \int_a^b f(x)\varphi_k(x)\,dx, \qquad k = 1,\ 2,\ \ldots, \tag{1}$$

и пусть при некотором $x \in [a, b]$ выполнено равенство

$$f(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} c_k\varphi_k(x). \tag{2}$$

Заменяя в нем сумму ряда частичной суммой, получим приближенное равенство

$$f(x) \approx \sum_{k=1}^{n} c_k\varphi_k(x), \tag{3}$$

которое при $n \to +\infty$ переходит в точное равенство (2). Таким образом, увеличивая число членов n, приближенное равенство (3) в рассматриваемой точке x можно сделать сколь угодно близким к точному.

Однако на практике приходится пользоваться приближенными или, как говорят, возмущенными значениями коэффициентов Фурье:

$$\tilde{c}_k = c_k + \Delta c_k, \tag{4}$$

которые отличаются от точных значений c_k добавками Δc_k, называемыми *погрешностями* или *возмущениями*.

Если в приближенном равенстве (3) точные значения коэффициентов Фурье c_k заменить их приближенными значениями $\tilde{c}_k$, то получится приближенное равенство

$$f(x) \approx \sum_{k=1}^{n} \tilde{c}_k\varphi_k(x), \tag{5}$$

точность которого при неоправданном увеличении числа членов n может, вообще говоря, не улучшиться, а ухудшиться. Если на возмущения Δc_k не наложено никаких ограничений, то это совершенно очевидно. Обычно на Δc_k накладывают следующее ограничение:

$$\sum_{k=1}^{+\infty} (\Delta c_k)^2 < \delta^2, \tag{6}$$

где δ^2 — достаточно малое число. Из выполнения условия (6) при каком угодно конечном δ следует, во-первых, существование функции $\tilde{f}(x)$, интегрируемой с квадратом на $[a, b]$, для которой ряд $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \tilde{c}_k \varphi_k(x)$ является рядом Фурье *), а также следует, во-вторых, что в силу равенства Парсеваля

$$\int\limits_a^b [\tilde{f}(x) - f(x)]^2\,dx = \sum_{k=1}^{+\infty} (\tilde{c}_k - c_k)^2 = \sum_{k=1}^{+\infty} (\Delta c_k)^2 < \delta^2, \qquad (7)$$

т. е. что квадратичное уклонение $\tilde{f}(x)$ от $f(x)$ на $[a, b]$ меньше δ^2.

Однако выполнение условия (6) при сколь угодно малом δ не гарантирует сходимости ряда с возмущенными коэффициентами

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \tilde{c}_k \varphi_k(x). \qquad (8)$$

Поэтому даже при выполнении условия (6) неоправданное увеличение числа членов n в приближенном равенстве (5) может привести не к его улучшению, а к ухудшению.

Рассмотрим, например, полную ортонормированную систему

$$\varphi_1(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}, \qquad \varphi_{k+1}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos kx, \qquad k = 1, 2, \ldots, \qquad (9)$$

на отрезке $0 \leqslant x \leqslant \pi$. Пусть функция $f(x)$ является как угодно гладкой на отрезке $0 \leqslant x \leqslant \pi$, и пусть ее *точный* ряд Фурье

$$\sum_{k=1}^{+\infty} c_k \varphi_k(x) = \frac{c_1}{\sqrt{\pi}} + \sum_{k=1}^{+\infty} c_{k+1} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos kx \qquad (10)$$

---

*) Действительно, из неравенства $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} (\Delta c_k)^2 < +\infty$, неравенства Бесселя $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} c_k^2 < \int\limits_a^b f^2(x)\,dx$ и элементарного неравенства $\tilde{c}_k^2 \leqslant 2\left[c_k^2 + (\Delta c_k)^2\right]$, $k = 1, 2, \ldots$, вытекает сходимость ряда $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \tilde{c}_k^2$. Но в теории функций действительного переменного доказывается ([7], теорема Рисса — Фишера), что сходимость ряда $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \tilde{c}_k^2$ является необходимым и достаточным условием существования функции $\tilde{f}(x)$, интегрируемой с квадратом на $[a, b]$, для которой ряд $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \tilde{c}_k \varphi_k(x)$ является рядом Фурье.

сходится к ней как угодно быстро в точке $x=0$. Положим

$$\Delta c_1 = 0, \quad \Delta c_{k+1} = \frac{\delta'}{k} \quad \text{при} \quad k = 1, 2, \ldots, \quad \frac{\pi^2 \delta'^2}{6} < \delta^2, \ \delta' > 0. \qquad (11)$$

Тогда

$$\sum_{k=1}^{+\infty} (\Delta c_k)^2 = \frac{\pi^2 \delta'^2}{6} < \delta^2, \qquad (12)$$

т. е. условие (6) для возмущений Δc_k выполнено. Однако ряд

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \tilde{c}_k \varphi_k(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} (c_k + \Delta c_k)\, \varphi_k(x)$$

расходится при $x=0$. Действительно, ряд $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} c_k \varphi_k(0)$ по условию сходится к $f(0)$, а ряд

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \Delta c_k \varphi_k(0) = \delta \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\cos kx}{k}\bigg|_{x=0} = \delta \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k}$$

расходится, отличаясь от гармонического лишь отличным от нуля множителем $\delta\sqrt{\frac{2}{\pi}}$ $(\delta \neq 0)$.

Тем не менее, если точный ряд Фурье функции $f(x)$ сходится к $f(x)$ в некоторой точке $x \in [a, b]$, то выполнение условия (6) при сколь угодно малом $\delta > 0$ позволяет с помощью надлежащего выбора $N(\delta)$ сделать в этой точке x модуль разности

$$\left| f(x) - \sum_{k=1}^{N(\delta)} \tilde{c}_k \varphi_k(x) \right|$$

сколь угодно малым, т. е. сделать в данной точке x приближенное равенство

$$f(x) \approx \sum_{k=1}^{N(\delta)} \tilde{c}_k \varphi_k(x) \qquad (5')$$

сколь угодно близким к точному. При этом не требуется никаких дополнительных ограничений на степень гладкости функции $f(x)$ и скорость сходимости ее точного ряда Фурье в данной точке x. Именно, справедлива следующая

Теорема. *Пусть для членов ортонормированной на* $[a, b]$ *системы* $\{\varphi_k(x)\}$ *выполнены неравенства*

$$|\varphi_k(x)| \leqslant A = \text{const} < +\infty \quad \textit{при} \quad k = 1, 2, \ldots, \ a \leqslant x \leqslant b \qquad (13)$$

и пусть при каждом δ^2 *в правой части неравенства* (6) *число* $N(\delta)$ *выбирается так, что выполнены условия*:

$$N(\delta) \to +\infty \quad \text{при} \quad \delta \to 0, \tag{14_1}$$

$$\delta^2 N(\delta) \to 0 \quad \text{при} \quad \delta \to 0. \tag{14_2}$$

Тогда

$$\lim_{\delta \to 0} \left| f(x) - \sum_{k=1}^{N(\delta)} \tilde{c}_k \varphi_k(x) \right| = 0 \tag{15}$$

при любом $x \in [a, b]$, *для которого выполнено равенство* (2).

Доказательство. В силу соотношений (2), (4), (6), (14_1) и (14_2) и неравенства Коши — Буняковского для сумм, будем иметь

$$\left| f(x) - \sum_{k=1}^{N(\delta)} \tilde{c}_k \varphi_k(x) \right| = \left| \sum_{k=1}^{+\infty} c_k \varphi_k(x) - \sum_{k=1}^{N(\delta)} \tilde{c}_k \varphi_k(x) \right| \leqslant$$

$$\leqslant \left| - \sum_{k=1}^{N(\delta)} \Delta c_k \varphi_k(x) \right| + \left| \sum_{k=N(\delta)+1}^{+\infty} c_k \varphi_k(x) \right| \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt{\sum_{k=1}^{N(\delta)} (\Delta c_k)^2} \sqrt{\sum_{k=1}^{N(\delta)} \varphi_k^2(x)} + \left| \sum_{k=N(\delta)+1}^{+\infty} c_k \varphi_k(x) \right| \leqslant$$

$$\leqslant A \sqrt{\delta^2 N(\delta)} + \left| \sum_{k=N(\delta)+1}^{+\infty} c_k \varphi_k(x) \right|. \tag{16}$$

Член $A\sqrt{\delta^2 N(\delta)}$ в правой части неравенства (16) стремится к нулю при $\delta \to 0$, в силу условия (14_2), а член $\left| \sum\limits_{k=N(\delta)+1}^{+\infty} c_k \varphi_k(x) \right|$ стремится к нулю при $\delta \to 0$, в силу условия (14_1) и сходимости ряда $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} c_k \varphi_k(x)$ в рассматриваемой точке x. Теорема доказана.

Из доказательства этой теоремы вытекают следующие выводы. Пусть в точке $x \in [a, b]$ выполнено равенство (2) и при некотором $\delta > 0$ выполнено ограничение (6) на возмущения Δc_k коэффициентов Фурье. Чтобы модуль разности $\left| f(x) - \sum\limits_{k=1}^{N(\delta)} \tilde{c}_k \varphi_k(x) \right|$, где $\tilde{c}_k = c_k + \Delta c_k$, $k = 1, 2, \ldots$, сделать в данной точке $x \in [a, b]$ минимальным, нужно число членов $N(\delta)$ частичной суммы $\sum\limits_{k=1}^{N(\delta)} \tilde{c}_k \varphi_k(x)$ взять не слишком малым, чтобы член $\left| \sum\limits_{k=N(\delta)+1}^{+\infty} c_k \varphi_k(x) \right|$ в правой части неравенства (16) был достаточно мал, и не слишком большим, чтобы член $A\sqrt{\delta^2 N(\delta)}$ в правой части неравенства (16) также был достаточно малым.

Всякий метод восстановления функции $f(x)$ с любой наперед заданной степенью точности по ее ряду Фурье с возмущенными коэффициентами, если возмущения коэффициентов удовлетворяют условию (6) при сколь угодно малом $\delta > 0$, мы называем *устойчивым методом суммирования ряда Фурье с возмущенными коэффициентами.*

Таким образом, из доказанной теоремы вытекает, что если δ^2 в правой части условия (6) может быть сделано сколь угодно малым, то путем надлежащего выбора $N(\delta)$ в приближенном равенстве (5′) может быть осуществлен *устойчивый метод суммирования ряда Фурье с возмущенными коэффициентами.*

Устойчивые методы суммирования рядов Фурье с возмущенными коэффициентами рассматривались А. Н. Тихоновым в работе [8]. В этой работе были предложены методы восстановления по ряду Фурье с возмущенными коэффициентами не только функции $f(x)$, но и ее производных. Однако рассмотрение этих более тонких вопросов выходит за рамки данной книги.