ДОБАВЛЕНИЕ 1

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКИХ РАЗЛОЖЕНИЯХ

При решении многих задач математики и математической физики вычисление и исследование функции $f(x)$ в окрестности некоторой конечной точки x_0 или в окрестности бесконечности *) связано с большими трудностями. Эти трудности часто удается преодолеть с помощью асимптотических разложений, приводящих к замене функции $f(x)$ такими функциями, которые вычисляются и исследуются проще, чем $f(x)$, и которые при x, приближающемся к x_0, или соответственно при x, стремящемся к бесконечности, все более и более точно аппроксимируют $f(x)$.

Сначала, не формулируя общих определений, мы приведем примеры асимптотических разложений (§ 1), затем остановимся на некоторых общих определениях и теоремах (§ 2) и, наконец, покажем на примере гамма-функции применение метода Лапласа для получения асимптотических разложений некоторых интегралов (§ 3).

§ 1. Примеры асимптотических разложений

1. Асимптотические разложения в окрестности нуля рассматривались уже в 1-м выпуске настоящего курса. Там в гл. 8 были получены асимптотические разложения в окрестности нуля для следующих элементарных функций:

$$\left.\begin{aligned}
e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n),\\
\cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + o(x^n),\\
&\qquad\qquad n \text{ нечетно},\\
\sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^{\frac{n}{2}} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + o(x^n),\\
&\qquad\qquad n \text{ четно},
\end{aligned}\right\} \quad (1)$$

*) То есть при $x \to +\infty$, или при $x \to -\infty$, или при $|x| \to \infty$.

$$\left.\begin{aligned} \ln(1+x) &= x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+o(x^n),\\ (1+x)^\alpha &= 1+\frac{\alpha}{1!}x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\ldots\\ &\qquad\ldots+\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+o(x^n), \end{aligned}\right\} \quad \text{(I)}$$

где $o(x^n)$ — величина более высокого порядка малости при $x\to 0$, чем x^n. Разложения (I) использовались для вычисления некоторых тонких пределов, когда более грубая информация о поведении элементарных функций в окрестности нуля была недостаточной.

2. Асимптотические разложения в окрестности бесконечности. Рассмотрим теперь некоторые асимптотические разложения в окрестности бесконечности. Часто в математической физике приходится пользоваться функцией

$$\Psi(x)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_x^{+\infty} e^{-\xi^2}\,d\xi\ ^{*)} \tag{1}$$

при больших значениях аргумента $x>0$. Найдем асимптотическое разложение функции $\Psi(x)$ в окрестности бесконечности, т. е. при $x\to+\infty$. Интегрируя по частям, находим

$$\int_x^{+\infty} e^{-\xi^2}\,d\xi=\int_x^{+\infty}\frac{e^{-\xi^2}\,2\xi\,d\xi}{2\xi}=-\frac{e^{-\xi^2}}{2\xi}\bigg|_{\xi=x}^{+\infty}-\int_x^{+\infty}\frac{e^{-\xi^2}}{2\xi^2}\,d\xi=$$
$$=\frac{e^{-x^2}}{2x}-\int_x^{+\infty}\frac{e^{-\xi^2}}{2\xi^2}\,d\xi.$$

Поступая таким же образом с интегралом $\int_x^{+\infty}\frac{e^{-\xi^2}}{2\xi^2}\,d\xi$ и т. д., после $(n+1)$-кратного применения этого приема получим следующее разложение для $\Psi(x)$:

$$\Psi(x)=\frac{e^{-x^2}}{\sqrt{\pi}\,x}\left[1+\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\frac{1\cdot 3\ldots(2k-1)}{(2x^2)^k}+R_n(x)\right], \tag{2}$$

---

*) $\Psi(x)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_x^{+\infty} e^{-\xi^2}\,d\xi=1-\Phi(x)$, где $\Phi(x)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{x} e^{-\xi^2}\,d\xi$ — «интеграл ошибок», играющий важную роль в теории вероятностей, теории теплопроводности, статистической физике. Он не выражается через элементарные функции; существуют многочисленные таблицы его значений при различных значениях аргумента x.

где

$$R_n(x) = (-1)^{n+1} \frac{1 \cdot 3 \ldots (2n+1)}{2^n} e^{x^2} x \int\limits_x^{+\infty} \frac{e^{-\xi^2}}{\xi^{2n+2}} d\xi. \qquad (3)$$

Для остаточного члена $R_n(x)$ справедлива следующая очевидная оценка:

$$|R_n(x)| \leqslant \frac{1 \cdot 3 \ldots (2n+1)}{2^{n+1} x^{2n+2}} e^{x^2} \int\limits_x^{+\infty} e^{-\xi^2} 2\xi \, d\xi = \frac{1 \cdot 3 \ldots (2n+1)}{2^{n+1} x^{2n+2}}. \qquad (4)$$

Обозначим через $O\left(\frac{1}{x^k}\right)$ при $x \to \infty$ величину, для которой выполняется «соотношение порядка»:

$$\left| O\left(\frac{1}{x^k}\right) \right| \leqslant \text{const} \cdot \frac{1}{x^k} \quad \text{при} \quad x \to \infty.$$

Тогда разложение (2), в силу оценки (4), можно переписать в виде

$$\Psi(x) = \frac{e^{-x^2}}{x\sqrt{\pi}} \left[1 + \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \frac{1 \cdot 3 \ldots (2k-1)}{(2x^2)^k} + O\left(\frac{1}{x^{2n+2}}\right) \right]. \qquad (5)$$

Так как $O\left(\frac{1}{x^{2n+2}}\right) \to 0$ при $x \to +\infty$, то, отбрасывая член $O\left(\frac{1}{x^{2n+2}}\right)$, можно написать, что

$$\Psi(x) \approx \frac{e^{-x^2}}{x\sqrt{\pi}} \left[1 + \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \frac{1 \cdot 3 \ldots (2k-1)}{(2x^2)^k} \right] \quad \text{при } x \to +\infty. \qquad (6)$$

Соотношения (5) и (6) называются *асимптотическими разложениями* $\Psi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_x^{+\infty} e^{-\xi^2} d\xi$ *при* $x \to +\infty$ или, иначе, «*в окрестности бесконечности*».

Если в правой части соотношения (6) суммирование продолжить неограниченно, то получится разложение $\Psi(x)$ в асимптотический ряд

$$\Psi(x) \approx \frac{e^{-x^2}}{x\sqrt{\pi}} \left[1 + \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k \frac{1 \cdot 3 \ldots (2k-1)}{(2x^2)^k} \right]. \qquad (7)$$

Этот ряд расходится при всех значениях x. При каждом достаточно большом x модуль k-го члена ряда с возрастанием номера k сначала убывает, затем, достигнув некоторого минимального значения, возрастает неограниченно. Однако, в силу неравенства (4), для разности между $\Psi(x)$ и частичной суммой этого ряда имеет место оценка

$$\left|\Psi(x)-\frac{e^{-x^2}}{x\sqrt{\pi}}\left[1+\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\frac{1\cdot 3\ldots(2k-1)}{2^k x^{2k}}\right]\right|\leqslant$$
$$\leqslant\frac{e^{-x^2}}{x\sqrt{\pi}}\cdot\frac{1\cdot 3\ldots(2n+1)}{2^{n+1}x^{2n+2}}. \qquad (8)$$

Иными словами, погрешность, допускаемая при замене функции $\Psi(x)$ частичной суммой ряда (7), не превосходит первого из отброшенных членов и быстро стремится к нулю при $x\to+\infty$.

Многократное интегрирование по частям является достаточно общим методом получения асимптотических разложений. Таким путем могут быть получены асимптотические разложения для интегральной показательной функции

$$\mathrm{Ei}(x)=\int_{-\infty}^{x}\frac{e^{\xi}}{\xi}\,d\xi,\quad -\infty<x<0\quad\text{при}\quad x\to-\infty,$$

для интегрального косинуса

$$\mathrm{Ci}(x)=\int_{x}^{+\infty}\frac{\cos\xi}{\xi}\,d\xi,\quad 0<x<+\infty\quad\text{при}\quad |x|\to+\infty,$$

для интегрального синуса

$$\mathrm{Si}(x)=\int_{0}^{x}\frac{\sin\xi}{\xi}\,d\xi,\quad -\infty<x<+\infty\quad\text{при}\quad |x|\to\infty.$$

Некоторые асимптотические разложения удается получить иными элементарными приемами (см., например, [9] или [10]).

Рассмотрим один несложный пример. При исследовании распространения электромагнитных волн у поверхности земли и в ряде других задач используется функция

$$F(x)=e^{-x^2}\int_{0}^{x}e^{\xi^2}\,d\xi. \qquad (9)$$

Нетрудно получить разложение для $F(x)$ в сходящийся степенной ряд *), которым, однако, при больших значениях x пользоваться неудобно. Найдем асимптотическое представление для $F(x)$ при $x\to+\infty$. Умножая равенство (9) на $2x$ и применяя дважды

*) См. п. 2 § 4 гл. 8.

правило Лопиталя при $x \to +\infty$, получим

$$\lim_{x \to +\infty} 2xF(x) = 1. \tag{10}$$

Следовательно, для $F(x)$ имеет место асимптотическое представление

$$F(x) = \frac{1}{2x}[1 + o(1)] \quad \text{при} \quad x \to +\infty, \tag{11}$$

где $o(1)$ при $x \to +\infty$ определяется как величина, стремящаяся к нулю при $x \to +\infty$. Вместо (11) можно написать также

$$F(x) \approx \frac{1}{2x} \quad \text{при} \quad x \to +\infty. \tag{12}$$

Можно было бы привести много других асимптотических разложений, но мы пока ограничимся рассмотренными примерами.

§ 2. Некоторые общие определения и теоремы

Мы будем рассматривать функции $f(x)$, $g(x)$, ..., заданные на некотором множестве M точек x вещественной прямой, например на конечном интервале, на полупрямой, на всей вещественной прямой.

1. Соотношения порядка. Асимптотическая эквивалентность. Остановимся сначала на соотношениях порядка $f(x) = o(g(x))$ и $f(x) = O(g(x))$. Пусть x_0 — какая-либо предельная точка множества M.

Определение 1. *Если*

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in M}} \frac{f(x)}{g(x)} = 0, \tag{13}$$

то говорят, что $f(x)$ есть «о малое» от $g(x)$ при $x \to x_0$ на множестве M, и пишут

$$f(x) = o(g(x)) \quad \textit{при} \quad x \to x_0 \ \textit{на} \ M. \tag{14}$$

Замечание. Выполнение соотношения (13) означает, что для всякого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что

$$|f(x)| < \varepsilon |g(x)| \quad \text{при всех } x \in M, \text{ для которых } |x - x_0| < \delta. \tag{13'}$$

Определение 2. *Если существует такая константа C, $0 < C < +\infty$, что при всех $x \in M$ из достаточно малой окрестности x_0 выполняется неравенство*

$$\left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| < C, \tag{15}$$