правило Лопиталя при $x \to +\infty$, получим

$$\lim_{x \to +\infty} 2xF(x) = 1. \tag{10}$$

Следовательно, для $F(x)$ имеет место асимптотическое представление

$$F(x) = \frac{1}{2x}[1 + o(1)] \quad \text{при} \quad x \to +\infty, \tag{11}$$

где $o(1)$ при $x \to +\infty$ определяется как величина, стремящаяся к нулю при $x \to +\infty$. Вместо (11) можно написать также

$$F(x) \approx \frac{1}{2x} \quad \text{при} \quad x \to +\infty. \tag{12}$$

Можно было бы привести много других асимптотических разложений, но мы пока ограничимся рассмотренными примерами.

## § 2. Некоторые общие определения и теоремы

Мы будем рассматривать функции $f(x)$, $g(x)$, ..., заданные на некотором множестве $M$ точек $x$ вещественной прямой, например на конечном интервале, на полупрямой, на всей вещественной прямой.

**1. Соотношения порядка. Асимптотическая эквивалентность.** Остановимся сначала на соотношениях порядка $f(x) = o(g(x))$ и $f(x) = O(g(x))$. Пусть $x_0$ — какая-либо предельная точка множества $M$.

***Определение 1.*** *Если*

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in M}} \frac{f(x)}{g(x)} = 0, \tag{13}$$

*то говорят, что $f(x)$ есть «о малое» от $g(x)$ при $x \to x_0$ на множестве $M$, и пишут*

$$f(x) = o(g(x)) \quad \textit{при} \quad x \to x_0 \ \textit{на} \ M. \tag{14}$$

Замечание. Выполнение соотношения (13) означает, что для всякого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что

$$|f(x)| < \varepsilon |g(x)| \quad \text{при всех } x \in M, \text{ для которых } |x - x_0| < \delta. \tag{13'}$$

***Определение 2.*** *Если существует такая константа $C$, $0 < C < +\infty$, что при всех $x \in M$ из достаточно малой окрестности $x_0$ выполняется неравенство*

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| < C, \tag{15}$$

*то говорят, что $f(x)$ есть «о большое» от $g(x)$ при $x \to x_0$ на множестве $M$, и пишут*

$$f(x) = O(g(x)) \quad \text{при} \quad x \to x_0 \text{ на } M. \tag{16}$$

***Определение 2₁.*** *Если неравенство (15) выполняется на всем множестве $M$, то говорят, что $f(x)$ есть «о большое» от $g(x)$ на множестве $M$, и пишут*

$$f(x) = O(g(x)) \quad \text{при} \quad x \in M. \tag{16'}$$

Если $f(x) = o(g(x))$ при $x \to x_0$ на $M$, то, как это следует из определений 1 и 2, и подавно $f(x) = O(g(x))$ при $x \to x_0$ на $M$.

Замечание. Если множество $M$ не ограничено, то совершенно аналогично определяются соотношения порядка $f(x) = o(g(x))$ и $f(x) = O(g(x))$ при $x \to +\infty$ (или $x \to -\infty$, или $|x| \to \infty$), иными словами, соотношения порядка «в окрестности бесконечности».

Если выбор множества $M$ очевиден, то в соотношениях (13)—(16) указание на $M$ опускают.

Примеры.

1) $e^x - 1 = O(x)$ при $x \to 0$,

2) $\sin x = O(x)$ при $x \to 0$,

3) $\cos x = O(1)$ при $x \to 0$,

4) $\sin^2 x = o(x)$ при $x \to 0$,

5) $x^2 = o(x)$ при $x \to 0$,

6) $x^2 = O(x)$ при $x \to 0$,

7) $e^{-x^2} = o(x^{-1})$ при $x \to \infty$,

8) $F(x) = e^{-x^2} \int\limits_0^x e^{\xi^2} d\xi = O\left(\frac{1}{2x}\right)$ при $x \to +\infty$.

Сформулируем теперь определение асимптотической эквивалентности функций.

***Определение 3.*** *Функции $f(x)$ и $g(x)$ называют асимптотически эквивалентными при $x \to x_0$ на множестве $M$ и пишут*

$$f(x) \sim g(x) \quad \text{при } x \to x_0 \text{ на } M, \tag{17}$$

*если*

$$(f(x)/g(x)) \to 1 \quad \text{при } x \to x_0 \text{ на } M. \tag{18}$$

Вместо соотношения (17) можно написать, очевидно, соотношение

$$f(x) = g(x)[1 + o(1)] \quad \text{при} \quad x \to x_0 \text{ на } M, \tag{19}$$

называемое *асимптотическим представлением* $f(x)$ в окрестности $x_0$ на множестве $M$.

Совершенно аналогично определяется асимптотическая эквивалентность функций на множестве $M$ в окрестности бесконечности (т. е. при $x \to +\infty$, или при $x \to -\infty$, или при $|x| \to \infty$).

Примеры. 9) $\sin x \sim x$ при $x \to 0$,

$$10)\ F(x) = e^{-x^2} \int_0^x e^{\xi^2}\, d\xi \sim \frac{1}{2x} \quad \text{при} \quad x \to +\infty.$$

**2. Асимптотические разложения функций.** Раскрывая скобки в соотношении (19), получим равенство

$$f(x) = g(x) + o(g(x)) \quad \text{при} \quad x \to x_0 \text{ на } M, \tag{19'}$$

которое является простейшим асимптотическим разложением $f(x)$ в окрестности $x_0$ на множестве $M$.

Сформулируем теперь общее определение асимптотического разложения, охватывающее также частные случаи, рассмотренные в § 1 настоящего добавления. Для этого нам прежде всего потребуется ввести понятие асимптотической последовательности и асимптотического ряда.

***Определение 4.*** *Конечная или бесконечная последовательность функций $\{\varphi_n(x)\}$, заданных на множестве $M$, называется асимптотической на $M$ при $x \to x_0$ $(x \to \infty)$, если при каждом $n$ выполнены соотношения порядка $\varphi_{n+1}(x) = o(\varphi_n(x))$ при $x \to x_0$ $(x \to \infty)$.*

Например, последовательности

1) $1,\ x,\ x^2,\ \ldots,\ x^n,\ \ldots$ при $x \to 0$,

2) $1,\ x^{\lambda_1},\ x^{\lambda_2},\ \ldots,\ x^{\lambda_n},\ \ldots$ $(0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_n < \ldots)$ при $x \to 0$,

3) $1,\ (x - x_0),\ (x - x_0)^2,\ \ldots,\ (x - x_0)^n,\ \ldots$ при $x \to x_0$,

4) $1,\ x^{-\lambda_1},\ x^{-\lambda_2},\ \ldots,\ x^{-\lambda_n},\ \ldots$ $(0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_n < \ldots)$ при $x \to +\infty$,

5) $e^x,\ e^x x^{-\lambda_1},\ e^x x^{-\lambda_2},\ \ldots,\ e^x x^{-\lambda_n},\ \ldots$ $(0 < \lambda_1 < \ldots < \lambda_n < \ldots)$ при $x \to +\infty$,

6) $1,\ x^{-1},\ x^{-2},\ \ldots,\ x^{-n},\ \ldots$ при $x \to +\infty$

являются, очевидно, асимптотическими.

Последовательности 1), 3), 6) называются степенными; последовательности 2), 4), 5), где $\lambda_i$ — некоторые вещественные числа, — обобщенными степенными.

***Определение 5.*** *Если $\{\varphi_n(x)\}$ — бесконечная асимптотическая последовательность (на множестве $M$) при $x \to x_0$,*

$(x \to +\infty)$, *то ряд* $\sum_{n=1}^{+\infty} c_n \varphi_n(x)$ *с любыми постоянными коэффициентами* $c_1, c_2, \ldots, c_n, \ldots$ *называется асимптотическим рядом (на множестве* $M$*) при* $x \to x_0$ $(x \to \infty)$.

***Определение 6.*** *Пусть* $\{\varphi_n(x)\}$ — *конечная или бесконечная асимптотическая последовательность на множестве* $M$ *при* $x \to x_0$ $(x \to \infty)$. *Если для функции* $f(x)$, *заданной на* $M$, *выполняется соотношение*

$$f(x) = \sum_{k=1}^{N} a_k \varphi_k(x) + o(\varphi_N(x)) \quad \text{при} \quad x \to x_0 \ (x \to \infty), \tag{20}$$

*где* $a_1, a_2, \ldots, a_N$ — *некоторые константы, то его называют асимптотическим разложением* $f(x)$ *на* $M$ *при* $x \to x_0$ $(x \to \infty)$ *по последовательности* $\{\varphi_n(x)\}$ *до* $N$*-го члена включительно.*

Разложение (20) записывают также в виде

$$f(x) \approx \sum_{k=1}^{N} a_k \varphi_k(x) \quad \text{при} \quad x \to x_0 \ (x \to \infty). \tag{21}$$

Если имеет место асимптотическое разложение (20), то, очевидно, и подавно имеют место асимптотические разложения, получающиеся из (20) заменой $N$ на $k$, где $k = 1, 2, \ldots, N-1$.

***Определение 7.*** *Пусть* $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k \varphi_k(x)$ — *асимптотический ряд на множестве* $M$ *при* $x \to x_0$ $(x \to \infty)$ *и пусть для функции* $f(x)$, *заданной на* $M$, *асимптотическое разложение* (20) *имеет место при каждом* $N = 1, 2, 3, \ldots$ *Тогда этот ряд называют асимптотическим разложением функции* $f(x)$ *на* $M$ *при* $x \to x_0$ *и пишут*

$$f(x) \approx \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \varphi_k(x) \quad \text{при} \quad x \to x_0 \ (x \to \infty.) \tag{22}$$

Асимптотические разложения, рассматривавшиеся в предыдущем параграфе, очевидно, удовлетворяют определениям 6 и 7.

Заметим, что асимптотические разложения в окрестности $x = 0$, или $x = x_0 \neq 0$ или в окрестности бесконечности сводятся друг к другу заменой вида $z = \frac{C}{x}$, или вида $z = C(x - x_0)$, или вида $z = \frac{C}{x - x_0}$ соответственно, однако такое сведение при практических применениях асимптотических разложений не всегда целесообразно.

Остановимся на различии между разложением функции $f(x)$ в сходящийся к ней функциональный ряд и ее разложением в асимптотический ряд. В первом случае мы требуем, чтобы разность между $f(x)$ и частичной суммой ряда стремилась к нулю при любом фиксированном $x$ и $N \to +\infty$; во втором случае требуем, чтобы разность $f(x) - \sum_{k=1}^{N} a_k\varphi_k(x)$ при каждом $N$ стремилась к нулю при $x \to x_0$ ($x \to \infty$), имея более высокий порядок малости, чем последний член в частичной сумме.

Асимптотический ряд для $f(x)$ может быть сходящимся или расходящимся, как это показывают примеры асимптотических рядов, рассмотренных в § 1 настоящей главы. Однако из сходимости асимптотического ряда данной функции $f(x)$ не следует, что его сумма равна $f(x)$. Так, например, нетрудно убедиться, что для функции $f(x) = e^{-x}$ имеет место следующее тривиальное асимптотическое разложение:

$$e^{-x} \approx 0 \cdot 1 + 0 \cdot x^{-1} + \ldots + 0 \cdot x^{-n} + \ldots \quad (\text{при } x \to +\infty), \tag{23}$$

причем асимптотической ряд (12.23) сходится, однако его сумма при всех $x$ ($x \neq 0$) не равна $e^{-x}$.

Для практических применений асимптотических разложений важно оценить погрешность, допускаемую при замене $f(x)$ частичной суммой $\sum_{k=1}^{N} a_k\varphi_k(x)$ ее асимптотического разложения (22), т. е. оценить остаточный член $o(\varphi_N(x))$ в разложении (20) при $x \to x_0$ ($x \to \infty$).

Ввиду того, что аналитическая оценка остаточного члена часто сопряжена с большими трудностями, на практике для выяснения области применимости асимптотических разложений пользуются контрольным расчетом, проведенным каким-либо другим методом. В ряде случаев этого оказывается достаточно. Например, пусть известно, что модуль остаточного члена $|o(\varphi_N(x))|$ стремится к нулю при $x \to x_0$, монотонно убывая. Если при значении $x$, достаточно близком к $x_0$, удалось каким-либо способом получить значение $f(x)$ и оно отличается от значения $\sum_{k=1}^{N} a_k\varphi_k(x)$ в этой же точке $x$ меньше, чем на $\varepsilon > 0$ (по модулю), то при всех $x$, более близких к $x_0$, модуль разности $f(x) - \sum_{k=1}^{N} a_k\varphi_k(x)$ и подавно будет оставаться меньше $\varepsilon$. Аналогичным образом обстоит дело, когда не $|o(\varphi_N(x))|$, а некоторая мажоранта $\psi_N(x) \geqslant |o(\varphi_N(x))|$ стремится к нулю, монотонно убывая, при $x \to x_0$.

Асимптотическое разложение любой функции $f(x)$ по заданной асимптотической последовательности $\{\varphi_n(x)\}$, если оно существует, определяется однозначно. Именно, имеет место

**Теорема 1.** *Пусть каждый член асимптотической последовательности $\{\varphi_n(x)\}$ отличен от нуля при всех $x$ в достаточно малой окрестности $x_0$ (или при $x \to \infty$) и пусть имеет место асимптотическое разложение (20) для функции $f(x)$. Тогда его коэффициенты $a_k$ однозначно определяются по формулам*

$$a_n = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ (x \to \infty)}} \frac{f(x) - \sum\limits_{k=1}^{n-1} a_k \varphi_k(x)}{\varphi_n(x)} \quad \text{при} \quad n = 1, 2, \ldots, N. \tag{24}$$

Доказательство. Заменив в соотношении (20) $N$ на $n$ и переписав его в виде

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n-1} a_k \varphi_k(x) + a_n \varphi_n(x) + o(\varphi_n(x)), \quad 1 \leqslant n \leqslant N,$$

находим

$$a_n = \frac{f(x) - \sum\limits_{k=1}^{n-1} a_k \varphi_k(x)}{\varphi_n(x)} + \frac{o(\varphi_n(x))}{\varphi_n(x)}, \quad 1 \leqslant n \leqslant N,$$

откуда и следует справедливость равенства (24). Теорема доказана.

Обратная теорема неверна; именно, функция $f(x)$ определяется своим асимптотическим разложением неоднозначно; могут быть различные функции с одним и тем же асимптотическим разложением. Так, например, функции $f(x) = e^{-x}$ и $g(x) = 0$ имеют одинаковое асимптотическое разложение (23) по степеням $1, x^{-1}, x^{-2}, \ldots$ $\ldots, x^{-n}, \ldots$ при $x \to +\infty$.

**Определение 8.** *Две функции $f(x)$ и $g(x)$ называются асимптотически эквивалентными относительно данной асимптотической последовательности $\{\varphi_n(x)\}$ при $x \to x_0$ $(x \to \infty)$, если при всех $n$ выполняется соотношение*

$$f(x) - g(x) = o(\varphi_n(x)) \quad \text{при} \quad x \to x_0 \ (x \to \infty). \tag{25}$$

Две функции $f(x)$ и $g(x)$ с одинаковым асимптотическим разложением по некоторой асимптотической последовательности, очевидно, асимптотически эквивалентны относительно этой асимптотической последовательности.

Нетрудно доказать, что для совпадения коэффициентов асимптотических разложений функций $f(x)$ и $g(x)$ по одной и той же асимптотической последовательности $\{\varphi_n(x)\}$ необходимо и достаточно, чтобы эти функции были асимптотически эквивалентны относительно последовательности $\{\varphi_n(x)\}$.

Остановимся теперь на вопросе об операциях над асимптотическими разложениями.

Если при $x \to x_0$ $(x \to \infty)$ имеют место асимптотические разложения

$$f(x) \approx \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \varphi_k(x) \quad \text{и} \quad g(x) \approx \sum_{k=1}^{+\infty} b_k \varphi_k(x) \quad \text{при} \quad x \to x_0 \ (x \to \infty), \tag{26}$$

то, очевидно, при любых постоянных $\alpha$ и $\beta$ имеет место также асимптотическое разложение

$$\alpha f(x) + \beta g(x) \approx \sum_{k=1}^{+\infty} (\alpha a_k + \beta b_k) \varphi_k(x) \text{ при } x \to x_0 \ (x \to \infty). \tag{27}$$

Перемножать асимптотические разложения двух функций $f(x)$ и $g(x)$ по одной и той же асимптотической последовательности $\{\varphi_n(x)\}$, вообще говоря, нельзя, так как уже произведения $\varphi_m(x)\varphi_n(x)$ не всегда можно расположить в асимптотическую последовательность.

Остановимся на вопросе о почленном интегрировании асимптотических разложений. Справедлива следующая

**Теорема 2.** *Пусть последовательность $\{\varphi_n(x)\}$ положительных функций вещественной переменной $x$, определенных на интервале $a < x < b$, является асимптотической при $x \to b - 0$ и пусть имеет место асимптотическое разложение*

$$f(x) \approx \sum_{k=1}^{+\infty} C_k \varphi_k(x) \quad \textit{при } x \to b - 0\text{*)}. \tag{28}$$

*Если интегралы*

$$\int_x^b f(\xi)\,d\xi \quad \textit{и} \quad \int_x^b \varphi_k(\xi)\,d\xi \tag{29}$$

*сходятся, то имеет место также асимптотическое разложение*

$$\int_a^b f(\xi)\,d\xi \approx \sum_{k=1}^{+\infty} C_k \int_x^b \varphi_k(\xi)\,d\xi. \tag{30}$$

Доказательство. Для положительных функций в неравенстве $|\varphi_{n+1}(x)| < \varepsilon|\varphi_n(x)|$, выражающем соотношение порядка $\varphi_{n+1}(x) = o(\varphi_n(x))$ **), знак модуля можно опустить. В результате получим, что

$$\varphi_{n+1}(x) < \varepsilon\varphi_n(x) \quad \text{при} \quad x \to b - 0 \tag{*}$$

*) Здесь $b$ — конечное число или $+\infty$.

**) См. замечание к определению 1.

при любом $\varepsilon > 0$. Интегрируя (*) от $x$ до $b$, что возможно, в силу сходимости интегралов, получим, что

$$0 < \int_x^b \varphi_{n+1}(\xi)\,d\xi < \varepsilon \int_x^b \varphi_n(\xi)\,d\xi \tag{31}$$

при любом $\varepsilon > 0$ и при $x \to b-0$, откуда вытекает, что последовательность $\left\{\int_x^b \varphi_n(\xi)\,d\xi\right\}$ является асимптотической при $x \to b-0$. Для доказательства соотношения (30) нужно доказать, что

$$\int_x^b f(\xi)\,d\xi \approx \sum_{k=1}^{N} C_k \int_x^b \varphi_k(\xi)\,d\xi \quad \text{при} \quad x \to b-0 \tag{30'}$$

для каждого $N = 1, 2, 3, \ldots$ В силу положительности функций $\varphi_n(x)$, соотношение (20), имеющее место в силу (28), можно переписать в виде

$$\left| f(x) - \sum_{k=1}^{N} a_k \varphi_k(x) \right| < \varepsilon \varphi_N(x) \quad \text{при} \quad x \to b-0$$

и любом $\varepsilon > 0$ для каждого $N = 1, 2, 3, \ldots$ Следовательно,

$$\left| \int_a^b f(\xi)\,d\xi - \sum_{k=1}^{N} a_k \int_x^b \varphi_k(\xi)\,d\xi \right| \leqslant$$

$$\leqslant \int_x^b \left| f(\xi) - \sum_{k=1}^{N} a_k \varphi_k(\xi) \right| d\xi \leqslant \varepsilon \int_x^b \varphi_N(\xi)\,d\xi \quad \text{при} \quad x \to b-0$$

и любом $\varepsilon > 0$ для каждого $N = 1, 2, 3, \ldots$ Но это и означает, что для каждого $N = 1, 2, 3, \ldots$ справедливо асимптотическое разложение (30), что и требовалось доказать.

Из теоремы 2 вытекает очевидным образом справедливость следующего утверждения:

*Если имеет место степенное асимптотическое разложение*

$$f(x) \approx \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^{-k} \quad \textit{при} \quad x \to +\infty \tag{32}$$

*и интеграл* $\int_x^{+\infty} \left[f(\xi) - a_0 - a_1 \xi^{-1}\right] d\xi$ *сходится, то имеет место также степенное асимптотическое разложение*

$$\int_x^{+\infty} \left[f(\xi) - a_0 - a_1 \xi^{-1}\right] d\xi \approx \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{a_k}{-k+1} x^{-k+1}. \tag{33}$$

Почленное дифференцирование асимптотических разложений, вообще говоря, недопустимо. Однако можно указать важные частные виды асимптотических разложений, допускающих почленное дифференцирование. Пусть, например, $f(x)$ допускает степенное асимптотическое разложение вида (32), а ее производная $f'(x)$ допускает также степенное асимптотическое разложение, в котором отсутствуют члены с $x^0$ и $x^{-1}$:

$$f'(x) \approx -\frac{\overset{*}{a}_1}{x^2} - \frac{2\overset{*}{a}_2}{x^3} - \ldots - \frac{n\overset{*}{a}_n}{x^{n+1}} - \ldots \text{ при } x \to +\infty. \tag{34}$$

Интегрируя (34), в силу предыдущего предложения, получим

$$f(x) \approx f(+\infty) + \frac{\overset{*}{a}_1}{x} + \frac{\overset{*}{a}_2}{x^2} + \ldots + \frac{\overset{*}{a}_n}{x^n} + \ldots \text{ при } x \to -\infty. \tag{35}$$

Но, в силу единственности разложения $f(x)$ в асимптотической ряд по степеням $1, x^{-1}, x^{-2}, x^{-3}, \ldots, x^{-k}, \ldots$, разложение (35) должно совпадать с разложением (32), т. е. будут выполняться равенства $f(+\infty) = a_0$, $\overset{*}{a}_1 = a_1, \ldots, \overset{*}{a}_k = a_k, \ldots$ Подставляя эти значения в (34), получим

$$f'(x) \approx -\frac{a_1}{x^2} - \frac{2a_2}{x^3} - \ldots - \frac{na_n}{x^{n+1}} - \ldots \text{ при } x \to +\infty, \tag{34'}$$

а это асимптотическое равенство получается почленным дифференцированием асимптотического равенства (32).

На этом мы закончим краткое изложение некоторых общих сведений об асимптотических разложениях и в следующем параграфе опишем один важный метод построения асимптотических разложений для некоторых интегралов.

## § 3. Метод Лапласа для асимптотического разложения некоторых интегралов

Пусть требуется получить асимптотическое представление интеграла

$$J(t) = \int_a^b f(x, t)\, dx \quad \text{при} \quad t \to +\infty \tag{36}$$

в предположении, что при больших значениях $t$ подынтегральная функция имеет резкий пик в окрестности некоторого значения $x = x_0$, а вне этой окрестности значения подынтегральной функции по модулю весьма малы. Очевидно, может случиться, что интеграл, взятый по этой окрестности $x_0$, будет при больших значениях $t$ почти равен всему интегралу (36). Если, кроме того, окажется возможным в этой окрестности заменить функцию $f(x, t)$ с достаточно высокой точ-