Почленное дифференцирование асимптотических разложений, вообще говоря, недопустимо. Однако можно указать важные частные виды асимптотических разложений, допускающих почленное дифференцирование. Пусть, например, $f(x)$ допускает степенное асимптотическое разложение вида (32), а ее производная $f'(x)$ допускает также степенное асимптотическое разложение, в котором отсутствуют члены с x^0 и x^{-1}:

$$f'(x) \approx -\frac{\overset{*}{a}_1}{x^2} - \frac{2\overset{*}{a}_2}{x^3} - \ldots - \frac{n\overset{*}{a}_n}{x^{n+1}} - \ldots \text{ при } x \to +\infty. \tag{34}$$

Интегрируя (34), в силу предыдущего предложения, получим

$$f(x) \approx f(+\infty) + \frac{\overset{*}{a}_1}{x} + \frac{\overset{*}{a}_2}{x^2} + \ldots + \frac{\overset{*}{a}_n}{x^n} + \ldots \text{ при } x \to -\infty. \tag{35}$$

Но, в силу единственности разложения $f(x)$ в асимптотической ряд по степеням $1, x^{-1}, x^{-2}, x^{-3}, \ldots, x^{-k}, \ldots$, разложение (35) должно совпадать с разложением (32), т. е. будут выполняться равенства $f(+\infty) = a_0$, $\overset{*}{a}_1 = a_1, \ldots, \overset{*}{a}_k = a_k, \ldots$ Подставляя эти значения в (34), получим

$$f'(x) \approx -\frac{a_1}{x^2} - \frac{2a_2}{x^3} - \ldots - \frac{na_n}{x^{n+1}} - \ldots \text{ при } x \to +\infty, \tag{34'}$$

а это асимптотическое равенство получается почленным дифференцированием асимптотического равенства (32).

На этом мы закончим краткое изложение некоторых общих сведений об асимптотических разложениях и в следующем параграфе опишем один важный метод построения асимптотических разложений для некоторых интегралов.

§ 3. Метод Лапласа для асимптотического разложения некоторых интегралов

Пусть требуется получить асимптотическое представление интеграла

$$J(t) = \int_a^b f(x, t)\,dx \quad \text{при} \quad t \to +\infty \tag{36}$$

в предположении, что при больших значениях t подынтегральная функция имеет резкий пик в окрестности некоторого значения $x = x_0$, а вне этой окрестности значения подынтегральной функции по модулю весьма малы. Очевидно, может случиться, что интеграл, взятый по этой окрестности x_0, будет при больших значениях t почти равен всему интегралу (36). Если, кроме того, окажется возможным в этой окрестности заменить функцию $f(x, t)$ с достаточно высокой точностью такой простой функцией, интеграл от которой легко берется, причем разность между этим интегралом и исходным интегралом (36) стремится к нулю при $t \to +\infty$, то это приводит к асимптотическому представлению интеграла (36) при больших значениях t. Такой метод получения асимптотических представлений для интегралов описанного типа был предложен Лапласом.

Рассмотрим применение этого метода на примере гамма-функции

$$\Gamma(t+1) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-u} u^t \, du \tag{37}$$

при $t \to +\infty$. Асимптотическое представление, которое мы таким путем получим для $\Gamma(t+1)$ при больших значениях t в случае целых $t = n > 0$, представляет собой так называемую *формулу Стирлинга*, дающую асимптотическое представление для $n!$ при больших значениях n.

Заменой $u = t(1+x)$ приведем интеграл (37) к виду

$$\Gamma(t+1) = e^{-t} t^{t+1} \int\limits_{-1}^{+\infty} [e^{-x}(1+x)]^t \, dx = e^{-t} t^{t+1} \int\limits_{-1}^{+\infty} e^{th(x)} \, dx. \tag{38}$$

Функция $e^{-x}(1+x) = e^{-x+\ln(1+x)} = e^{h(x)}$, где $h(x) = -x + \ln(1+x)$, достигает максимума при $x = 0$ вместе с функцией $h(x)$. Действительно, $h'(x) = -1 + \frac{1}{1+x}$ положительна при $-1 < x < 0$ и отрицательна при $0 < x < +\infty$. Так как в точке максимума $h(x)$ имеем $h(0) = 0$, то при всех остальных значениях x, $-1 < x < 0$, $0 < x < +\infty$, функция $h(x)$ отрицательна. Поэтому при $t \to +\infty$ функция $e^{th(x)} \to 0$ при $-1 < x < 0$ и при $0 < x < +\infty$. Следовательно, можно попытаться применить метод Лапласа.

Взяв число $\delta > 0$ достаточно малым (и во всяком случае < 1), представим интересующий нас интеграл в виде суммы

$$\int\limits_{-1}^{+\infty} e^{th(x)} \, dx = \int\limits_{-1}^{-\delta} e^{th(x)} \, dx + \int\limits_{-\delta}^{\delta} e^{th(x)} \, dx + \int\limits_{\delta}^{+\infty} e^{th(x)} \, dx. \tag{39}$$

Чтобы оценить каждый из интегралов, стоящих в правой части равенства (39), найдем оценки для $h(x)$ на интервалах: $-1 < x \leqslant -\delta$, $-\delta \leqslant x \leqslant \delta$ и $\delta \leqslant x < +\infty$. Разлагая $\ln(1+x)$ на отрезке $-\delta \leqslant x \leqslant \delta$ в степенной ряд, получим

$$h(x) = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \ldots$$
$$\ldots = \frac{x^2}{2}\left[-1 + \frac{2x}{3} - \frac{2x^2}{4} + \frac{2x^3}{5} \ldots\right].$$

Ряд, стоящий в квадратных скобках, удовлетворяет признаку Лейбница, так как $|x| < \delta < 1$. Поэтому отбрасывание всех членов, начиная с $-\frac{2x^2}{4}$, дает погрешность, не превосходящую по модулю $\frac{2x^2}{4}$. Но при достаточно малом $\delta > 0$ будет $\frac{2x^2}{4} < \frac{2|x|}{3}$ для всех x из отрезка $-\delta \leqslant x \leqslant \delta$. Следовательно,

$$\frac{x^2}{2}\left[-1-\frac{4}{3}\delta\right] \leqslant h(x) \leqslant \frac{x^2}{2}\left[-1+\frac{4}{3}\delta\right] \quad \text{при} \quad -\delta \leqslant x \leqslant \delta, \ \frac{4}{3}\delta < 1. \tag{40}$$

На интервале $-1 \leqslant x \leqslant -\delta$ функция $h(x)$ возрастает, достигая при $x = -\delta$ наибольшего значения $h(-\delta) < 0$. На интервале $\delta \leqslant x < +\infty$ функция $h(x)$ убывает, имея наибольшее значение при $x = \delta$, $h(\delta) < 0$. Таким образом,

$$h(x) \leqslant h(-\delta) < 0 \quad \text{при} \quad -1 < x \leqslant \delta, \tag{41}$$

$$h(x) \leqslant h(\delta) < 0 \quad \text{при} \quad \delta \leqslant x < +\infty. \tag{42}$$

Займемся теперь оценкой интегралов (39). В силу неравенства (41), при $t \to +\infty$ будем иметь

$$\int_{-1}^{-\delta} e^{th(x)}\,dx \leqslant \int_{-1}^{-\delta} e^{th(-\delta)}\,dx = e^{th(-\delta)}(1-\delta) = O\left(e^{th(-\delta)}\right) \to 0. \tag{43}$$

Далее, при $t > 1$ и $\delta \leqslant x < +\infty$, в силу (42), выполняются неравенства $th(x) \leqslant th(\delta)$ и $th(x) \leqslant h(x)$, складывая которые получим

$$th(x) \leqslant \frac{1}{2}[th(\delta) + h(x)] \quad \text{при} \quad t > 0 \quad \text{и} \quad \delta \leqslant x < +\infty. \tag{44}$$

Поэтому при $t \to +\infty$

$$\int_{\delta}^{+\infty} e^{th(x)}\,dx \leqslant \int_{\delta}^{+\infty} e^{\frac{1}{2}(th(\delta)+h(x))}\,dx =$$

$$= e^{\frac{1}{2}h(\delta)} \int_{\delta}^{+\infty} e^{\frac{1}{2}h(x)}\,dx = O\left(e^{\frac{1}{2}th(\delta)}\right) \to 0. \tag{45}$$

Наконец, в силу неравенства (40),

$$\int_{-\delta}^{\delta} e^{-t\frac{x^2}{2}\left[1+\frac{4}{3}\delta\right]}\,dx < \int_{-\delta}^{\delta} e^{th(x)}\,dx < \int_{-\delta}^{\delta} e^{-t\frac{x^2}{2}\left[1-\frac{4}{3}\delta\right]}\,dx. \tag{46}$$

С помощью оценок типа (44) и (45) находим

$$\int_{-\delta}^{\delta} e^{-t\frac{x^2}{2}\left[1\pm\frac{4}{3}\delta\right]}\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t\frac{x^2}{2}\left[1\pm\frac{4}{3}\delta\right]}\,dx + O\left(e^{-\alpha(\delta)t}\right) \tag{47}$$

при $t \to +\infty$, где $\alpha(\delta) < 0$ является константой, зависящей от δ, но не зависящей от t. Вычислим теперь интегралы

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t\frac{x^2}{2}\left[1 \pm \frac{4}{3}\delta\right]} dx.$$

Сделав замену $\xi = x\left[\frac{t}{2}\left(1 \pm \frac{4}{3}\delta\right)\right]^{\frac{1}{2}}$, получим

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t\frac{x^2}{2}\left[1 + \frac{4}{3}\delta\right]} dx = (2\pi)^{\frac{1}{2}} t^{-\frac{1}{2}} \left(1 \pm \frac{4}{3}\delta\right)^{-\frac{1}{2}}. \tag{48}$$

Из (47) и (48) при $t \to +\infty$ следует, что

$$\int_{-\delta}^{\delta} e^{-t\frac{x^2}{2}\left[1 \pm \frac{4}{3}\delta\right]} dx = (2\pi)^{\frac{1}{2}} t^{-\frac{1}{2}} \left(1 \pm \frac{4}{3}\delta\right)^{-\frac{1}{2}} + O(e^{-\alpha(\delta)t}). \tag{49}$$

Очевидно, что

$$\left(1 + \frac{4}{3}\delta\right)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \varepsilon_1(\delta), \quad \left(1 - \frac{4}{3}\delta\right)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \varepsilon_2(\delta),$$

где $\varepsilon_1(\delta)$ и $\varepsilon_2(\delta)$ положительны и стремятся к нулю при $\delta \to 0$. Если $\delta > 0$ фиксировано, то, в силу отрицательности $-\alpha(\delta)$, при достаточно больших $t > 0$ будет

$$|O(e^{-\alpha(\delta)t})| < \min(\varepsilon_1(\delta), \varepsilon_2(\delta))(2\pi)^{\frac{1}{2}} t^{-\frac{1}{2}}.$$

Поэтому из (46) и (49) получаем, что

$$(2\pi)^{\frac{1}{2}} t^{-\frac{1}{2}} [1 - 2\varepsilon_1(\delta)] < \int_{-\delta}^{\delta} e^{th(x)} dx < (2\pi)^{\frac{1}{2}} t^{-\frac{1}{2}} [1 + 2\varepsilon_1(\delta)] \tag{50}$$

при достаточно больших $t > 0$. Учитывая оценки (43) и (45) и тот факт, что при достаточно больших $t > 0$ будут выполняться неравенства

$$|O(e^{th(-\delta)}| < (2\pi)^{\frac{1}{2}} t^{-\frac{1}{2}} \min(\varepsilon_1(\delta), \varepsilon_2(\delta)),$$

$$|O(e^{th(\delta)}| < (2\pi)^{\frac{1}{2}} t^{-\frac{1}{2}} \min(\varepsilon_1(\delta), \varepsilon_2(\delta)),$$

найдем

$$(2\pi)^{\frac{1}{2}} t^{-\frac{1}{2}} (1 - 3\varepsilon_1(\delta)) < \int_{-1}^{+\infty} e^{th(x)} dx < (2\pi)^{\frac{1}{2}} t^{-\frac{1}{2}} (1 + 3\varepsilon_2(\delta)) \tag{51}$$

при всех достаточно больших $t > 0$. Следовательно, в силу произвольной малости $\varepsilon_1(\delta)$ и $\varepsilon_2(\delta)$ и определения отношений порядка, будет

$$\int_{-1}^{+\infty} e^{th(x)}\,dx = (2\pi)^{\frac{1}{2}} t^{-\frac{1}{2}} [1 + o(1)] \quad \text{при} \quad t \to +\infty. \tag{52}$$

Подставив это в (38), получим окончательно асимптотическое представление для $\Gamma(t+1)$ при $t \to +\infty$:

$$\Gamma(t+1) = e^{-t} t^{t+\frac{1}{2}} (2\pi)^{\frac{1}{2}} [1 + o(1)]. \tag{53}$$

При $t = n$, где n — целое положительное число, соотношение (53) превращается в формулу Стирлинга

$$n! = e^{-n} n^{n+\frac{1}{2}} (2\pi)^{\frac{1}{2}} [1 + o(1)] \quad \text{при} \quad n \to +\infty, \tag{54}$$

широко применяющуюся в математике и ее приложениях.

Методом Лапласа могут быть получены асимптотические разложения и более общего вида; он может быть применен также к кратным интегралам [10]. Обобщением метода Лапласа на случай интегралов от функций комплексного переменного является метод перевала, применяющийся, как и метод Лапласа, в различных разделах математики и математической физики. По поводу метода перевала см. [10] и [11].