

ОГЛАВЛЕНИЕ

От редакторов серии	14
Предисловие	14
Глава 1. Двойные интегралы	15
§ 1. Некоторые вспомогательные понятия. Площадь плоской фигуры	16
1. Граничные и внутренние точки. Область (16). 2. Расстояние между множествами (18). 3. Площадь плоской фигуры (19). 4. Основные свойства площади (22). 5. О понятии меры множества (23).	
§ 2. Определение и основные свойства двойного интеграла	24
1. Определение двойного интеграла (24). 2. Условия существования двойного интеграла. Верхние и нижние суммы (26). 3. Важнейшие классы интегрируемых функций (32). 4. Свойства двойного интеграла (33).	
§ 3. Аддитивные функции области. Производная по площади	35
1. Функции точки и функции области (35). 2. Двойной интеграл как аддитивная функция области (36). 3. Производная функции области по площади (36). 4. Производная по площади от двойного интеграла (37). 5. Восстановление аддитивной функции области по ее производной (38). 6. Определенный интеграл как функция области (40). 7. Продолжение функций области по аддитивности (41).	
§ 4. Некоторые физические и геометрические применения двойных интегралов	41
1. Вычисление объемов (41). 2. Вычисление площадей (42). 3. Масса пластинки (42). 4. Координаты центра масс пластинки (43). 5. Моменты инерции пластинки (44). 6. Световой поток, падающий на пластинку (45). 7. Поток жидкости через поперечное сечение канала (45).	
§ 5. Сведение двойного интеграла к повторному	46
1. Наводящие соображения (46). 2. Случай прямоугольной области (48). 3. Случай криволинейной области (50).	
§ 6. Замена переменных в двойном интеграле	54
1. Отображение областей (54). 2. Криволинейные координаты (56). 3. Полярные координаты (57). 4. Постановка задачи о замене переменных в двойном интеграле (58). 5. Пло-	

щадь в криволинейных координатах (59). 6. Замена переменных в двойном интеграле (66). 7. Сравнение с одномерным случаем. Интеграл по ориентированной области (69).

Глава 2. Тройные и многократные интегралы	71
§ 1. Определение и основные свойства тройного интеграла	71
1. Предварительные замечания. Объем пространственной фигуры (71). 2. Определение тройного интеграла (73). 3. Условия существования тройного интеграла. Интегрируемость непрерывных функций (74). 4. Свойства тройных интегралов (75). 5. Тройной интеграл как аддитивная функция области (76).	
§ 2. Некоторые применения тройных интегралов в физике и геометрии	77
1. Вычисление объемов (77). 2. Нахождение массы тела по плотности (77). 3. Момент инерции (78). 4. Вычисление координат центра масс (78). 5. Притяжение материальной точки телом (79).	
§ 3. Вычисление тройного интеграла	80
1. Сведение тройного интеграла по параллелепипеду к повторному (80). 2. Сведение тройного интеграла по криволинейной области к повторному (82).	
§ 4. Замена переменных в тройном интеграле	85
1. Отображение пространственных областей (85). 2. Криволинейные координаты в пространстве (86). 3. Цилиндрические и сферические координаты (86). 4. Элемент объема в криволинейных координатах (88). 5. Замена переменных в тройном интеграле. Геометрический смысл якобиана (89).	
§ 5. Понятие о многомерных интегралах	93
1. Общие сведения (93). 2. Примеры (94).	
Глава 3. Элементы дифференциальной геометрии	97
§ 1. Вектор-функции скалярного аргумента	97
1. Определение вектор-функции. Предел. Непрерывность (97). 2. Дифференцирование вектор-функции (98). 3. Голограф. Особые точки (100). 4. Формула Тейлора (101). 5. Интеграл от векторной функции по скалярному аргументу (101). 6. Векторные функции нескольких скалярных аргументов (102).	
§ 2. Пространственные кривые	102
1. Векторное уравнение кривой (102). 2. Основной трехгранник (105). 3. Формулы Френе (106). 4. Вычисление кривизны и кручения (107). 5. Система координат, связанная с основным трехгранником (109). 6. Вид кривой вблизи произвольной ее точки (110). 7. Ориентированная кривизна плоской кривой (113). 8. Понятие о натуральных уравнениях кривой (113). 9. Некоторые приложения к механике (115).	
§ 3. Параметрическое уравнение поверхности	117
1. Понятие поверхности (117). 2. Параметризация поверхности (118). 3. Параметрическое уравнение поверхности (119).	

	4. Кривые на поверхности (120). 5. Касательная плоскость (121). 6. Нормаль к поверхности (122). 7. Системы координат в касательных плоскостях (123).	
§ 4.	Измерение на кривой поверхности длин, углов и площадей. Первая квадратичная форма поверхности	124
	1. Аффинная система координат на плоскости (125). 2. Длина дуги на поверхности. Первая квадратичная форма (126). 3. Угол между двумя кривыми (128). 4. Определение площади поверхности. Пример Шварца (129). 5. Вычисление площади гладкой поверхности (131).	
§ 5.	Кривизна линий на поверхности. Вторая квадратичная форма	135
	1. Нормальные сечения поверхности и их кривизна (136). 2. Вторая квадратичная форма поверхности (138). 3. Индикатриса кривизны (139). 4. Главные направления и главные кривизны поверхности. Формула Эйлера (140). 5. Вычисление главных кривизн (142). 6. Полная кривизна и средняя кривизна (143). 7. Классификация точек на поверхности (143). 8. Первая и вторая квадратичные формы как полная система инвариантов поверхности (145).	
§ 6.	Понятие о внутренней геометрии поверхности	146
	1. Наложимость поверхностей. Необходимое и достаточное условие наложимости (146). 2. Внутренняя геометрия поверхности (147). 3. Поверхности постоянной кривизны (148).	
Глава 4.	Криволинейные интегралы	150
§ 1.	Криволинейные интегралы первого рода	150
	1. Определение криволинейного интеграла первого рода (150). 2. Свойства криволинейных интегралов (154). 3. Некоторые применения криволинейных интегралов первого рода (155). 4. Криволинейные интегралы первого рода в пространстве (157).	
§ 2.	Криволинейные интегралы второго рода	158
	1. Постановка задачи. Работа силового поля (158). 2. Определение криволинейного интеграла второго рода (159). 3. Связь между криволинейными интегралами первого и второго рода (160). 4. Вычисление криволинейного интеграла второго рода (162). 5. Зависимость криволинейного интеграла второго рода от ориентации кривой (165). 6. Криволинейные интегралы вдоль самопересекающихся и замкнутых путей (165). 7. Криволинейные интегралы второго рода вдоль пространственных кривых (166).	
§ 3.	Формула Грина	168
	1. Вывод формулы Грина (168). 2. Вычисление площади с помощью формулы Грина (173).	
§ 4.	Условия независимости криволинейного интеграла от пути. Интегрирование полных дифференциалов	174
	1. Постановка вопроса (174). 2. Случай односвязной области (174). 3. Нахождение функции по ее полному дифференциалу (178). 4. Криволинейные интегралы в многосвязной области (179).	

Глава 5. Поверхностные интегралы	183
§ 1. Поверхностные интегралы первого рода	183
1. Определение поверхностного интеграла от скалярной функции (183). 2. Сведение поверхностного интеграла к двойному (184). 3. Некоторые применения поверхностных интегралов к механике (188). 4. Поверхностные интегралы от векторных функций. Общее понятие поверхностного интеграла первого рода (189).	
§ 2. Поверхностные интегралы второго рода	191
1. Сторона поверхности (191). 2. Определение поверхностного интеграла второго рода (195). 3. Сведение поверхностного интеграла второго рода к двойному интегралу (199).	
§ 3. Формула Остроградского	201
1. Вывод формулы Остроградского (201). 2. Вычисление поверхностных интегралов с помощью формулы Остроградского. Представление объема пространственной области в виде поверхностного интеграла (205).	
§ 4. Формула Стокса	207
1. Вывод формулы Стокса (207). 2. Применение формулы Стокса к исследованию пространственных криволинейных интегралов (210).	
Глава 6. Теория поля	213
§ 1. Скалярные поля	213
1. Определение и примеры скалярных полей (213). 2. Поверхности и линии уровня (214). 3. Различные типы симметрии полей (215). 4. Производная по направлению (216). 5. Градиент скалярного поля (217).	
§ 2. Векторные поля	219
1. Определение и примеры векторных полей (219). 2. Векторные линии и векторные трубки (220). 3. Различные виды симметрии векторных полей (220). 4. Поле градиента. Потенциальное поле (221).	
§ 3. Поток векторного поля. Дивергенция	223
1. Поток векторного поля через поверхность (223). 2. Дивергенция (224). 3. Физический смысл дивергенции для различных полей. Примеры (226). 4. Соленоидальное поле (229). 5. Уравнение неразрывности (230). 6. Плоское течение жидкости. Формула Остроградского на плоскости (231).	
§ 4. Циркуляция. Ротор	233
1. Циркуляция векторного поля (233). 2. Ротор векторного поля. Запись формулы Стокса в векторных обозначениях (233). 3. Символическая запись ротора (235). 4. Физический смысл ротора (235). 5. Еще раз о потенциальных и соленоидальных полях (238).	
§ 5. Оператор Гамильтона	239
1. Символический вектор ∇ (239). 2. Действия с вектором ∇ (240).	

§ 6.	Дифференциальные операции второго порядка. Оператор Лапласа	243
	1. Дифференциальные операции второго порядка (243). 2. Уравнение теплопроводности (245). 3. Стационарное распределение температур. Гармонические поля (246).	
§ 7.	Запись основных дифференциальных операций теории поля в ортогональных криволинейных координатах	248
	1. Постановка задачи (248). 2. Криволинейные ортогональные координаты в пространстве (249). 3. Цилиндрические и сферические координаты (251). 4. Градиент (252). 5. Дивергенция (252). 6. Ротор (253). 7. Оператор Лапласа (254). 8. Запись основных формул в цилиндрических и сферических координатах (255).	
§ 8.	Переменные поля в сплошных средах	256
	1. Локальная и материальная производные (256). 2. Уравнение Эйлера (258). 3. Производная по времени от интеграла по жидкому объему (259). 4. Другой вывод уравнения неразрывности (262).	
Глава 7.	Тензоры	263
§ 1.	Понятие аффинного ортогонального тензора	264
	1. Преобразования ортогональных нормированных базисов (264). 2. Определение аффинного ортогонального тензора (266).	
§ 2.	Связь между тензорами второго ранга и линейными операторами	268
	1. Линейный оператор как тензор второго ранга (268). 2. Тензор второго ранга как линейный оператор (269).	
§ 3.	Связь между тензорами и инвариантными полилинейными формами	271
	1. Тензоры первого ранга и инвариантные линейные формы (271). 2. Тензоры второго ранга и инвариантные билинейные формы (272). 3. Тензоры произвольного ранга p и инвариантные полилинейные формы (274).	
§ 4.	Тензор деформаций	275
§ 5.	Тензор напряжений	276
	1. Определение тензора напряжений (276). 2. Тензор напряжений как линейный оператор (278).	
§ 6.	Алгебраические операции над тензорами	279
	1. Сложение, вычитание и умножение тензоров (279). 2. Умножение тензора на вектор (280). 3. Свертка (281). 4. Перестановка индексов (281). 5. Разложение тензора второго ранга на симметричный и антисимметричный (281).	
§ 7.	Тензор относительных смещений	282
§ 8.	Поле тензора	284
	1. Поле тензора. Дивергенция тензора (284). 2. Формула Остроградского для поля тензора (286). 3. Уравнения движения сплошной среды (287).	

§ 9. Приведение симметричного тензора второго ранга к главным осям	288
§ 10. Общее определение тензора	289
1. Взаимные базисы векторов (289). 2. Ковариантные и контравариантные координаты векторов (290). 3. Операция суммирования в тензорной символике (290). 4. Преобразование базисных векторов (291). 5. Преобразование ковариантных и контравариантных координат вектора (291). 6. Общее определение тензора (292). 7. Операции над тензорами (294). 8. Дальнейшие обобщения (294).	
Дополнение к гл. 7. Об умножении матриц	294
Глава 8. Функциональные последовательности и ряды	297
§ 1. Понятие равномерной сходимости; признаки равномерной сходимости	297
1. Сходимость и равномерная сходимость (297). 2. Признаки равномерной сходимости (303).	
§ 2. Свойства равномерно сходящихся функциональных последовательностей и рядов	308
1. Непрерывность и равномерная сходимость (308). 2. Предельный переход под знаком интеграла и почленное интегрирование ряда (311). 3. Предельный переход под знаком производной и почленное дифференцирование ряда (314). 4. Почленный предельный переход в функциональных последовательностях и рядах (316).	
§ 3. Степенные ряды	318
1. Интервал сходимости степенного ряда; радиус сходимости (318). 2. О равномерной сходимости степенного ряда и непрерывности его суммы (324). 3. Дифференцирование и интегрирование степенных рядов (327). 4. Арифметические операции над степенными рядами (329).	
§ 4. Разложение функций в степенные ряды	330
1. Основные теоремы о разложениях функций в степенные ряды; разложения элементарных функций (330). 2. Некоторые применения степенных рядов (336).	
§ 5. Степенные ряды в комплексной области	338
§ 6. Сходимость в среднем	342
1. Квадратичное уклонение и сходимость в среднем (342). 2. Неравенство Коши—Буняковского (343). 3. Интегрирование сходящихся в среднем последовательностей и рядов (344). 4. О связи между сходимостью в среднем и возможностью почленного дифференцирования последовательностей и рядов (347). 5. Связь между сходимостью в среднем и другими видами сходимости (348).	
Дополнение 1 к гл. 8. Критерий компактности семейства функций . .	350
Дополнение 2 к гл. 8. Слабая сходимость и дельта-функция	353

Глава 9. Несобственные интегралы	358
§ 1. Интегралы с бесконечными пределами интегрирования	358
1. Определения; примеры (358). 2. Сведение несобственного интеграла $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ к числовой последовательности и числовому ряду (362). 3. Критерий Коши для несобственных интегралов (364). 4. Абсолютная сходимость. Признаки абсолютной сходимости (366). 5. Условная сходимость (372). 6. Распространение методов вычисления интегралов на случай несобственных интегралов (374).	
§ 2. Интегралы от неограниченных функций с конечными и бесконечными пределами интегрирования	375
§ 3. Главное значение расходящегося интеграла	383
§ 4. Несобственные кратные интегралы	387
1. Интеграл от неограниченной функции по ограниченной области (387). 2. Интегралы от неотрицательных функций (389). 3. Абсолютная сходимость (393). 4. Признаки абсолютной сходимости (394). 5. Эквивалентность сходимости и абсолютной сходимости (397). 6. Несобственные интегралы с неограниченной областью интегрирования (399). 7. Методы вычисления несобственных кратных интегралов (400).	
Глава 10. Интегралы, зависящие от параметра	402
§ 1. Собственные и простейшие несобственные интегралы, зависящие от параметра	402
1. Собственные интегралы, зависящие от параметра (402). 2. Простейшие несобственные интегралы, зависящие от параметра (407).	
§ 2. Несобственные интегралы, зависящие от параметра	410
1. Понятие равномерной сходимости (411). 2. Сведение несобственного интеграла, зависящего от параметра, к последовательности функций (413). 3. Свойства равномерно сходящихся интегралов, зависящих от параметра (416). 4. Признаки равномерной сходимости несобственных интегралов, зависящих от параметра (423). 5. Примеры вычисления несобственных интегралов с помощью дифференцирования и интегрирования по параметру (428).	
§ 3. Эйлеровы интегралы	434
1. Свойства гамма-функции (435). 2. Свойства бета-функции (438).	
§ 4. Кратные собственные и несобственные интегралы, зависящие от параметров	442
Глава 11. Ряды Фурье и интеграл Фурье	449
§ 1. Предварительные сведения о периодических функциях и постановке основной задачи	449
1. Периоды периодической функции (449). 2. Периодическое продолжение непериодической функции (450). 3. Интеграл от	

периодической функции (451). 4. Арифметические действия над периодическими функциями (451). 5. Суперпозиция гармоник с кратными частотами (452). 6. Постановка основной задачи (453). 7. Ортогональность тригонометрической системы; коэффициенты Фурье и ряд Фурье (453). 8. Разложение в ряд Фурье четных и нечетных функций (456). 9. Разложение функций на отрезке $[-\pi, \pi]$ (458).	
§ 2. Основная теорема о сходимости тригонометрического ряда Фурье	459
1. Класс кусочно-гладких функций (459). 2. Формулировка основной теоремы о сходимости тригонометрического ряда Фурье (461). 3. Основная лемма (461). 4. Доказательство основной теоремы сходимости (463). 5. Примеры (467). 6. Разложение функций, заданных на отрезке $[0, 1]$, только по синусам или только по косинусам (472).	
§ 3. Ряды Фурье по ортогональным системам. Неравенство Бесселя	474
1. Ортогональные системы функций (474). 2. Коэффициенты Фурье и ряд Фурье функций $f(x)$ по ортогональной системе (476). 3. Задача о наименьшем квадратичном отклонении. Тождество Бесселя. Неравенство Бесселя (477).	
§ 4. Связь между степенью гладкости функции и скоростью сходимости ее тригонометрического ряда Фурье. Понятие улучшения сходимости	481
1. Условия равномерной сходимости тригонометрического ряда Фурье (481). 2. Связь между степенью гладкости функции и скоростью сходимости ее тригонометрического ряда Фурье (484). 3. Понятие улучшения сходимости тригонометрического ряда Фурье (489).	
§ 5. Равномерная аппроксимация непрерывной функции тригонометрическими и алгебраическими многочленами; теоремы Вейерштрасса	491
§ 6. О полноте и замкнутости ортогональных систем	495
1. Понятие полноты ортогональной системы (496). 2. Критерий полноты — равенство Парсеваля (496). 3. Свойства полных систем (497). 4. Полнота основной тригонометрической системы (499). 5. Полнота других классических ортогональных систем (502).	
§ 7. Ряды Фурье по ортогональным системам комплексных функций и комплексная запись тригонометрического ряда Фурье	503
§ 8. Тригонометрические ряды Фурье для функций нескольких независимых переменных	507
§ 9. Интеграл Фурье	510
1. Неограниченное растяжение интервала разложения функции в ряд Фурье и интегральная формула Фурье (510). 2. Обоснование интегральной формулы Фурье (511). 3. Интеграл Фурье как разложение в сумму гармоник (516). 4. Комплексная форма интеграла Фурье (517). 5. Преобразование Фурье (518). 6. Интеграл Фурье для функций нескольких независимых переменных (521).	

Дополнение 1 к гл. 11. О полиномах Лежандра	527
Дополнение 2 к гл. 11. Ортогональность с весом и ортогонализация	529
Дополнение 3 к гл. 11. Функциональное пространство и геометрические аналогии	535
Дополнение 4 к гл. 11. О некоторых применениях преобразования Фурье	539
Дополнение 5 к гл. 11. Разложение δ -функции в ряд Фурье и интеграл Фурье	544
Дополнение 6 к гл. 11. Равномерная аппроксимация функций многочленами	546
Дополнение 7 к гл. 11. Об устойчивом суммировании рядов Фурье с возмущенными коэффициентами	551
Д о б а в л е н и е 1. Об асимптотических разложениях	556
§ 1. Примеры асимптотических разложений	556
1. Асимптотические разложения в окрестности нуля (556).	
2. Асимптотические разложения в окрестности бесконечности (557).	
§ 2. Некоторые общие определения и теоремы	560
1. Соотношения порядка. Асимптотическая эквивалентность (560). 2. Асимптотические разложения функций (562).	
§ 3. Метод Лапласа для асимптотического разложения некоторых интегралов	568
Д о б а в л е н и е 2. Некоторые сведения об универсальных вычислительных машинах	573
§ 1. Общие сведения о вычислительных машинах	573
1. Введение (573). 2. Основные типы вычислительных машин (574).	
3. Основные узлы УЦВМ и их назначение (575). Системы счисления, используемые в УЦВМ (578). 5. Представление чисел в вычислительной машине (579).	
§ 2. Основные операции, выполняемые УЦВМ. Команды	580
1. Типы операций (580). 2. Основные арифметические операции (581). 3. Дополнительные операции вычислительного назначения (582). 4. Поразрядные (логические) операции (582). 5. Операции обращения к внешним устройствам (583). 6. Операции передачи управления (584). 7. Осуществление операций в машине (585).	
§ 3. Элементы программирования	586
1. Общие сведения (586). 2. Программирование по формулам (587). 3. Циклические процессы (589). 4. Блок-схемное программирование. Подпрограммы (592). 5. Коды команд. Операции над командами (593). 6. Об автоматизации программирования (595).	
§ 4. Некоторые вопросы организации работы на УЦВМ	596
1. Условия, определяющие эффективность применения на УЦВМ (596). 2. Основные этапы решения задачи с применением УЦВМ (596). 3. Методы предупреждения и обнаружения ошибок счета (597).	
Литература	599
Предметный указатель	600