ГЛАВА 1

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ КОЛЕБАТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ

Эта глава, которая является вводной, содержит изложение основных понятий и положений, необходимых для изучения нелинейных колебаний. Прежде всего следует сказать несколько слов о колебательных явлениях вообще и о нелинейных колебаниях в частности. Общие закономерности, которыми обладают колебательные процессы в системах различной физической природы, составляют предмет науки, получившей название теории колебаний. Под колебательным явлением принято понимать либо то, что связано с фактом установившегося движения в рассматриваемой системе, либо то, что связано с процессом перехода от одного установившегося движения к другому. Установившееся движение характеризуется повторяемостью и определенной устойчивостью (смысл последнего понятия будет уточнен ниже). Переходные процессы характеризуются тем установившимся движением, к которому они приближаются. Множество переходных процессов данного установившегося движения образует его область притяжения. Смена установившихся движений, которая происходит в результате изменения какого-нибудь физического параметра рассматриваемой системы при его переходе через некоторое значение, называется бифуркацией. Если при этом смена установившихся движений происходит достаточно быстро, т. е. скачкообразно, то говорят о «жестком» возникновении нового режима. В противном случае возникновение нового режима называют «мягким». Колебательные явления, возникающие в так называемых нелинейных системах, называются нелинейными колебаниями. Однако, прежде чем определить, что такое нелинейная система, рассмотрим более общий класс систем, называемых динамическими системами.

§ 1. Понятие динамической системы [1]

Понятие динамической системы возникло как обобщение понятия механической системы, движение которой описывается дифференциальными уравнениями Ньютона. В своем историческом развитии понятие динамической системы, как и всякое другое понятие, постепенно изменялось, наполняясь новым, более глубоким содержанием. Уже в книге Рейли по теории звука с единой точки зрения рассматриваются колебательные явления в механике, акустике и электрических системах. В настоящее время понятие динамической системы является весьма широким. Оно охватывает системы любой природы: физической, химической, биологической, экономической и др., причем не только детерминированные системы, но и стохастические. Описание динамических систем также допускает большое разнообразие: оно может осуществляться или при помощи дифференциальных уравнений, или такими средствами, как функции алгебры логики, графы, марковские цепи и т. д.

В настоящее время для исследования этих систем используются два разных подхода, отличающихся типом математической модели, которая отражает поведение динамической системы. При одном подходе математическая модель динамической системы S основывается на понятии состояния x, под которым понимается описание системы S в некоторый момент времени*), и на понятии оператора T, определяющего изменение этого состояния x во времени. Оператор T указывает процедуру, выполняя которую можно по описанию $x(t)$ в момент времени t найти описание $x(t+\Delta t)$ той же системы в некоторый следующий момент времени $t+\Delta t$. Если оператор T не зависит явно от времени, то система S называется автономной, в противном случае — неавтономной. Состояние x системы S можно рассматривать как точку некоторого пространства Φ, называемого фазовым пространством системы S. Изменению состояния x отвечает в фазовом пространстве Φ движение соответствующей точки, которая называется изображающей. При этом движении изображающая точка описывает кривую, на-

*) В механике, например, состояние системы определяется совокупностью обобщенных координат и скоростей. В случаях же, например, систем автоматов, стохастических систем и др. описание может быть осуществлено при помощи других параметров.

зываемую фазовой траекторией. Фазовое пространство Ф и оператор T составляют математическую модель динамической системы. Исследование поведения динамической системы при таком подходе сводится к изучению характера разбиения фазового пространства Ф на траектории и к выяснению зависимости структуры этого разбиения от значений физических параметров системы.

Другой подход к изучению динамических систем основан на исследовании функциональной стороны рассматриваемой системы. Этот подход может диктоваться невозможностью или отсутствием необходимости проникнуть во все тонкости внутренней структуры динамической системы. Поэтому система в этом случае трактуется как некий «черный ящик», обладающий входными и выходными переменными. Между этими переменными «черный ящик» реализует связь, определяемую некоторым оператором. Таким образом, математическая модель при втором подходе определяется пространствами входов и выходов, а также оператором, который осуществляет однозначное преобразование входных переменных в выходные.

Второй подход оказывается полезным при изучении систем автоматического регулирования, вычислительных машин, поисковых и самообучающихся систем. В этой книге используется первый подход, который позволяет изучить динамику системы с исчерпывающей полнотой.

§ 2. Классификация динамических систем

Математические модели динамических систем можно классифицировать в зависимости от структуры их фазового пространства Ф и вида оператора T. Различают случаи непрерывного и дискретного фазового пространства в зависимости от того, какой ряд значений могут принимать величины x, характеризующие состояние динамической системы: непрерывный или дискретный. Изменение состояния x во времени также может быть непрерывным или дискретным. Изменение непрерывно во времени, если Δt — произвольное неотрицательное число, и дискретно во времени, если Δt может принимать лишь некоторые дискретные положительные значения. Операторы T принято различать по их свойствам и по форме задания. Если оператор T обладает свойством суперпозиции, то он называется линейным. Если оператор T является нелинейным, то и соответствующая динамическая система назы-