

кой (рис. 1.1, б). Некоторые часто встречающиеся характеристики релейных элементов изображены на рис. 1.2. Функции на рис. 1.2, а и г обладают зонами неоднозначности, т. е. имеют гистерезисный характер. Средняя часть кривых на рис. 1.2, в и г указывает на существование зоны нечувствительности. Зависимость анодного тока электронной лампы от сеточного напряжения имеет вид кривой, показанной на рис. 1.3, а. Эту кривую можно аппроксимировать в виде двух полупрямых (рис. 1.3, б) или трех отрезков прямых (рис. 1.3, в) в зависимости от того, в каком режиме работает лампа. Часто используемые в современных радиосхемах тунNELьный диод и динистор имеют характеристики, изображенные соответственно на рис. 1.4, а и б, где I — ток, U — напряжение. Эти и другие аналогичные нелинейности, обладающие участками с отрицательным наклоном касательной, требуют для своей реализации наличия внешних источников энергии.

§ 4. Фазовый портрет динамической системы. Понятие устойчивости движения

Как уже было отмечено выше, исследование поведения динамической системы сводится к изучению поведения траекторий в фазовом пространстве Φ . Структура разбиения пространства Φ на фазовые траектории называется фазовым портретом рассматриваемой динамической системы. С геометрической точки зрения под структурой разбиения фазового пространства на траектории понимается геометрическая картина взаиморасположения фазовых траекторий в пространстве Φ . Следует отметить, что полное описание фазового портрета для произвольной динамической системы представляет собою очень сложную и до сих пор нерешенную проблему. Однако ряд основных особенностей этой структуры изучен, а для некоторых классов динамических систем в настоящее время получено полное описание фазового портрета.

Основную роль в описании структуры фазового пространства динамической системы играет разделение фазовых траекторий на обычные и особые. К последним принадлежат: особые точки, соответствующие состояниям равновесия системы или ее стационарным движениям; изолированные замкнутые траектории, называемые предельными циклами, которые соответствуют периодическим движениям; сепаратрисные кривые и поверхности, кото-

рые являются границами областей притяжения к различным устойчивым особым траекториям. Особые элементы фазового пространства Φ могут образовывать, вообще говоря, интегральные многообразия. Они разделяются на устойчивые, неустойчивые и седловые. Устойчивые состояния равновесия и периодические движения являются простейшими примерами установившихся движений, о которых шла речь в начале этой главы.

Понятие устойчивости движения является в теории нелинейных колебаний одним из основных понятий, поэтому остановимся на нем подробнее. Среди многих определений устойчивости наиболее известны устойчивость по Ляпунову и орбитная устойчивость. В отношении состояния равновесия эти определения совпадают и состоят в следующем. Состояние равновесия $x = x^*$ называется устойчивым, если для любого числа $\epsilon > 0$ можно указать настолько малое число $\delta(\epsilon)$, что для любого другого движения $x = x(t)$ с начальными условиями, отличающимися от x^* менее чем на δ , при всех последующих значениях t выполняется неравенство

$$\rho(x(t), x^*) < \epsilon,$$

где $\rho(x(t), x^*)$ — расстояние между фазовыми точками с координатами $x(t)$ и x^* . Состояние равновесия называется асимптотически устойчивым, если в дополнение к сказанному оно стремится к нулю при неограниченном возрастании времени. Характер особой точки определяется характером поведения фазовых траекторий в ее малой окрестности. Рассмотрим фазовый портрет в окрестности состояния равновесия на примере динамической системы, которая описывается тремя дифференциальными уравнениями:

$$\dot{x} = X(x, y, z), \dot{y} = Y(x, y, z), \dot{z} = Z(x, y, z) \quad (1.1)$$

с гладкими правыми частями. В состоянии равновесия $M_0(x^*, y^*, z^*)$ правые части дифференциальных уравнений (1.1) обращаются в нуль. Поведение фазовых траекторий вблизи точки M_0 описывается уравнениями в вариациях

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= \left(\frac{\partial X}{\partial x} \right)_0 \xi + \left(\frac{\partial X}{\partial y} \right)_0 \eta + \left(\frac{\partial X}{\partial z} \right)_0 \zeta, \\ \dot{\eta} &= \left(\frac{\partial Y}{\partial x} \right)_0 \xi + \left(\frac{\partial Y}{\partial y} \right)_0 \eta + \left(\frac{\partial Y}{\partial z} \right)_0 \zeta, \\ \dot{\zeta} &= \left(\frac{\partial Z}{\partial x} \right)_0 \xi + \left(\frac{\partial Z}{\partial y} \right)_0 \eta + \left(\frac{\partial Z}{\partial z} \right)_0 \zeta. \end{aligned} \quad (1.2)$$

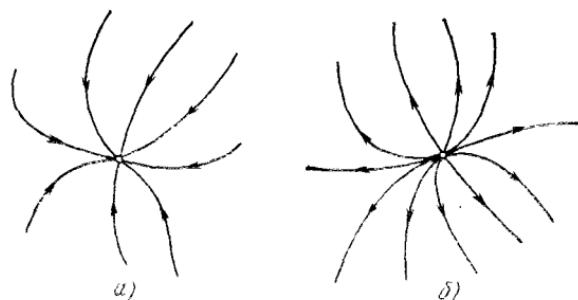


Рис. 1.5

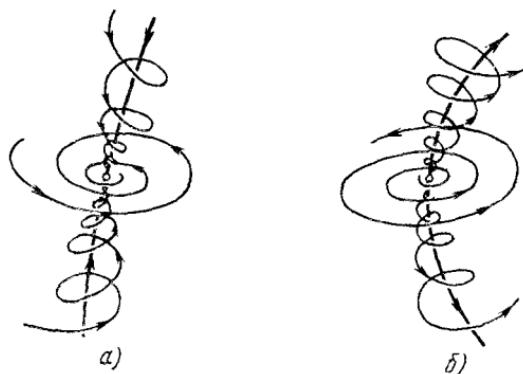


Рис. 1.6

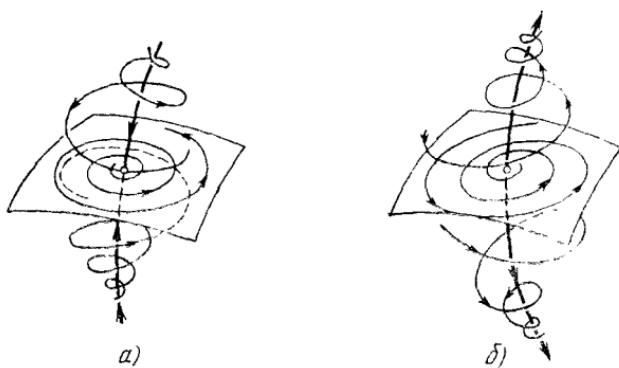


Рис. 1.7

Эти уравнения получаются в результате линеаризации уравнений (1.1) в окрестности состояния равновесия (x^*, y^*, z^*) относительно малых величин $\xi = x - x^*$, $\eta = y - y^*$, $\zeta = z - z^*$. Решение уравнений (1.2) определяется корнями характеристического уравнения

$$\chi(\lambda) \equiv \begin{vmatrix} \frac{\partial X}{\partial x} - \lambda & \frac{\partial X}{\partial y} & \frac{\partial X}{\partial z} \\ \frac{\partial Y}{\partial x} & \frac{\partial Y}{\partial y} - \lambda & \frac{\partial Y}{\partial z} \\ \frac{\partial Z}{\partial x} & \frac{\partial Z}{\partial y} & \frac{\partial Z}{\partial z} - \lambda \end{vmatrix} = 0, \quad (1.3)$$

в котором все производные вычислены при $x = x^*$, $y = y^*$, $z = z^*$. Здесь возможны следующие основные случаи:

1. Корни уравнения (1.3) — действительные отрицательные (положительные) числа. Состояние равновесия в этом случае называется устойчивым (неустойчивым) узлом и изображено на рис. 1.5, а, б.

2. Один из корней — действительный, два других — комплексные, причем все корни имеют отрицательные (положительные) действительные части. Состояние равновесия в этом случае называется устойчивым (неустойчивым) фокусом (рис. 1.6, а и б).

3. Один из корней — действительный, два других — комплексные, причем знаки действительного корня и действительных частей двух других — комплексно-сопряженных корней — разные. Состояние равновесия в этом случае изображается особой точкой типа седло-фокус (рис. 1.7, а и б).

4. Все корни действительные и разных знаков. Этот случай соответствует двум типам особых точек седлоузел, изображенным на рис. 1.8, а и б.

Для периодических движений понятия устойчивости по Ляпунову и орбитной устойчивости различаются. Периодическое движение $x = x^*(t)$ называется устойчивым по Ляпунову, если для любого сколь угодно малого $\varepsilon > 0$ можно указать такое δ (ε), что для всякого другого движения $x = x(t)$, для которого $\rho(x^*(t_0), x(t_0)) < \delta$, при всех $t > t_0$ выполняется неравенство $\rho(x^*(t), x(t)) < \varepsilon$ (рис. 1.9). Определение орбитной устойчивости состоит в следующем. Пусть γ — замкнутая фазовая траектория, отвечающая периодическому движению $x = x^*(t)$, устойчивость которого исследуется, а $x = x(t)$ ($-\infty < t < \infty$) — произвольная фазовая кривая. Периодическое

движение $x = x^*(t)$ называется орбитно устойчивым, если для любого $\varepsilon > 0$ можно указать такое $\delta (\varepsilon) > 0$, что при выполнении неравенства $\rho(x(t_0), \gamma) < \delta$ следует

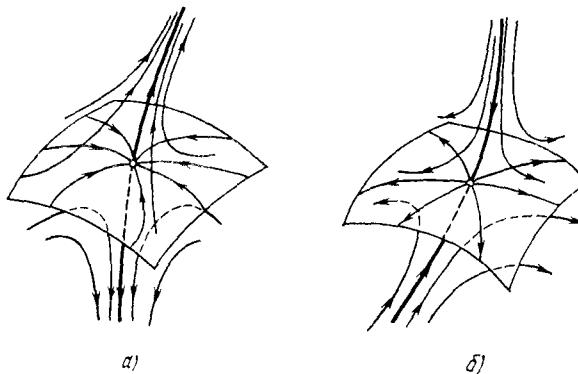


Рис. 1.8

выполнение неравенства $\rho(x(t), \gamma) < \varepsilon$ для всех значений $t > t_0$ (рис. 1.10). Этим определениям можно дать наглядную геометрическую интерпретацию. Требование

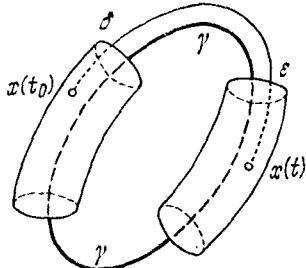


Рис. 1.9

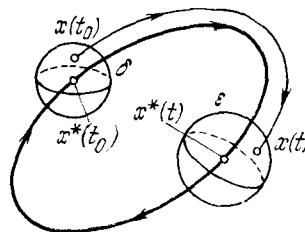


Рис. 1.10

устойчивости по Ляпунову означает, что фазовые точки, расстояние между которыми в начальный момент не превышало δ , в дальнейшем будут находиться друг от друга на расстоянии, меньшем ε . Требование орбитной устойчивости несколько слабее: если в начальный момент расстояние фазовой точки от замкнутой траектории было меньше δ , то в дальнейшем это расстояние не превысит ε . Итак, орбитно устойчивое движение может быть неустойчивым по Ляпунову, однако периодическое движение, устойчивое по Ляпунову, всегда орбитно устойчиво.

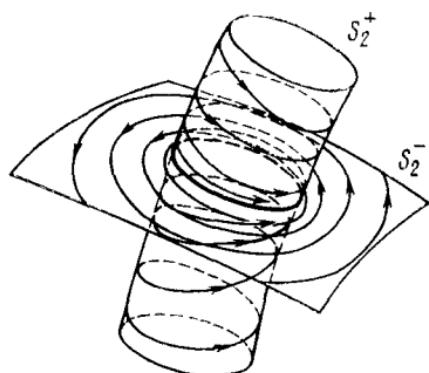


Рис. 1.11

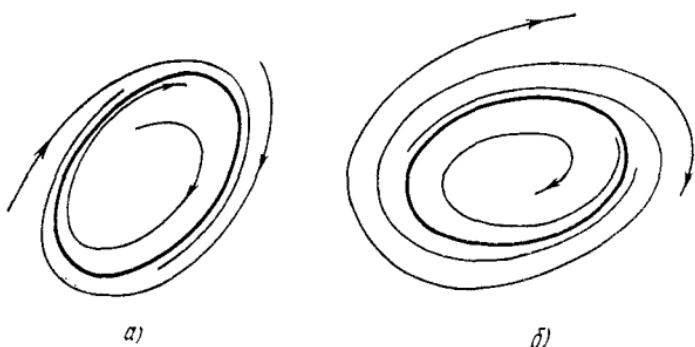


Рис. 1.12

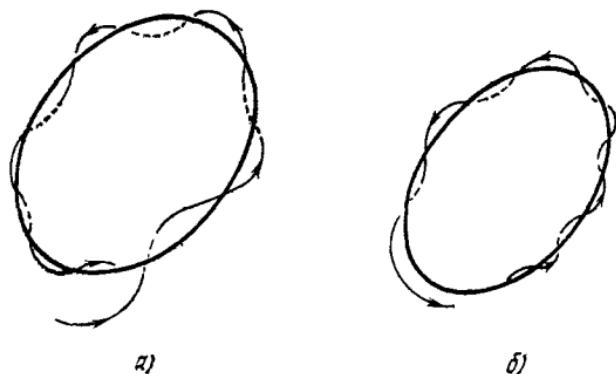


Рис. 1.13

Рассмотрим структуру разбиения фазового пространства на траектории в окрестности периодического движения на примере трехмерного фазового пространства. Пусть $x = x^*(t)$, $y = y^*(t)$, $z = z^*(t)$ — периодическое решение периода τ системы дифференциальных уравнений (1.1). Линеаризуя эти уравнения в окрестности рассматриваемого периодического движения, мы придем к уравнениям в вариациях вида (1.2), в которых частные производные

$$\left(\frac{\partial X}{\partial x} \right)_{x=x^*(t), y=y^*(t), z=z^*(t)}, \dots, \left(\frac{\partial Z}{\partial z} \right)_{x=x^*(t), y=y^*(t), z=z^*(t)}$$

представляют собою периодические функции периода τ . Пусть $\xi^i(t)$, $\eta^i(t)$, $\zeta^i(t)$ ($i = 1, 2, 3$) — фундаментальная система решений этих дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами, т. е. система решений, удовлетворяющая начальным условиям $\xi^i(0) = \delta_{1i}$, $\eta^i(0) = \delta_{2i}$, $\zeta^i(0) = \delta_{3i}$, где δ_{ij} — символ Кронекера, равный единице при $i = j$ и нулю при $i \neq j$. Характеристическое уравнение для рассматриваемого периодического движения имеет вид

$$\chi(\lambda) = \begin{vmatrix} \xi^1(\tau) - \lambda & \eta^1(\tau) & \zeta^1(\tau) \\ \xi^2(\tau) & \eta^2(\tau) - \lambda & \zeta^2(\tau) \\ \xi^3(\tau) & \eta^3(\tau) & \zeta^3(\tau) - \lambda \end{vmatrix} = 0. \quad (1.4)$$

Один из корней этого уравнения всегда равен единице. В зависимости от значений двух других корней возможны следующие основные случаи:

1. Корни действительные и разных знаков. Это — случай седлового периодического движения (рис. 1.11). Через замкнутую траекторию, соответствующую седловому периодическому движению, проходят две интегральные поверхности S_3^+ и S_2^- , состоящие из фазовых кривых, асимптотически приближающихся к кривой γ при $t \rightarrow +\infty$ и соответственно при $t \rightarrow -\infty$.

2. Корни действительные и отрицательные (положительные). Этот случай, изображенный на рис. 1.12, *a* и *b*, соответствует устойчивому (неустойчивому) узловому периодическому движению.

3. Корни комплексные с отрицательными (положительными) действительными частями. В этом случае, изображенном на рис. 1.13, *a* и *b*, фазовые кривые возмущенного движения напоминают винтовые линии, осью которых является замкнутая траектория.