

ГЛАВА 2

ИССЛЕДОВАНИЕ ПРОСТЕЙШИХ КОЛЕБАТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ

В этой главе на ряде конкретных примеров будут изучены колебательные процессы в системах, поведение которых описывается дифференциальными уравнениями первого порядка, в консервативных системах второго порядка, а также в системах любого порядка с полной диссириацией энергии.

§ 1. Системы первого порядка

Динамической системой первого порядка (или системой с половиной степенью свободы) называется динамическая модель, движение которой описывается одним дифференциальным уравнением первого порядка

$$\frac{dx}{dt} = f(x), \quad (2.1)$$

где переменная x характеризует состояние системы, а функция $f(x)$ предполагается аналитической на всей прямой x , за исключением, быть может, конечного числа точек *). Фазовое пространство рассматриваемой системы одномерно, поэтому исследуемое движение можно представить движением изображающей точки на фазовой прямой.

Если по своему физическому смыслу переменная x является периодической с периодом 2π , т. е. значения x и $x + 2\pi$ соответствуют одному и тому же состоянию системы, то функция $f(x)$ будет также периодической с периодом 2π . Фазовым пространством такой системы

*) Функция $f(x)$ называется аналитической, если в окрестности каждой точки она может быть разложена в степенной ряд с отличным от нуля радиусом сходимости.

будет отрезок прямой длиной 2π с отождествленными концами. Соединив эти концы, получим окружность единичного радиуса.

В общем случае будем рассматривать фазовое пространство в виде бесконечной прямой (рис. 2.1). Основными элементами, которые полностью определяют разбиение фазовой прямой на траектории, являются состояния

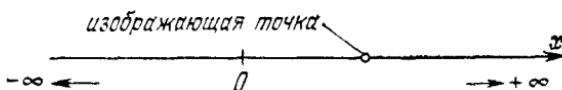


Рис. 2.1

равновесия системы. Равновесные значения $x = x_k$, обращающие функцию $f(x)$ в нуль, представляют собой самостоятельные фазовые траектории. Остальные траектории состоят из отрезков фазовой прямой, заключенных между корнями уравнения $f(x) = 0$, или из полупрямых, образующих интервалы между одним из корней и бесконечностью. Направление движения изображающей точки по этим траекториям определяет знак функции $f(x)$: при $f(x) > 0$ изображающая точка движется вправо,

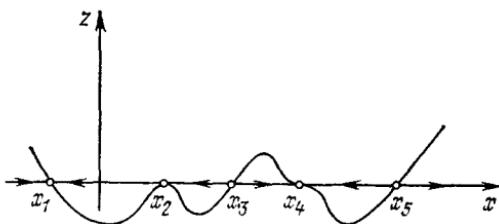


Рис. 2.2

а при $f(x) < 0$ — влево. Зная вид кривой $z = f(x)$, несложно установить разбиение фазовой прямой на траектории. Пример такого разбиения приведен на рис. 2.2, где стрелками указано направление движения изображающей точки. Из вида разбиения фазовой прямой (рис. 2.2) на траектории непосредственно следует, что состояния равновесия системы в точках $x = x_1, x = x_4$ являются устойчивыми, а в точках $x = x_2, x = x_3, x = x_5$ — неустойчивыми.

На рис. 2.2 видно, что в устойчивых состояниях равновесия производная $f'(x_k) < 0$, а в неустойчивых состояниях $f'(x_k) > 0$. Значение $f'(x_k) = 0$ может быть как в точках устойчивого, так и неустойчивого состояния равновесия (см., например, точки $x = x_2$, $x = x_4$ на рис. 2.2). Поскольку характер движения в системе первого порядка полностью определяется видом функции $f(x)$, представляет интерес рассмотреть случай, когда эта функция зависит от некоторого параметра λ , и изучить влияние параметра λ на характер фазового портрета рассматриваемой системы.

Для этого, согласно предыдущему, достаточно изучить поведение корней уравнения

$$f(x, \lambda) = 0 \quad (2.2)$$

в зависимости от изменения параметра λ . Уравнение (2.2) можно представить на плоскости $x\lambda$ в виде кривой (рис. 2.3).

Точки пересечения прямой $\lambda = \lambda_0 = \text{const}$ и кривой (2.2) определяют значения $x = x_k$ в состояниях равновесия, число которых характеризует качественную картину разбиения фазовой прямой на траектории. Из рис. 2.3 следует, что при значениях λ_0 в интервале $\lambda_1 < \lambda_0 < \lambda_2$ система обладает тремя состояниями равновесия, а при значениях $\lambda_0 < \lambda_1$ или $\lambda_0 > \lambda_2$ — одним состоянием равновесия. Значения параметра λ , при переходе через которые происходит качественное изменение фазового портрета системы, называются бифуркационными (λ_1 и λ_2 на рис. 2.3). Устойчивость состояний равновесия по-прежнему определяется знаком производной по x : равновесие в точке $x = x_k$ устойчиво, если $f'_x(x_k, \lambda_0) < 0$, и неустойчиво, если $f'_x(x_k, \lambda_0) > 0$.

Устойчивость состояний равновесия легко определить по бифуркационной диаграмме, которая получается из рис. 2.3 путем несложного дополнения. Заметив, что кривая $f(x, \lambda) = 0$ разделяет плоскость $x\lambda$ на две области: $f(x, \lambda) > 0$ и $f(x, \lambda) < 0$, заштрихуем область, в которой $f(x, \lambda) > 0$. Тогда, согласно смыслу производной $f'_x(x, \lambda)$, если точка, соответствующая состоянию равновесия $x =$

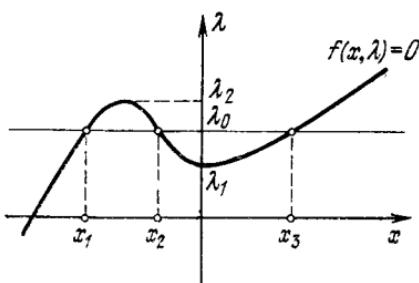


Рис. 2.3

$= x_k$, лежит на кривой $f(x, \lambda) = 0$ справа от заштрихованной области, то $f'_x(x_k, \lambda) < 0$, а если слева, то $f'_x(x_k, \lambda) > 0$. В результате получаем бифуркационную диаграмму (рис. 2.4), на которой точками отмечены участки кривой

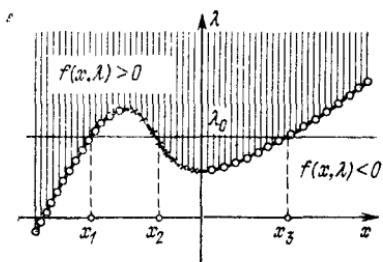


Рис. 2.4

$f(x, \lambda) = 0$, соответствующие устойчивым состояниям равновесия, а крестиками — неустойчивым состояниям равновесия. Изучение фазового портрета системы первого порядка позволяет сделать следующий вывод: если функция $f(x)$ аналитическая на всей прямой, то

периодические движения

в системе невозможны. Однако, как будет видно из приводимых ниже примеров, в случае неоднозначности функции $f(x)$ могут возникнуть условия, при которых в системе возможны периодические движения.

Систему первого порядка можно рассматривать с точки зрения динамики как вырожденную систему второго порядка. В самом деле, уравнение динамики автономной системы с одной степенью свободы, разрешенное относительно старшей производной, имеет вид

$$\ddot{q} = F(q, \dot{q}). \quad (2.3)$$

Уравнение (2.3) представляет собою оператор, который по заданным в момент времени t величинам q , \dot{q} позволяет найти эти же величины в момент времени $t + \Delta t$. Следовательно, состояние системы с одной степенью свободы определяется двумя величинами: обобщенной координатой и обобщенной скоростью. Рассмотрим три логически возможных случая, когда динамика системы, описываемой уравнением (2.3), сводится к изучению решений некоторого дифференциального уравнения первого порядка.

1. Обобщенная координата q не входит в уравнение (2.3) явно. В этом случае уравнение (2.3) принимает вид

$$\ddot{q} = f(\dot{q}). \quad (2.4)$$

Отсюда, вводя обозначение $x = \dot{q}$, приходим к уравнению (2.1). Каков физический смысл решений уравнения (2.1) в рассматриваемом случае? Состояния равновесия для

уравнения (2.1), определяемые корнями уравнения $f(x) = 0$, соответствуют стационарным движениям исходной системы. При этом координата q изменяется во времени с постоянной скоростью $\dot{q}_k = x_k = \text{const}$, где $f(x_k) = 0$.

Нулевой корень уравнения $f(x) = 0$ соответствует одномерному многообразию состояний равновесия исходной системы, потому что уравнению (2.4) удовлетворяет множество значений $q = \text{const}$. Устойчивость этого многообразия определяется устойчивостью точки $x = 0$ на фазовой прямой x . ○

2. Уравнение (2.3) может быть представлено в виде

$$\mu \ddot{q} = F_1(q, \dot{q}), \quad (2.5)$$

где μ — некоторый параметр, который предполагается достаточно малым. В этом случае мы приходим к дифференциальному уравнению с малым параметром при старшей производной. Фазовая плоскость при $\mu \rightarrow 0$ разбивается на две области: область быстрых движений и область медленных движений (см. гл. 6). Медленные движения описываются дифференциальным уравнением первого порядка $F_1(q, \dot{q}) = 0$. Разрешая это уравнение относительно \dot{q} (что, впрочем, не является существенным), получаем дифференциальное уравнение вида (2.1).

Рассматриваемый случай может возникнуть, например, при исследовании движения тела в вязкой среде, когда масса тела пренебрежимо мала. При однозначной функции $f(x)$ такая динамическая модель оказывается вполне корректной, однако в случае неоднозначности $f(x)$ хотя бы на некотором интервале изменения x можно прийти к противоречивой модели. В последнем случае возникающее противоречие устраняется или при помощи дополнительного постулата о мгновенном перескоке изображающей точки в некоторое положение на фазовой прямой, которое определяется или из энергетических соображений, или при помощи рассмотрения предельных движений системы второго порядка при стремлении малого параметра μ к нулю.

3. Уравнение (2.3) может быть представлено в виде $\frac{d}{dt} \Phi(q, \dot{q}) = 0$. Отсюда получаем первый интеграл движения

$$\Phi(q, \dot{q}) = h \quad (h = \text{const}), \quad (2.6)$$

который при заданном значении произвольной постоянной h и является дифференциальным уравнением первого порядка, описывающим динамику первоначальной системы в рассматриваемом случае.

После этих замечаний общего характера перейдем к рассмотрению конкретных примеров.

Пример 1. Однофазный асинхронный двигатель [1]. Движение ротора асинхронного двигателя, статор которого питается однофазным переменным током, описывается уравнением

$$I \frac{d\omega}{dt} = M(\omega) - N(\omega), \quad (2.7)$$

где ω — угловая скорость вращения ротора, I — момент инерции ротора, $M(\omega)$ — электромеханический вращающий момент, $N(\omega)$ — момент сил трения на валу ротора. Зависимость вращающего момента $z = M(\omega)$ от числа оборотов ротора однофазного двигателя имеет вид, изображенный на рис. 2.5. На этой же диаграмме показан график зависимости $z = N(\omega)$, который получается при учете сил сухого и вязкого трения. Состояния равновесия

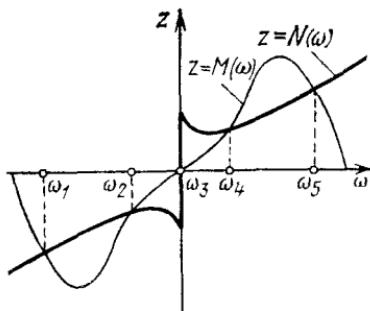


Рис. 2.5

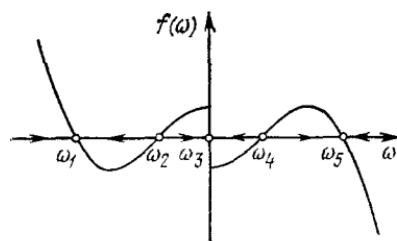


Рис. 2.6

для уравнения (2.7), соответствующие режимам равномерного вращения ротора (или его состоянию покоя при $\omega = 0$), определяются корнями уравнения

$$M(\omega) - N(\omega) = 0, \quad (2.8)$$

или, что то же самое, абсциссами точек пересечения графиков функций $z = M(\omega)$ и $z = N(\omega)$ на рис. 2.5.

Функция $f(\omega) = \frac{1}{I} [M(\omega) - N(\omega)]$, график которой приведен на рис. 2.6, позволяет найти разбиение фазовой

прямой ω на траектории и определить на ней устойчивость состояний равновесия. Поскольку корни уравнения (2.8) расположены симметрично относительно начала координат, динамика рассматриваемой системы не зависит от направления вращения ротора. Согласно рис. 2.6, состояние покоя $\omega = 0$ ротора и его вращения с угловыми скоростями ω_1 и ω_5 устойчивы, а вращения с угловыми скоростями ω_2 и ω_4 неустойчивы. Отсюда следует, что ротор такого двигателя, находясь в покое, не может прийти во вращение «без посторонней помощи». Если мы хотим, чтобы ротор вращался с угловой скоростью ω_5 , ему следует сообщить первоначальную угловую скорость, превышающую ω_4 .

Заметим, что аналогичным образом можно исследовать вращение любого динамически осесимметричного тела, движение которого описывается уравнением вида (2.7). Более того, приводимый ниже пример показывает, что движение системы совершенно другой природы также описывается уравнением вида (2.7).

Пример 2. Движение судна на подводных крыльях. Уравнение прямолинейного движения судна на подводных крыльях без учета килевой и бортовой качки может быть записано в виде

$$\frac{dv}{dt} = T(v) - S(v), \quad (2.9)$$

где v — скорость судна, $T(v)$ — сила тяги винта и $S(v)$ — результирующая сила сопротивления движению, отнесенные к единице массы судна. При заданном режиме работы двигателя сила тяги $T(v)$ обычно монотонно убывает с увеличением скорости, а график зависимости $S(v)$ представляет собой возрастающую кривую, которую имеет на некотором интервале скоростей падающий участок (рис. 2.7). Наличие падающего участка на кривой $S = S(v)$ связано с изменением условий движения судна при выходе корпуса судна из воды. При малых скоростях движения судно на подводных крыльях ведет себя как судно с обычным корпусом: с увеличением скорости сопротивление движению возрастает. Однако по мере увеличения скорости возникает гидродинамическая подъемная сила, в результате чего корпус судна постепенно выходит из воды, и на интервале скоростей, при которых судно полностью выходит из воды (рис. 2.8), сила сопротивления движению уменьшается с увеличением скорости. После

этого судно переходит в режим движения на подводных крыльях. При дальнейшем повышении скорости движения судна поверхность погруженных в воду стоек с подводными крыльями почти не уменьшается, и сопротивление движению снова возрастает с увеличением скорости.

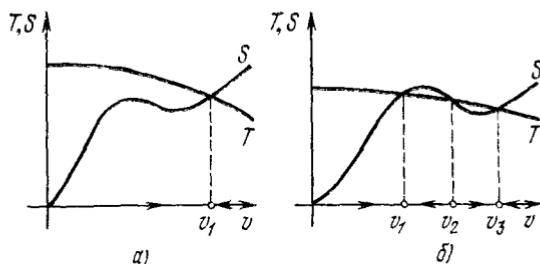


Рис. 2.7

Состояния равновесия для уравнения (2.9), которые соответствуют режимам равномерного движения судна, определяются уравнением

$$T(v) = S(v).$$

Здесь возможны случаи, когда имеется либо один, либо три режима равномерного движения судна на подводных крыльях. Согласно рис. 2.7, на котором эти случаи изображены, один режим является всегда устойчивым

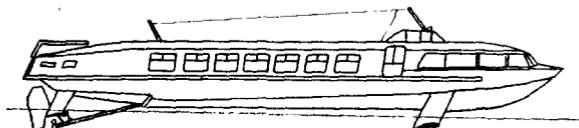


Рис. 2.8

(рис. 2.7, а), а при наличии трех режимов (рис. 2.7, б) движение со скоростями v_1 и v_3 устойчиво, а со скоростью v_2 — неустойчиво.

Пример 3. Осциллятор с заданной энергией. Уравнение гармонического осциллятора

$$\ddot{x} + x = 0, \quad (2.10)$$

где производная берется по безразмерному времени $\tau = \omega t$ (ω — круговая частота), допускает первый интеграл

$$\dot{x}^2 + x^2 = 2h, \quad (2.11)$$

выражающий сохранение механической энергии осциллятора. Пусть задана величина

$$2h = R^2 = \text{const.}$$

Тогда движение осциллятора описывается дифференциальным уравнением (2.11), т. е. мы получаем динамическую систему первого порядка. Введем новую переменную φ посредством соотношений

$$\begin{aligned} x = R \sin \varphi, \quad \dot{x} = R \cos \varphi, \\ (2.12) \end{aligned}$$

геометрический смысл которых ясен из рис. 2.9. Соотношениями (2.12) уравнение (2.11) удовлетворяется тождественно. Найдем из (2.12) величину $\ddot{x} = -R\dot{\varphi} \sin \varphi$. Подставляя это выражение вместе с (2.12) в уравнение (2.10), получаем дифференциальное уравнение

$$\dot{\varphi} = 1, \quad (2.13)$$

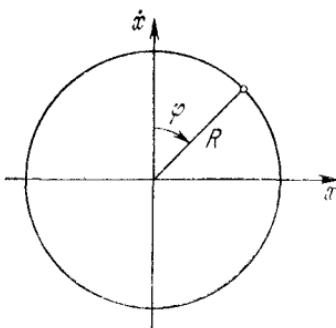


Рис. 2.9

которое и описывает движение осциллятора в рассматриваемом случае. Из соотношений (2.12) следует, что введенная нами переменная φ является периодической с периодом 2π , поэтому в качестве фазового пространства рассматриваемой системы можно взять окружность, изображенную на рис. 2.9.

Согласно уравнению (2.13), изображающая точка при любых начальных условиях движется по фазовой окружности по ходу часовой стрелки с постоянной скоростью, что и соответствует гармоническим колебаниям осциллятора.

§ 2. Консервативные системы второго порядка

Гармонический осциллятор, рассмотренный выше, представляет собою пример автономной консервативной системы второго порядка. Как мы видели, такая система обладает интегралом движения (обычно интегралом сохранения энергии). Фиксируя значение произвольной постоянной в интеграле движения, мы получаем динамическую систему с одномерным фазовым пространством,