

выражающий сохранение механической энергии осциллятора. Пусть задана величина

$$2h = R^2 = \text{const.}$$

Тогда движение осциллятора описывается дифференциальным уравнением (2.11), т. е. мы получаем динамическую систему первого порядка. Введем новую переменную φ посредством соотношений

$$\begin{aligned} x = R \sin \varphi, \quad \dot{x} = R \cos \varphi, \\ (2.12) \end{aligned}$$

геометрический смысл которых ясен из рис. 2.9. Соотношениями (2.12) уравнение (2.11) удовлетворяется тождественно. Найдем из (2.12) величину $\ddot{x} = -R\dot{\varphi} \sin \varphi$. Подставляя это выражение вместе с (2.12) в уравнение (2.10), получаем дифференциальное уравнение

$$\dot{\varphi} = 1, \quad (2.13)$$

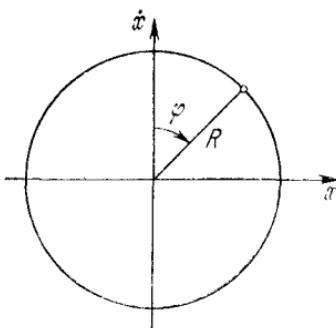


Рис. 2.9

которое и описывает движение осциллятора в рассматриваемом случае. Из соотношений (2.12) следует, что введенная нами переменная φ является периодической с периодом 2π , поэтому в качестве фазового пространства рассматриваемой системы можно взять окружность, изображенную на рис. 2.9.

Согласно уравнению (2.13), изображающая точка при любых начальных условиях движется по фазовой окружности по ходу часовой стрелки с постоянной скоростью, что и соответствует гармоническим колебаниям осциллятора.

§ 2. Консервативные системы второго порядка

Гармонический осциллятор, рассмотренный выше, представляет собою пример автономной консервативной системы второго порядка. Как мы видели, такая система обладает интегралом движения (обычно интегралом сохранения энергии). Фиксируя значение произвольной постоянной в интеграле движения, мы получаем динамическую систему с одномерным фазовым пространством,

которое может представлять замкнутую или незамкнутую кривую, состоящую из одной или нескольких фазовых траекторий. Придавая произвольной постоянной различные значения, получим множество одномерных фазовых пространств, которые в совокупности образуют фазовое пространство консервативной системы второго порядка. В конечном итоге двумерное фазовое пространство этой системы оказывается разбитым на фазовые траектории. Замкнутая фазовая траектория соответствует, как известно, периодическому движению в системе.

Периодические движения в консервативной системе отличаются той особенностью, что они никогда не бывают изолированными. Это связано с тем, что если при некотором значении произвольной постоянной в интеграле движения мы имеем замкнутую фазовую траекторию, то в силу непрерывной зависимости решения дифференциальных уравнений от начальных условий и при близких значениях этой постоянной фазовые траектории будут оставаться замкнутыми. Таким образом, замкнутые траектории образуют континuum, заполняя целые области двумерного фазового пространства. При этом возможны два случая: в первом случае замкнутые траектории, вложенные одна в другую, стягиваются либо к особой точке типа центра, либо к сепаратрисам седловых особых точек. В случае, когда фазовое пространство представляет собою цилиндрическую поверхность, замкнутые траектории могут охватывать фазовый цилиндр.

Мы видим, что изучение консервативных систем второго порядка позволяет довольно простыми средствами полностью исследовать их динамику. Решение этой задачи оказывается полезным также при изучении движений систем, близких к консервативным. Рассмотрим примеры консервативных систем.

Пример 1. Маятник на врачающейся платформе. Пусть физический маятник, представляющий собою тело вращения с главными моментами инерции A и C , может свободно поворачиваться вокруг горизонтальной оси подвеса. Основание подвеса вращается с постоянной угловой скоростью ω вокруг вертикальной оси. Рассмотрим общий случай, когда точка подвеса маятника не лежит на оси вращения платформы, на которой установлен маятник (рис. 2.10). Пусть a, b, c — декартовы координаты точки подвеса маятника в системе координат $Oxyz$, скрепленной с платформой так, что ось Oz совпадает с осью вращения

платформы, m — масса маятника, l — расстояние его центра масс от оси подвеса, θ — угол отклонения маятника от вертикали, тогда функция Лагранжа L имеет вид

$$L = \frac{1}{2} A\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}(A - C)\omega^2 \sin^2 \theta + mal\omega^2 \sin \theta + mgl \cos \theta.$$

Если пренебречь трением и ввести безразмерные величины

$$t_{\text{нов}} = t \sqrt{\frac{mg l}{A}}, \quad \alpha = \frac{(A - C)\omega^2}{2mgl}, \quad \beta = \frac{a\omega^2}{g}, \quad (2.14)$$

то движение маятника описывается уравнением

$$\dot{\theta} - \alpha \sin 2\theta - \beta \cos \theta + \sin \theta = 0. \quad (2.15)$$

Из уравнения (2.15) непосредственно видно, что величина b не влияет на динамику маятника. Фазовым пространством рассматриваемой системы является цилиндр с координатами θ , $\dot{\theta}$ ($0 \leq \theta < 2\pi$). Поскольку функция Лагранжа L не зависит явно от времени, имеет место обобщенный интеграл энергии

$$\frac{1}{2}\dot{\theta}^2 - \alpha \sin^2 \theta - \beta \sin \theta - \cos \theta = h. \quad (2.16)$$

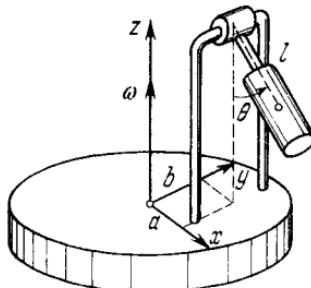


Рис. 2.10

Уравнение (2.16) определяет связь между θ и $\dot{\theta}$ и, тем самым, является уравнением фазовых траекторий. Из (2.16) следует, что

$$\dot{\theta} = \pm \sqrt{2[f(\theta) + h]}. \quad (2.17)$$

Таким образом, характер поведения функции

$$f(\theta) = \alpha \sin^2 \theta + \beta \sin \theta + \cos \theta \quad (2.18)$$

полностью определяет характер разбиения фазового цилиндра θ , $\dot{\theta}$ на траектории. Используя соотношение (2.17), нетрудно получить фазовую траекторию для любого заданного значения h . Для этого нужно построить график функции (2.18) и затем, задавая значения θ , последовательно извлекать квадратные корни из выражения $2[f(\theta) + h]$, откладывая получаемые значения на фазовом цилиндре от оси θ в положительном и отрицательном направлениях оси $\dot{\theta}$. Примеры такого построения приведены на

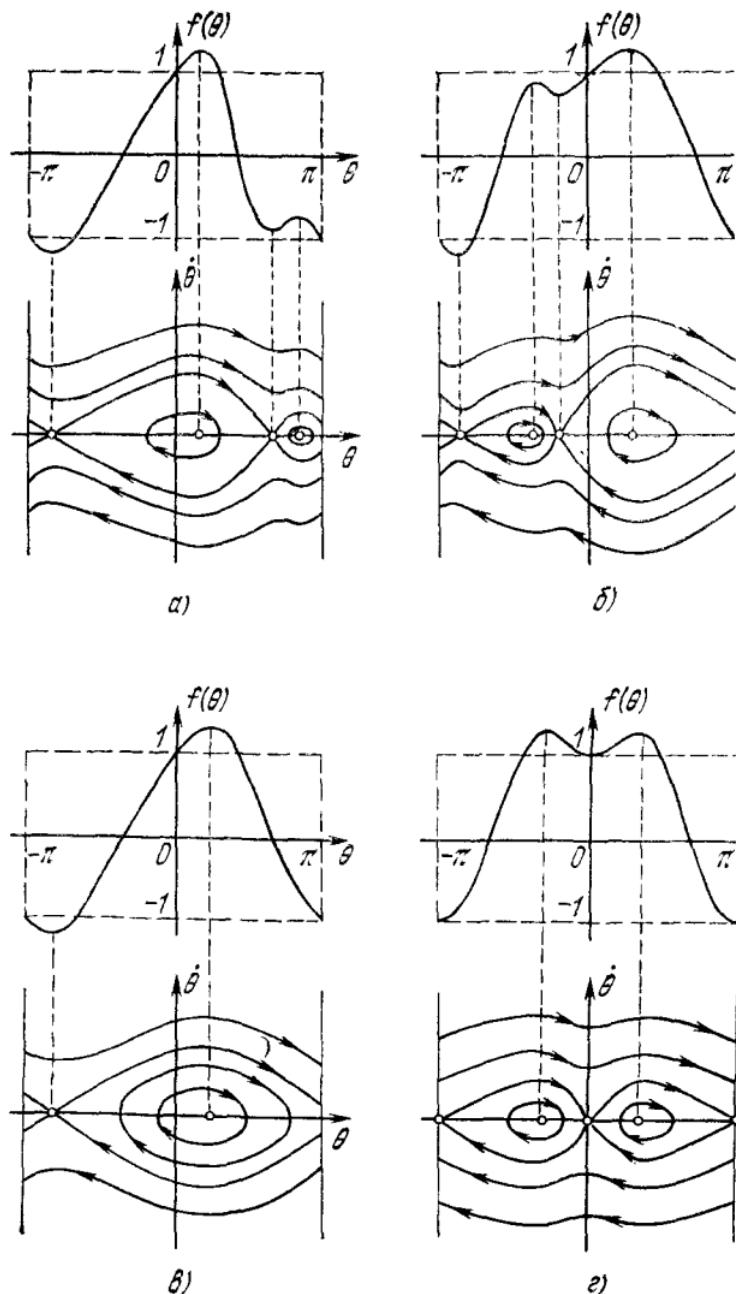


Рис. 2.41

рис. 2.11. Экстремальные значения на графике функции $f(\theta)$ соответствуют состояниям равновесия уравнения (2.15), т. е. особым точкам на фазовом цилиндре $\theta, \dot{\theta}$. Из выражения (2.18) функции $f(\theta)$ следует, что в зависимости от значений физических параметров α, β могут существовать или две, или четыре особые точки. Бифуркационное соотношение параметров α, β , разделяющее эти случаи, находится из условия слияния двух особых точек, что осуществляется при одновременном выполнении двух соотношений: $f'(\theta) = 0$ и $f''(\theta) = 0$ или, согласно (2.18),

$$\alpha \sin 2\theta + \beta \cos \theta - \sin \theta = 0, \quad 2\alpha \cos 2\theta - \beta \sin \theta - \cos \theta = 0.$$

Разрешая эти соотношения относительно α и β , получаем параметрическое представление бифуркационной кривой $\beta = \beta(\alpha)$:

$$\alpha = (2 \cos^3 \theta)^{-1}, \quad \beta = -\operatorname{tg}^3 \theta, \quad (2.19)$$

где θ является текущим параметром. Из выражений (2.14) следует, что параметры α, β могут принимать любые действительные значения ($-\infty < \alpha < +\infty, -\infty < \beta < +\infty$). Однако достаточно рассмотреть лишь область $\beta \geq 0$, потому что случай $\beta < 0$ сводится к случаю $\beta > 0$ путем замены θ на $-\theta$. Согласно (2.19), на полуплоскости $\alpha, \beta, \beta > 0$, протекают две ветви кривой $\beta = \beta(\alpha)$, соответствующие изменению θ в интервале $-\pi/2 < \theta \leq 0$ для значений $\alpha > 0$ и в интервале $\pi/2 < \theta \leq \pi$ для значений

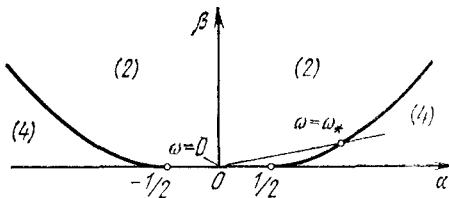


Рис. 2.12

$\alpha < 0$ (рис. 2.12). Кривая (2.19) разбивает полу平面ность $\beta > 0$ на области (2) и (4). При параметрах α, β , находящихся в области (4), на фазовом цилиндре имеются четыре особые точки (рис. 2.11, а, б), а в области (2) — две особые точки (рис. 2.11, в). Для значений парамет-

ров α, β на прямой $\beta = 0$ график кривой (2.19) является симметричным относительно оси $\theta = 0$. В качестве примера на рис. 2.11, *г* изображена функция $f(\theta)$ и соответствующий фазовый портрет системы, которые получаются при $\alpha < -0,5$; $\beta = 0$. Для параметров α, β , принимающих значения $\alpha = \pm 0,5$; $\beta = 0$, происходит слияние трех особых точек: при $\theta = 0$ для $\alpha = +0,5$; $\beta = 0$ и при $\theta = \pm\pi$ для $\alpha = -0,5$; $\beta = 0$.

Проведенное исследование показывает, что вид разбиения фазового цилиндра на траектории зависит от угловой скорости ω вращения платформы и от знака разности $A - C$. При заданных параметрах системы и возрастании ω от нуля изображающая точка на плоскости $\alpha\beta$ будет двигаться, согласно выражениям (2.14), из начала координат вдоль прямой $\beta = \frac{2mal}{A - C} \alpha$. Если выполнено неравенство $mal < |A - C|$, то найдется такое значение $\omega = \omega_*$, при котором изображающая точка пересечет бифуркационную кривую (2.19) и затем при $\omega > \omega_*$ окажется в области (4). Критическое значение ω_* определяется выражением

$$\omega_*^2 = \frac{g\gamma}{a(1 - \gamma^{2/3})^{3/2}}, \quad \gamma = \frac{mal}{|A - C|}.$$

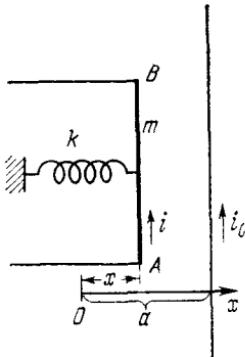


Рис. 2.13

В случае прямой, изображенной на рис. 2.12, при переходе ω через значение $\omega = \omega_*$ в сторону возрастания ω фазовый портрет системы, изображенный на рис. 2.11, *в*, превращается в фазовый портрет, изображенный на рис. 2.11, *а*. В момент достижения значения $\omega = \omega_*$ на фазовом цилиндре рождается сложная особая точка типа точки возврата первого рода, которая затем распадается на особую точку типа центра и на седловую особую точку. Замкнутые фазовые траектории, охватывающие особую точку типа центра, соответствуют колебательным движениям маятника, а кривые, охватывающие фазовый цилиндр, — вращательным движениям маятника вокруг своей оси подвеса.

Пример 2. Движение отрезка провода с током [1]. Пусть неподвижный бесконечный прямолинейный провод,

питаемый постоянным током i_0 , взаимодействует с параллельным ему отрезком провода AB длины l и массы m . К подвижному проводу AB , удерживаемому пружиной жесткости k , при помощи перпендикулярных ему проводников подводится постоянный ток i (рис. 2.13). Возьмем за начало отсчета на оси Ox то положение провода, при котором пружина не деформирована, и обозначим через a координату провода с током i_0 . Будем предполагать, что отрезок AB может перемещаться вдоль направления Ox в области $x < a$, оставаясь всегда параллельным неподвижному проводу. Тогда силу взаимодействия между проводами можно принять равной $\frac{2blli_0}{a-x}$, где значение b определяется используемой системой единиц. Принимая во внимание силу пружины $-kx$, получим следующее выражение результирующей силы, действующей на провод AB :

$$F = -kx + \frac{2blli_0}{a-x}.$$

Отсюда следует, что сила F является потенциальной, поэтому движение провода AB описывается функцией Лагранжа

$$L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}kx^2 - 2blli_0 \ln(a-x).$$

В безразмерных величинах

$$\tau_{\text{нов}} = t \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad \xi = \frac{x}{a}, \quad \lambda = \frac{2blli_0}{ka^2}$$

уравнение движения провода AB имеет вид

$$\ddot{\xi} + \xi - \frac{\lambda}{1-\xi} = 0 \quad (\xi < 1).$$

Следовательно, параметр λ и координата ξ_0 положения равновесия провода AB связаны соотношением

$$f(\xi_0, \lambda) \equiv \xi_0^2 - \xi_0 + \lambda = 0, \quad (2.20)$$

которое представляет собой уравнение (2.2), рассмотренное в § 1. Согласно (2.20), бифуркационная диаграмма имеет вид, показанный на рис. 2.14, где светлыми точками обозначены устойчивые состояния равновесия, а крестиками — неустойчивые. При значениях $0 < \lambda < \frac{1}{4}$ сис-

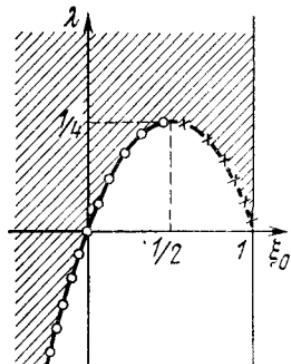


Рис. 2.14

также обладает двумя состояниями равновесия: устойчивым и неустойчивым, а при $\lambda < 0$ (знак λ изменяется при изменении направления одного из токов) — одним устойчивым состоянием равновесия. В точке $(\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$ производная $f_{\xi}(\xi_0, \lambda) = 0$, поэтому $\lambda = \frac{1}{4}$ есть бифуркационное значение параметра. Для построения фазового портрета рассматриваемой системы напишем интеграл энергии. В безразмерных величинах интеграл энергии имеет вид

$$\frac{1}{2}\dot{\xi}^2 + \frac{1}{2}\xi^2 + \lambda \ln(1 - \xi) = h. \quad (2.21)$$

Отсюда $\dot{\xi} = \sqrt{2h + f(\xi)}$, где $f(\xi) = -2\lambda \ln(1 - \xi) - \xi^2$. При помощи графика функции $f(\xi)$ и построения, аналогичного проведенному в предыдущем примере, получаем

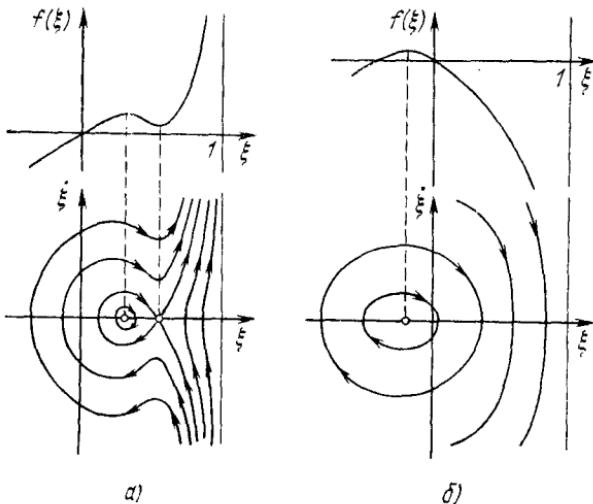


Рис. 2.15

разбиение фазовой полуплоскости $\xi < 1$ на траектории, изображенное на рис. 2.15, *а* для случая $0 < \lambda < \frac{1}{4}$ и на рис. 2.15, *б* для случая $\lambda < 0$. Подставляя в интеграл энергии (2.21) координаты седловой точки $\xi_* = \frac{1}{2} +$

$+ \sqrt{\frac{1}{4} - \lambda}$, $\dot{\xi}_* = 0$, находим уравнение сепаратрисы

$$\dot{\xi} + \xi^2 - \xi_*^2 + 2\lambda \ln \frac{1 - \xi}{1 - \xi_*} = 0. \quad (2.22)$$

Фазовый портрет рис. 2.15, а указывает на то, что при начальных условиях, при которых фазовая точка лежит внутри сепаратрисы (2.22), отрезок провода AB всегда совершает периодическое движение. При любых начальных условиях вне сепаратрисы (2.22) колебательное движение провода невозможно. В случае $\lambda < 0$ (см. рис. 2.15, б) провод AB при любых начальных условиях совершает колебания.

При значениях параметра λ в области $\lambda > 1/4$ система не имеет состояний равновесия. Фазовый портрет для этого случая изображен на рис. 2.16. При любых начальных условиях провод AB в конце концов приближается с возрастающей скоростью к бесконечному проводу.

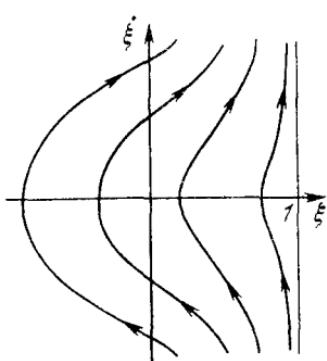


Рис. 2.16

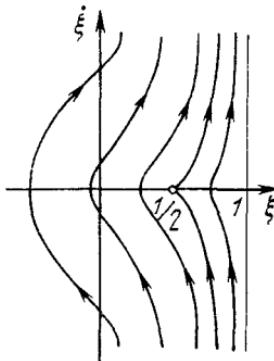


Рис. 2.17

При бифуркационном значении $\lambda = 1/4$ фазовый портрет системы имеет вид, изображенный на рис. 2.17. На фазовой полуплоскости $\xi < 1$ в этом случае имеется единственная особая точка ($\xi = 1/2$, $\dot{\xi} = 0$), которую можно рассматривать как результат слияния двух особых точек: центра и седла. Периодические движения в системе при $\lambda = 1/4$ также невозможны.

§ 3. Системы с полной диссипацией энергии

Рассеяние энергии, связанное с наличием трения, оказывает существенное влияние на характер движения динамической системы, поэтому изучение этого влияния представляет определенный интерес. Наиболее простые закономерности выявляются в системе с полной дисси-