Фазовый портрет рис. 2.15, *а* указывает на то, что при начальных условиях, при которых фазовая точка лежит внутри сепаратрисы (2.22), отрезок провода AB всегда совершает периодическое движение. При любых начальных условиях вне сепаратрисы (2.22) колебательное движение провода невозможно. В случае $\lambda < 0$ (см. рис. 2.15, *б*) провод AB при любых начальных условиях совершает колебания.

При значениях параметра λ в области $\lambda > {}^1/_4$ система не имеет состояний равновесия. Фазовый портрет для этого случая изображен на рис. 2.16. При любых начальных условиях провод AB в конце концов приближается с возрастающей скоростью к бесконечному проводу.

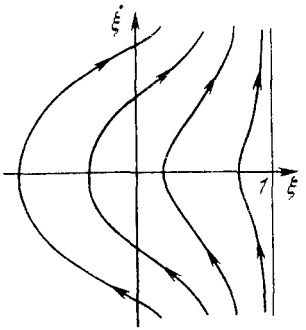

Рис. 2.16

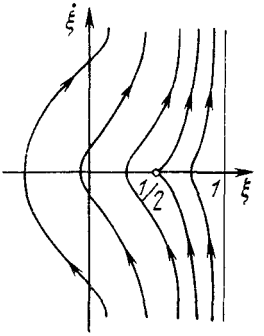

Рис. 2.17

При бифуркационном значении $\lambda = {}^1/_4$ фазовый портрет системы имеет вид, изображенный на рис. 2.17. На фазовой полуплоскости $\xi < 1$ в этом случае имеется единственная особая точка ($\xi = {}^1/_2$, $\dot{\xi} = 0$), которую можно рассматривать как результат слияния двух особых точек: центра и седла. Периодические движения в системе при $\lambda = {}^1/_4$ также невозможны.

§ 3. Системы с полной диссипацией энергии

Рассеяние энергии, связанное с наличием трения, оказывает существенное влияние на характер движения динамической системы, поэтому изучение этого влияния представляет определенный интерес. Наиболее простые закономерности выявляются в системе с полной дисси-

пацией энергии, т. е. в такой системе без источников энергии, в которой силы трения действуют по всем степеням свободы. Рассмотрим сначала простейший пример системы с полной диссипацией энергии.

Пример. Линейный осциллятор с вязким трением. Предположим, что сила вязкого трения пропорциональна скорости, тогда малые колебания осциллятора описываются уравнением

$$m\ddot{z} + h\dot{z} + kz = 0,$$

где m — масса, h — коэффициент трения, k — коэффициент упругости осциллятора. Электрическим аналогом этой системы служит колебательный контур с омическим сопротивлением R, подчиняющийся уравнению

$$L\ddot{q} + R\dot{q} + \frac{1}{C}q = 0.$$

Здесь q — заряд конденсатора, C — емкость, L — индуктивность. В безразмерных величинах $x = \frac{z}{z_0} = \frac{q}{q_0}$, $\tau = \sqrt{\frac{k}{m}}\,t = t(\sqrt{LC})^{-1}$, $2\delta = R\sqrt{\frac{C}{L}} = \frac{h}{\sqrt{mk}}$ оба эти уравнения записываются в виде

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + x = 0. \tag{2.23}$$

В отсутствие вязкого трения ($\delta = 0$) получаем консервативную систему. Фазовые траектории на плоскости $x\dot{x}$ представляют собой концентрические окружности с центром в начале координат. Однако для любого сколь угодно малого δ ($0 < \delta \leqslant 1$) фазовый портрет претерпевает качественные изменения. В самом деле, общим решением уравнения (2.23) при $0 < \delta \leqslant 1$ является

$$x = Ae^{-\delta\tau}\cos(\omega\tau + \alpha),$$

где $\omega = \sqrt{1 - \delta^2}$; A, α — произвольные постоянные. Согласно этому решению, параметрические уравнения траекторий на фазовой плоскости xy имеют вид

$$\begin{aligned} x &= Ae^{-\delta\tau}\cos(\omega\tau + \alpha), \\ y &= \dot{x} = -Ae^{-\delta\tau}[\delta\cos(\omega\tau + \alpha) + \omega\sin(\omega\tau + \alpha)]. \end{aligned} \tag{2.24}$$

Если ввести переменные $u = \omega x$, $v = y + \delta x$, то уравнения фазовых траекторий на плоскости uv в полярных координатах ρ, φ ($u = \rho\cos\varphi$, $v = \rho\sin\varphi$) принимают

вид

$$\rho = \omega A e^{-\delta\tau}, \quad \varphi = -(\omega\tau + \alpha),$$

или, после исключения времени τ, $\rho = C \exp \frac{\delta}{\omega} \varphi$, где C — новая произвольная постоянная.

Таким образом, на плоскости uv фазовыми траекториями служит семейство логарифмических спиралей с асимптотической точкой в начале координат. На плоскости xy фазовые траектории также представляют собою спирали, скручивающиеся к началу координат (рис. 2.18).

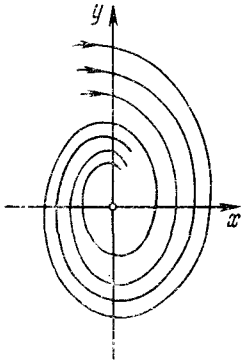

Рис. 2.18

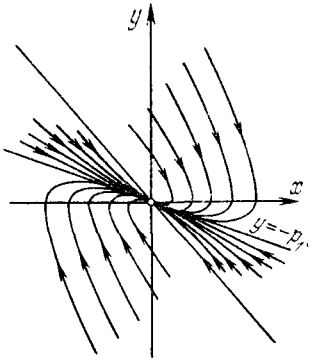

Рис. 2.19

Двигаясь по любой из этих фазовых траекторий, изображающая точка асимптотически (при $t \to +\infty$) приближается к началу координат, где находится особая точка — устойчивый фокус. Точка $x = 0$, $y = 0$ представляет собою отдельную фазовую траекторию, соответствующую асимптотически устойчивому состоянию равновесия осциллятора.

Если коэффициент вязкого трения достаточно велик ($\delta > 1$), то общее решение уравнения (2.23) записывается в виде

$$x = Ae^{+p_1 t} + Be^{+p_2 t}, \quad p_{1,2} = \frac{1}{2}\left(-\delta \pm \sqrt{\delta^2 - 1}\right),$$

где A, B — произвольные постоянные. Отсюда следует, что при любых начальных условиях движение затухает по экспоненциальному закону. В этом случае семейство интегральных кривых $(y + p_1 x)^{p_1} = C\,(y + p_2 x)^{p_2}$ представляет собой на плоскости xy деформированные пара-

болы, касающиеся прямой $y = -p_1 x$ (рис. 2.19, где стрелками отмечено направление движения изображающей точки). Единственная особая точка этого семейства, как и в предыдущем случае, находится в начале координат и представляет собою устойчивый узел.

В граничном случае ($\delta = 1$) также получаем семейство интегральных кривых параболического типа, а в начале координат — устойчивую особую точку типа узла.

Таким образом, при любых значениях физических параметров в области $\delta > 0$ рассматриваемая система обладает единственным глобально устойчивым состоянием равновесия: какие бы начальные условия мы не задавали, система совершает затухающие (периодические или апериодические) движения.

Это свойство является общим для всех динамических систем с полной диссипацией энергии. В самом деле, рассмотрим систему, конфигурация которой определяется n обобщенными координатами $q_1, q_2, \ldots, q_n$. Пусть движение этой системы характеризуется функцией Лагранжа $L = T - V$, где кинетическая энергия $T = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(q)\, \dot{q}_i \dot{q}_j$, а потенциальная энергия $V = V(q)$ — знакоопределенная положительная функция всех обобщенных координат $q_1, q_2, \ldots, q_n$. В такой системе при отсутствии других сил выполняется закон сохранения механической энергии $T + V = h$ ($h = \text{const}$). В фазовом пространстве системы $(q_1, q_2, \ldots, q_n, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_n)$ выражение $T + V = h$ при различных значениях произвольной постоянной h представляет собою семейство вложенных одна в другую замкнутых поверхностей, стягивающихся к началу координат при $h \to 0$ (аналог концентрических окружностей в примере с гармоническим осциллятором).

Пусть теперь в рассматриваемой системе имеется вязкое трение, которое полностью учитывается функцией диссипации Рэлея $F = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}(q)\, \dot{q}_i \dot{q}_j$, являющейся знакоопределенной положительной квадратичной формой всех обобщенных скоростей $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_n$. Уравнения движения этой системы записываются в виде

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = -\frac{\partial F}{\partial \dot{q}_i} \quad (i = 1, 2, \ldots, n). \qquad (2.25)$$

Умножим i-е уравнение системы (2.25) на $\dot{q}_i$ и сложим полученные выражения. Используя затем теорему Эйлера об однородных функциях, приходим к соотношению

$$\frac{d}{dt}(T+V) = -2F < 0.$$

Отсюда следует, что при любых начальных условиях изображающая точка в фазовом пространстве $(q_1, q_2, \ldots, q_n, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_n)$ с течением времени всегда пересекает семейство поверхностей $T + V = h$ снаружи внутрь, приближаясь к началу координат. Таким образом, точка $q_i = 0$, $\dot{q}_i = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ соответствует состоянию глобально устойчивого равновесия системы.