ГЛАВА 3

СИСТЕМЫ ВТОРОГО ПОРЯДКА И ИХ ИССЛЕДОВАНИЕ МЕТОДАМИ КАЧЕСТВЕННОЙ ТЕОРИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

В этой главе рассматриваются автономные динамические системы с одной степенью свободы. Уравнения движения такой системы в общем случае записываются в виде двух дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\dot{x} = P(x, y), \quad \dot{y} = Q(x, y), \tag{3.1}$$

правые части которых нелинейные, вообще говоря, функции x, y. К уравнениям вида (3.1) приводит исследование многих механических и электромеханических систем, а также радиотехнических схем. Уравнения (3.1) достаточно полно изучены методами качественной теории дифференциальных уравнений; ниже излагаются основные результаты этой теории [1—3].

§ 1. Фазовая плоскость и качественная картина разбиения фазовой плоскости на траектории

Согласно уравнениям (3.1), состояние системы второго порядка полностью определяется значениями x, y, поэтому ее фазовое пространство является двумерным, т. е. некоторой поверхностью.

В простейшем случае фазовая поверхность представляет собою обычную плоскость с декартовыми координатами x, y, а функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ являются аналитическими на всей плоскости. Основная задача исследования динамической системы состоит в том, чтобы выяснить качественную картину разбиения фазовой плоскости на траектории или, другими словами, установить топологическую структуру этого разбиения. Под топологической

структурой принято понимать все те свойства, которые остаются инвариантными при топологическом (т. е. взаимно однозначном и непрерывном) преобразовании плоскости в себя.

Оказывается, что для выяснения качественной картины для системы второго порядка нужно знать поведение не всех траекторий, а лишь некоторых из них, называемых особыми траекториями. К последним относятся состояния равновесия, предельные циклы и незамкнутые траектории, у которых хотя бы одна полутраектория (т. е. кривая, описываемая изображающей точкой при $t \to +\infty$ или при $t \to -\infty$ из начального положения точки в момент времени $t = t_0$) является сепаратрисой какого-нибудь состояния равновесия. Если взаимное расположение этих особых траекторий известно и, кроме того, определена устойчивость состояний равновесия и предельных циклов, то мы получаем полную качественную картину разбиения плоскости xy на траектории.

Особые траектории разделяют фазовую плоскость на конечное число ячеек, поскольку из аналитичности правых частей системы (3.1) вытекает, что число особых траекторий конечно. Граница каждой ячейки состоит из особых траекторий, причем точки одной и той же траектории могут быть граничными для нескольких ячеек. Все ячейки заполнены неособыми траекториями, поведение которых одинаково. Если все траектории, принадлежащие одной и той же ячейке, не замкнуты, то они имеют одни и те же предельные множества. Если же внутри какой-нибудь ячейки существует хотя бы одна замкнутая траектория, то все траектории этой ячейки замкнуты, одна лежит внутри другой и между любыми двумя траекториями этой ячейки не могут лежать точки, не принадлежащие этой ячейке. Основной топологической характеристикой, отличающей одну ячейку от другой, является ее связность.

Если граница ячейки состоит из одного граничного континуума, то ячейка называется односвязной, если из двух, трех и т. д., то ячейка соответственно называется двухсвязной, трехсвязной и т. д. Один из граничных континуумов многосвязной ячейки называется внешним граничным континуумом, остальные — внутренними, причем внутренние граничные континуумы могут быть, в частности, отдельными точками. Простейшим примером односвязной ячейки является область внутри окружнос-

ти, двухсвязной — область между двумя концентрическими окружностями.

На рис. 3.1 приведены примеры более сложных ячеек: односвязной (рис. 3.1, *а*) и двухсвязной (рис. 3.1, *б*), где ячейки выделены штриховкой.

Очевидно, что ячейки с неодинаковым числом связности заведомо топологически различны. В качественной

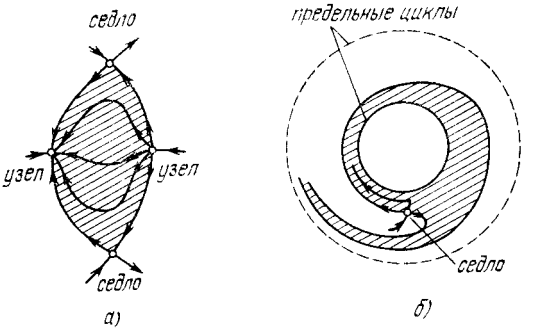

Рис. 3.1

теории доказывается, что всякая ячейка не более чем двухсвязна. В частности, ячейки, заполненные замкнутыми траекториями, всегда двухсвязны. Если двухсвязная ячейка заполнена незамкнутыми траекториями, то один из ее граничных континуумов является предельным множеством при $t \to +\infty$, а другой — предельным множеством при $t \to -\infty$ для траекторий этой ячейки. Используя эти результаты качественной теории, можно исчерпывающим образом описать все возможные границы ячеек и установить условия, при которых две ячейки имеют одинаковую топологическую структуру разбиения на траектории.

Можно также показать, что в случае грубых систем (см. следующий параграф) число различных типов ячеек конечно.

Итак, если известны все состояния равновесия, предельные циклы и их характер, а также расположение сепаратрис, то это позволяет полностью установить топологическую структуру всех ячеек и их взаимное расположение, т. е. полностью выяснить структуру разбиения фазовой плоскости на траектории.