§ 2. Свойство грубости динамической системы

Из физических соображений очевидно, что в дифференциальных уравнениях (3.1), описывающих движение реальной физической системы, ни один из учитываемых нами факторов не может оставаться абсолютно неизменным во времени. Следовательно, правые части уравнений (3.1), вообще говоря, изменяются вместе с входящими в них физическими параметрами. Однако если эти изменения достаточно малы, то, как показывает практика, физическая система как бы не замечает этих изменений, качественные черты ее поведения сохраняются. Поэтому, если мы хотим, чтобы уравнения (3.1) отобразили эту особенность, нужно придать им свойство грубости, а именно: при малых изменениях параметров должна оставаться неизменной качественная структура разбиения фазовой плоскости на траектории. Тем самым выделится класс «грубых» динамических систем. Грубость динамической системы можно трактовать как устойчивость структуры разбиения ее фазового пространства на траектории по отношению к малым изменениям дифференциальных уравнений (3.1).

А. А. Андронов и Л. С. Понтрягин дали строгое математическое определение понятия грубости для систем второго порядка; согласно этому определению динамическая система, описываемая дифференциальными уравнениями (3.1), является грубой, если существует такое малое число $\delta > 0$, что все динамические системы, описываемые дифференциальными уравнениями

$$\dot{x} = P(x, y) + p(x, y), \quad \dot{y} = Q(x, y) + q(x, y),$$

в которых аналитические функции $p(x, y)$, $q(x, y)$ удовлетворяют неравенству

$$|p(x, y)| + |q(x, y)| + \left|\frac{\partial p}{\partial x}\right| + \left|\frac{\partial p}{\partial y}\right| + \left|\frac{\partial q}{\partial x}\right| + \left|\frac{\partial q}{\partial y}\right| < \delta,$$

имеют одинаковую структуру разбиения фазовой плоскости на траектории.

Требование грубости для автономных систем второго порядка, являясь естественным с точки зрения приложений, существенно упрощает возможные структуры фазовой плоскости. Каждая из этих структур определяется конечным числом особых фазовых траекторий: состояний равновесия, сепаратрисных кривых седловых состояний

равновесия и замкнутых фазовых траекторий (предельных циклов). При этом состояния равновесия и периодические движения не имеют нулевых характеристических показателей и нет сепаратрисных кривых, идущих из седла в седло. Это означает, что точки пересечения кривых

$$P(x, y) = 0, \quad Q(x, y) = 0,$$

определяющих координаты состояний равновесия грубой системы, являются простыми, т. е. коэффициент

$$\Delta = \begin{vmatrix} P'_x(x, y) & P'_y(x, y) \\ Q'_x(x, y) & Q'_y(x, y) \end{vmatrix}$$

в характеристическом уравнении

$$\lambda^2 + \sigma\lambda + \Delta = 0, \tag{3.2}$$

где $\sigma = -[P'_x(x, y) + Q'_y(x, y)]$, не должен обращаться в нуль. Кроме того, коэффициент σ также должен быть отличным от нуля, т. е. состояние равновесия грубой системы не может представляться особой точкой типа центра. Аналитическое выражение условия, которому должна удовлетворять замкнутая фазовая траектория в грубой системе, состоит в том, что величина $h \neq 0$, где

$$h = \frac{1}{\tau}\int_0^\tau [P'_x(\varphi, \psi) + Q'_y(\varphi, \psi)]\, dt, \tag{3.3}$$

$x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ — уравнения периодического движения с периодом τ вдоль этой траектории.

Итак, в грубой системе существуют лишь такие состояния равновесия, для которых $\Delta \neq 0$ и $\sigma \neq 0$, если $\Delta > 0$; лишь такие предельные циклы, для которых $h \neq 0$; лишь такие сепаратрисы, которые не идут из седла в седло. Эти условия накладывают ограничения и на типы ячеек, возможных в грубых системах [1, 2].

В заключение этого параграфа отметим, что перенесение понятия грубости на многомерные системы встретило некоторые затруднения. Благодаря работам Смейла [5] выяснилось, что грубые системы могут быть весьма сложными и, что существенно, в пространстве параметров многомерной динамической системы могут существовать целые области негрубых систем. (Подробнее об этом, см., например, в книге [6].)