§ 3. Автоколебательные системы

Из всего многообразия динамических систем второго порядка полезно выделить системы, в которых может осуществляться периодическое изменение состояния системы. На фазовой плоскости периодическому движению соответствует замкнутая траектория. Если эта замкнутая траектория является одной из континуума вложенных одна в другую кривых, то мы имеем дело с консервативной системой. В такой системе период и амплитуда периодических колебаний зависят от начальных условий, а сама система является негрубой.

Если замкнутая траектория на фазовой плоскости является изолированной, она называется предельным циклом. Наличие устойчивого предельного цикла на фазовой плоскости говорит о том, что в системе возможно установление незатухающих периодических колебаний, амплитуда и период которых в определенных пределах не зависят от начальных условий и определяются лишь значениями параметров системы. Такие периодические движения А. А. Андронов назвал автоколебаниями, а системы, в которых возможны такие процессы,— автоколебательными [1]. В отличие от вынужденных или параметрических колебаний, возникновение автоколебаний не связано с действием периодической внешней силы или с периодическим изменением параметров системы. Автоколебания возникают за счет непериодических источников энергии и обусловлены внутренними связями и взаимодействиями в самой системе. Одним из признаков автоколебательной системы может служить присутствие так называемой обратной связи, которая управляет расходом энергии непериодического источника. Из всего сказанного непосредственно следует, что математическая модель автоколебательной системы должна быть грубой и существенно нелинейной.

Итак, наличие устойчивых предельных циклов на фазовом портрете системы является определяющим признаком автоколебательной системы. Условие устойчивости предельного цикла состоит в выполнении неравенства $h < 0$, где величина h называется характеристическим показателем предельного цикла и определяется выражением (3.3). В качестве примера системы, имеющей устойчивый предельный цикл, рассмотрим модель, движение

которой описывается уравнениями

$$\dot{x} = -y + x\,[1 - (x^2 + y^2)],\ \dot{y} = x + y\,[1 - (x^2 + y^2)]. \quad (3.4)$$

Нетрудно убедиться в том, что закон движения $x = \cos(t - t_0)$, $y = \sin(t - t_0)$ представляет периодическое решение системы дифференциальных уравнений (3.4), которое можно рассматривать как параметрическое описание замкнутой траектории

$$x^2 + y^2 = 1. \quad (3.5)$$

Фазовая траектория (3.5) изолированная, потому что уравнения всех других траекторий на фазовой плоскости xy имеют вид

$$x = \frac{\cos(t - t_0)}{\sqrt{1 + Ce^{-2(t-t_0)}}}, \quad y = \frac{\sin(t - t_0)}{\sqrt{1 + Ce^{-2(t-t_0)}}}.$$

Двигаясь по этим траекториям при значении $C > 0$, изображающая точка приближается к замкнутой траектории (3.5) изнутри, а при значениях $C < 0$ — снаружи. Следовательно, замкнутая траектория (3.5) представляет собой устойчивый предельный цикл. К этому результату можно также прийти, вычислив значение характеристического показателя h предельного цикла (3.5) по формуле (3.3). В рассматриваемом случае $h = -2 < 0$.

Наряду с устойчивыми предельными циклами фазовый портрет автоколебательной системы может содержать также неустойчивые предельные циклы, для которых $h > 0$. Двигаясь в окрестности неустойчивого предельного цикла, изображающая точка постепенно удаляется от него. Обычно такой цикл играет роль границы между областями с различным поведением фазовых траекторий.

Для нахождения предельных циклов на фазовой плоскости, к сожалению, не существует регулярных и достаточно эффективных методов, применимых в общем случае. Вместе с тем для решения вопроса об отсутствии замкнутых фазовых траекторий в ряде случаев можно воспользоваться критериями, которые приводятся ниже.

Эти критерии относятся к системе дифференциальных уравнений (3.1), правые части которых являются аналитическими функциями на всей фазовой плоскости. Сформулируем сначала критерий Бендиксона, указывающий достаточное условие отсутствия замкнутых контуров, целиком составленных из фазовых траекторий: если в некото-

рой односвязной области на фазовой плоскости выражение $\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}$ знакопостоянно, то в этой области не существует замкнутых контуров, целиком составленных из фазовых траекторий динамической системы (3.1).

В справедливости этого критерия нетрудно убедиться, воспользовавшись теоремой Грина

$$\iint\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}\right)dx\,dy=\oint(P\,dy-Q\,dx).$$

При интегрировании по замкнутому контуру, целиком состоящему из фазовых траекторий, интеграл в правой части этого соотношения обратится в нуль, в силу уравнений движения (3.1). Но тогда выражение $\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}$ должно обязательно менять знак в области, ограниченной этим замкнутым контуром.

Другим критерием, который обобщает критерий Бендиксона, является критерий Дюлака: если существует такая аналитическая функция $R(x, y)$, что в некоторой односвязной области на фазовой плоскости выражение $\frac{\partial}{\partial x}(PR)+\frac{\partial}{\partial y}(QR)$ знакопостоянно, то в этой области не существует замкнутых контуров, целиком составленных из фазовых траекторий системы (3.1). Доказательство этого критерия проводится также с помощью теоремы Грина. Иногда об отсутствии замкнутых траекторий можно судить из общих соображений. Например, на фазовой плоскости не может быть замкнутых траекторий в случае, если не существует особых точек, или в случае, когда существует единственная особая точка, являющаяся седлом.

Аналогичные рассуждения общего характера в ряде случаев могут помочь в установлении факта существования предельного цикла. Так, например, если система обладает единственным неустойчивым положением равновесия, отображаемым на фазовой плоскости особой точкой типа узла или фокуса, и существует цикл без контакта *), охватывающий эту особую точку и притом такой, что все фазовые траектории входят в ограниченную циклом область, то особая точка окружена по меньшей мере одним (с точностью до четного числа) устойчивым предельным циклом. Вообще говоря, при указанных условиях

*) Циклом без контакта называется замкнутая кривая, которая ни в одной из своих точек не соприкасается с фазовыми кривыми.

может существовать нечетное число вложенных друг в друга циклов, из которых устойчивых циклов будет на один цикл больше, чем неустойчивых.

§ 4. Бифуркации динамических систем второго порядка

Пусть правые части рассматриваемой системы дифференциальных уравнений (3.1) зависят от некоторого параметра λ, т. е. имеют вид

$$\dot{x} = P(x, y, \lambda), \quad \dot{y} = Q(x, y, \lambda), \tag{3.6}$$

где $P(x, y, \lambda)$ и $Q(x, y, \lambda)$ — аналитические функции своих аргументов. Если при некотором значении λ система является грубой, то, согласно изложенному в предыдущем параграфе, при небольшом изменении λ качественная картина на фазовой плоскости не изменится. Однако не для всех значений параметра λ это условие может быть выполнено. В связи с этим вводится понятие бифуркационного значения параметра. По определению, значение параметра $\lambda = \lambda_0$ называется бифуркационным, если при сколь угодно близких к λ_0 значениях $\lambda < \lambda_0$ и $\lambda > \lambda_0$ топологическая структура фазовой плоскости различна. Из самого определения бифуркационного значения параметра следует, что при $\lambda = \lambda_0$ система является негрубой.

Поскольку качественная картина траекторий на фазовой плоскости определяется особыми элементами (особыми траекториями), только те значения параметра λ оказываются бифуркационными, при которых появляются особые элементы, имеющие негрубую природу. В том случае, когда при бифуркационном значении параметра λ на фазовой плоскости появляется только один особый элемент, говорят, что автономная система второго порядка (3.6) обладает первой степенью негрубости. В такой системе негрубые элементы могут быть одного из следующих типов:

1) сложное состояние равновесия, получающееся при слиянии двух простых особых точек (например, типа узла и седла);

2) вырожденный фокус или центр;

3) двойной предельный цикл, который может, например, получиться при слиянии устойчивого и неустойчивого предельных циклов;