может существовать нечетное число вложенных друг в друга циклов, из которых устойчивых циклов будет на один цикл больше, чем неустойчивых.

§ 4. Бифуркации динамических систем второго порядка

Пусть правые части рассматриваемой системы дифференциальных уравнений (3.1) зависят от некоторого параметра λ, т. е. имеют вид

$$\dot{x} = P(x, y, \lambda), \quad \dot{y} = Q(x, y, \lambda), \tag{3.6}$$

где $P(x, y, \lambda)$ и $Q(x, y, \lambda)$ — аналитические функции своих аргументов. Если при некотором значении λ система является грубой, то, согласно изложенному в предыдущем параграфе, при небольшом изменении λ качественная картина на фазовой плоскости не изменится. Однако не для всех значений параметра λ это условие может быть выполнено. В связи с этим вводится понятие бифуркационного значения параметра. По определению, значение параметра $\lambda = \lambda_0$ называется бифуркационным, если при сколь угодно близких к λ_0 значениях $\lambda < \lambda_0$ и $\lambda > \lambda_0$ топологическая структура фазовой плоскости различна. Из самого определения бифуркационного значения параметра следует, что при $\lambda = \lambda_0$ система является негрубой.

Поскольку качественная картина траекторий на фазовой плоскости определяется особыми элементами (особыми траекториями), только те значения параметра λ оказываются бифуркационными, при которых появляются особые элементы, имеющие негрубую природу. В том случае, когда при бифуркационном значении параметра λ на фазовой плоскости появляется только один особый элемент, говорят, что автономная система второго порядка (3.6) обладает первой степенью негрубости. В такой системе негрубые элементы могут быть одного из следующих типов:

1) сложное состояние равновесия, получающееся при слиянии двух простых особых точек (например, типа узла и седла);

2) вырожденный фокус или центр;

3) двойной предельный цикл, который может, например, получиться при слиянии устойчивого и неустойчивого предельных циклов;

4) сепаратриса, идущая из одного седла в другое или в него же.

Соответствующие этим типам особых элементов структуры разбиения фазовой плоскости на траектории показаны на рис. 3.2—3.5. На рис. 3.2 изображены три последовательные фазы изменения поведения фазовых траекторий в окрестности двух простых особых точек: узла O_1 и седла O_2. При достижении параметром λ бифуркационного значения точки O_1 и O_2 сливаются, образуя сложную особую точку типа седло-узел (рис. 3.2, *б*), и затем исчезают (рис. 3.2, *в*). На рис. 3.3 представлена бифуркация второго типа, когда простой фокус превращается в сложный фокус (момент бифуркации, соответствующий вырождению фокуса), из которого затем рождается предельный цикл. На рис. 3.4 изображены три последовательных фазовых портрета при бифуркации третьего типа, когда два предельных цикла (устойчивый и неустойчивый) (рис. 3.4, *а*) в момент бифуркации сливаются, образуя полуустойчивый предельный цикл (рис. 3.4, *б*), и затем исчезают (рис. 3.4, *в*). Если рассмотреть эти картинки в обратной последовательности, то получим случай рождения двух предельных циклов из так называемого уплотнения фазовых траекторий.

Наконец, последний тип бифуркации проиллюстрирован на рис. 3.5, где показан случай рождения устойчивого предельного цикла из петли сепаратрисы седла. Пусть сепаратрисы седла при некотором значении λ имеют расположение, представленное на рис. 3.5, *а*. Предположим, что при увеличении параметра λ ветви сепаратрисы сближаются и при некотором значении $\lambda = \lambda_0$ сливаются, образуя петлю (рис. 3.5, *б*). Если при дальнейшем увеличении λ сепаратрисы седла вновь разделяются так, как показано на рис. 3.5, *в*, то из петли рождается предельный цикл. Значение $\lambda = \lambda_0$ в этом случае является бифуркационным.

Заметим, что в автономной системе второго порядка, состояние которой изображается точками на фазовом круговом цилиндре, может встретиться новый тип бифуркации, который невозможен в случае фазовой плоскости, а именно: бифуркация, связанная с рождением или исчезновением предельных циклов, охватывающих фазовый цилиндр. В отличие от фазовой плоскости, где устойчивый предельный цикл отображает автоколебательное движение в системе, устойчивый предельный цикл, охватывающий

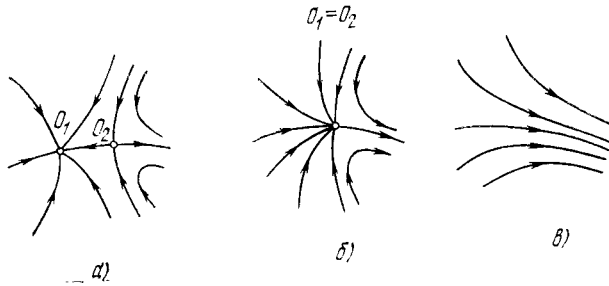

Рис. 3.2

Рис. 3.3

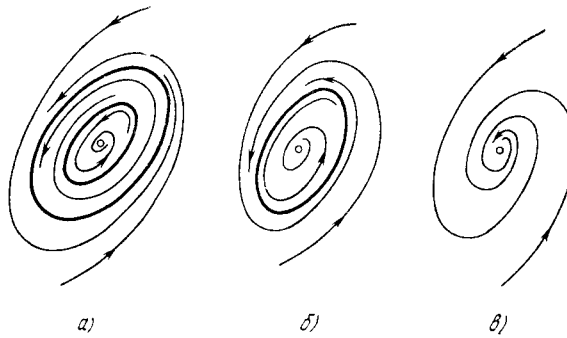

Рис. 3.4

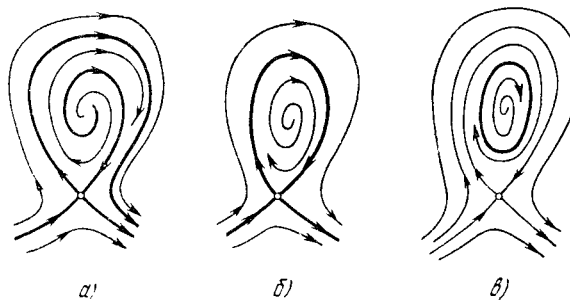

Рис. 3.5

фазовый цилиндр, соответствует периодическому ротационному (вращательному) движению.

Для системы (3.4), содержащей лишь один параметр λ, пространство параметров представляет собою прямую, а бифуркационные значения $\lambda = \lambda_i$ — точки, разбивающие эту прямую на области, в каждой из которых изменение параметра λ не приводит к изменению фазового портрета. Если система (3.4) содержит два параметра λ и μ, тогда пространством параметров будет плоскость, разделенная на области одинакового поведения системы при помощи бифуркационных кривых. Зная структуру разбиения фазового пространства для какой-нибудь точки плоскости параметров $\lambda\mu$, можно, непрерывно перемещаясь в этой плоскости, найти структуру фазового пространства для любой другой точки плоскости параметров. При этом нужно знать лишь характер бифуркации, которая происходит в фазовом пространстве при переходе той или другой бифуркационной границы. В этом заключается эвристическая ценность теории бифуркаций [7].

§ 5. Примеры исследования конкретных систем методами качественной теории

В этом параграфе приводятся примеры конкретных систем второго порядка, построение и исследование фазовых портретов которых проводится при помощи методов качественной теории дифференциальных уравнений.

Пример 1. Динамика химического реактора [4]. Рассмотрим модель химического реактора, который представляет собою открытую гомогенную систему полного перемешивания. В такой системе происходит непрерывный массо- и теплообмен с окружающей средой (открытая система), а химические реакции протекают в пределах одной фазы (гомогенность). Условие идеального перемешивания позволяет описывать все процессы при помощи дифференциальных уравнений в полных производных. Предположим, что рассматриваемый химический реактор — это емкость, в которую непрерывно подается вещество A с концентрацией x_0 и температурой y_B *). Пусть в результате химической реакции $A \to B + Q$ образуется продукт B и выделяется тепло Q, а смесь продукта и реагента

*) В этом примере все величины предполагаются записанными в безразмерном виде.