

фазовый цилиндр, соответствует периодическому ротационному (вращательному) движению.

Для системы (3.4), содержащей лишь один параметр λ , пространство параметров представляет собою прямую, а бифуркационные значения $\lambda = \lambda_i$ — точки, разбивающие эту прямую на области, в каждой из которых изменение параметра λ не приводит к изменению фазового портрета. Если система (3.4) содержит два параметра λ и μ , тогда пространством параметров будет плоскость, разделенная на области одинакового поведения системы при помощи бифуркационных кривых. Зная структуру разбиения фазового пространства для какой-нибудь точки плоскости параметров λ, μ , можно, непрерывно перемещаясь в этой плоскости, найти структуру фазового пространства для любой другой точки плоскости параметров. При этом нужно знать лишь характер бифуркации, которая происходит в фазовом пространстве при переходе той или другой бифуркационной границы. В этом заключается эвристическая ценность теории бифуркаций [7].

§ 5. Примеры исследования конкретных систем методами качественной теории

В этом параграфе приводятся примеры конкретных систем второго порядка, построение и исследование фазовых портретов которых проводится при помощи методов качественной теории дифференциальных уравнений.

Пример 1. Динамика химического реактора [4]. Рассмотрим модель химического реактора, который представляет собою открытую гомогенную систему полного перемешивания. В такой системе происходит непрерывный массо- и теплообмен с окружающей средой (открытая система), а химические реакции протекают в пределах одной фазы (гомогенность). Условие идеального перемешивания позволяет описывать все процессы при помощи дифференциальных уравнений в полных производных. Предположим, что рассматриваемый химический реактор — это емкость, в которую непрерывно подается вещество A с концентрацией x_0 и температурой y_B *). Пусть в результате химической реакции $A \rightarrow B + Q$ образуется продукт B и выделяется тепло Q , а смесь продукта и реагента

*) В этом примере все величины предполагаются записанными в безразмерном виде.

выводится из системы со скоростью, характеризуемой величиной λ . Тепло, образующееся в результате реакции, отводится потоком вещества и посредством теплопередачи через стенку реактора. Условия теплопередачи характеризуются температурой стенки $y_{ст}$ и коэффициентом ω . Для составления уравнений динамики химического реактора воспользуемся законами химической кинетики, выражающими зависимость скорости химического превращения от концентраций реагирующих веществ и от температуры, законом сохранения массы (условием материального баланса), а также законом сохранения энергии (условием температурного баланса реактора).

В результате получим уравнения

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= -xe^{-1/y} + \lambda(x_0 - x), \\ \frac{dy}{dt} &= xe^{-1/y} + \beta(y_0 - y),\end{aligned}\quad (3.7)$$

где x — концентрация, y — температура реагента, а параметры y_0 , β связаны с введенными выше величинами при помощи соотношений

$$y_0 = \frac{\lambda y_B + \omega y_{ст}}{\lambda + \omega}, \quad \beta = \lambda + \omega.$$

Таким образом, рассматриваемая модель химического реактора имеет четыре существенных параметра: x_0 , y_0 , λ , β , которые являются положительными величинами. В соответствии с физическим смыслом переменных x и y фазовым пространством системы является первый квадрант плоскости xy .

Система уравнений (3.7) имеет вид уравнений (3.1), где

$$\begin{aligned}P(x, y) &= -xe^{-1/y} + \lambda(x_0 - x), \\ Q(x, y) &= xe^{-1/y} + \beta(y_0 - y).\end{aligned}$$

Для построения фазового портрета определим прежде всего число состояний равновесия, их топологический тип и устойчивость.

Приравнивая правые части системы (3.7) нулю, получим два алгебраических уравнения:

$$\begin{aligned}P(x, y) &= -xe^{-1/y} + \lambda(x_0 - x) = 0, \\ Q(x, y) &= xe^{-1/y} + \beta(y_0 - y) = 0,\end{aligned}\quad (3.8)$$

решения которых и определяют координаты x_* , y_* особых точек на фазовой плоскости xy , соответствующие равновесным состояниям системы. Из (3.8) следует, что кривая $Q(x, y) = 0$, представляющая собой изоклину $dy/dx = 0$ интегральных кривых, пересекает ось y в точке $y = y_0$, а кривая $P(x, y) = 0$, представляющая собой изоклину $dy/dx = \infty$ интегральных кривых, пересекает ось x при $x = x_0$ и имеет асимптоту $x = \lambda x_0 / (1 + \lambda)$. В зависимости от соотношений параметров x_0 , y_0 , λ , β кривые $P = 0$ и $Q = 0$ могут пересекаться в одной точке или в трех точках.

В качестве примера на рис. 3.6 изображен случай, когда система имеет три состояния равновесия. Для определения числа состояний равновесия в зависимости от значений параметров системы воспользуемся бифуркационной диаграммой — кривой, связывающей значения какого-нибудь из параметров с координатой состояния равновесия. Уравнение бифуркационной кривой получается после исключения из уравнений (3.8) величины x_* :

$$y_0 = y_* - \frac{\lambda x_0}{\beta(1 + \lambda e^{1/y_*})}. \quad (3.9)$$

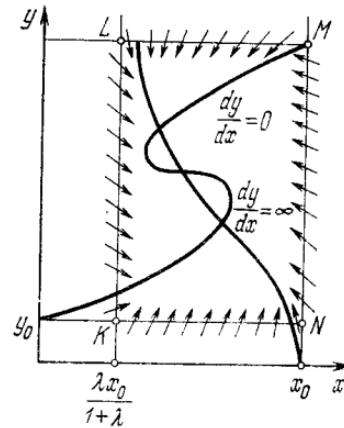


Рис. 3.6

Уравнение (3.9) представляет зависимость $y_0 = f(y_*)$, а величины x_0 , λ и β считаются фиксированными. Возможные варианты вида бифуркационных диаграмм при различных значениях x_0 и фиксированных значениях λ и β показаны на рис. 3.7. Число состояний равновесия в системе равно числу точек пересечения прямой $y_0 = \text{const}$ с кривой (3.9) при заданном значении x_0 . Из вида кривых на рис. 3.7 следует, что бифуркационное соотношение между параметрами x_0 , y_0 находится из условия соприкосновения прямой $y_0 = \text{const}$ с одним из экстремумов кривой (3.9). Дифференцируя функцию (3.9) и приравнивая производную dy_0/dy_* нулю, получаем соотношение, которое вместе с (3.9) составляет систему параметрических

уравнений граничной кривой на плоскости y_0x_0 :

$$x_0 = \beta \lambda^{-2} y_*^2 e^{-1/y_*} (1 + \lambda e^{1/y_*})^2, \quad (3.40)$$

$$y_0 = y_* - \lambda^{-1} y_*^2 e^{-1/y_*} (1 + \lambda e^{1/y_*}),$$

где y_* является текущим параметром.

Кривая (3.10) на плоскости y_0x_0 имеет вид клина, в вершине которого находится точка возврата первого рода (рис. 3.8). Форма кривой (3.10) сохраняется при всех имеющих физический смысл значениях параметров

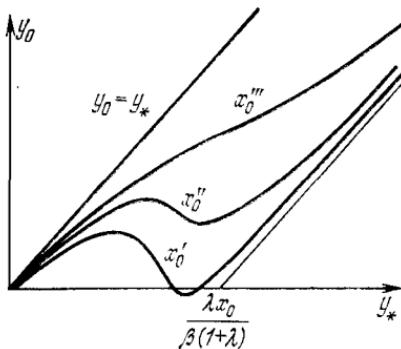


FIG. 3.7

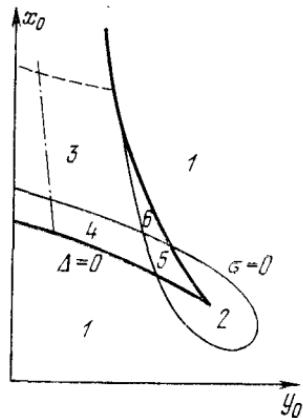


Рис. 3.8

λ и β . При значениях параметров x_0, y_0 внутри клина система обладает тремя состояниями равновесия, а при значениях x_0, y_0 вне клина — одним состоянием равновесия. Топологический тип и устойчивость особой точки на фазовой плоскости с координатами x_*, y_* , соответствующей состоянию равновесия системы, определяются знаком выражений $\sigma = -(a + d)$ и $\Delta = ad - bc$ в этой точке. В нашем случае

$$\begin{aligned} a &= P'_x(x_*, y_*) = -e^{-1/y_*} - \lambda, \\ b &= P'_y(x_*, y_*) = -x_* y_*^{-2} e^{-1/y_*}, \\ c &= Q'_y(x_*, y_*) = e^{-1/y_*}, \\ d &= Q'_y(x_*, y_*) = x_* y_*^{-2} e^{-1/y_*} - \beta. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Согласно общей теории, уравнение $\Delta = 0$ определяет границу седел, а уравнение $\sigma = 0$ — границу устойчивости узлов и фокусов.

Подставляя в уравнение $\Delta = 0$ выражения (3.11) и учитывая (3.8), получим параметрические уравнения для границы седел на плоскости x_0y_0 , совпадающие с уравнениями (3.10). Таким образом, граничная кривая области параметров, при которых в системе имеется три состояния равновесия, совпадает с кривой рождения (или исчезновения) седловой особой точки.

Подставляя далее выражения (3.11) в уравнение $\sigma = 0$, получаем параметрические уравнения

$$\begin{aligned} y_0 &= y_* [1 - \beta^{-1} y_* (\beta + \lambda + e^{-1/y_*})], \\ x_0 &= \lambda^{-1} y_*^2 [\beta + 2\lambda + \lambda (\beta + \lambda) e^{1/y_*} + e^{-1/y_*}] \end{aligned} \quad (3.12)$$

с текущим параметром y_* . Уравнения (3.12) определяют на плоскости y_0x_0 другую граничную кривую. Часть этой кривой, показанной на рис. 3.8, является границей устойчивости особых точек неседлового типа. Картина разбиения плоскости параметров y_0 , x_0 на области, различающиеся числом и устойчивостью состояний равновесия системы, показана на рис. 3.8, где кривая (3.10) показана сплошной жирной линией, а кривая (3.11) — сплошной тонкой линией. Область 1 соответствует наличию одной устойчивой особой точки на фазовой плоскости; область 2 — одной неустойчивой особой точки типа узла или фокуса; области 3—6 — трем особым точкам, из которых в области 3 две устойчивы, а третья — седло. В областях 4 и 6 неустойчивы две особые точки, а в области 5 неустойчивы все три особые точки.

Число различных областей и взаимное расположение кривых (3.10) и (3.12) на плоскости y_0x_0 зависят от значений параметров λ и β . Случай разбиения плоскости параметров y_0 , x_0 , изображенный на рис. 3.8, заведомо осуществляется при значениях λ , β , удовлетворяющих неравенству $\beta \gg \lambda^2$. Рассмотрим этот случай подробнее и выясним, какие из особых траекторий, кроме состояний равновесия, могут быть на фазовой плоскости xy при различных значениях параметров x_0 , y_0 .

Для этого построим сначала цикл без контакта, охватывающий все состояния равновесия. В качестве цикла без контакта возьмем прямоугольник $KLMN$, образуемый отрезками прямых $x = \frac{\lambda x_0}{1 + \lambda}$, $x = x_0$, $y = y_0$ и $y = y_M$, где y_M — ордината верхней точки пересечения изоклины $dy/dx = 0$ спрямой $x = x_0$ (см рис. 3.6). Согласно уравнениям (3.7) в

точках прямой $x = \frac{\lambda x_0}{1 + \lambda}$ производная $\left(\frac{dx}{dt}\right)_{x=\lambda x_0/(1+\lambda)} = \frac{\lambda x_0}{1 + \lambda} (1 - e^{-1/y}) > 0$, в точках прямой $x = x_0$, наоборот, $\left(\frac{dx}{dt}\right)_{x=x_0} = -x_0 e^{-1/y} < 0$. Подставляя $y = y_0$ в правую часть второго уравнения системы (3.7), находим $\left(\frac{dy}{dt}\right)_{y=y_0} = x e^{-1/y_0} > 0$, а на отрезке прямой $y = y_M$, $0 < x < x_0$ производная $\left(\frac{dy}{dt}\right)_{y=y_M} < 0$. Это означает, что все фазовые траектории входят внутрь прямоугольника $KLMN$: если изображающая точка попадает внутрь прямоугольника $KLMN$, то она в дальнейшем остается в этой области. Нетрудно видеть, что не существует предельных циклов, не охватывающих контур $KLMN$, потому что вне контура $KLMN$ нет особых точек. Не может быть также предельных циклов, охватывающих контур $KLMN$, потому что на всей полупрямой $x = \lambda x_0 / (1 + \lambda)$, часть которой KL составляет границу контура, производная dx/dt положительна. Таким образом, дальнейшее исследование фазового портрета рассматриваемой системы достаточно провести лишь внутри прямоугольника $KLMN$.

При значениях параметров x_0, y_0 в области 1 (рис. 3.8), когда на фазовой плоскости xy имеется одна устойчивая особая точка, возможны два случая: 1) предельные циклы отсутствуют, 2) имеются два предельных цикла, охватывающие особую точку *), внешний цикл устойчивый, а внутренний — неустойчивый. Фазовые портреты, соответствующие этим случаям, изображены на рис. 3.9. При значениях параметров x_0, y_0 в области 2 рис. 3.8, когда единственная особая точка является неустойчивой, на фазовой плоскости существует устойчивый предельный цикл, и фазовый портрет системы имеет вид, показанный на рис. 3.10. Следовательно, для значений параметров x_0, y_0 в области 2 рис. 3.8 в химическом реакторе при любых начальных условиях устанавливаются автоколебания — незатухающие колебания концентрации вещества и температуры. Изменение параметров x_0, y_0 , связанное с переходом из области 2 в область 1 на рис. 3.8, вызывает смену устойчивости единственного состояния равновесия. Характер бифуркации на

*). Здесь и далее все утверждения относительно числа предельных циклов верны, строго говоря, с точностью до их четного числа.

этой плоскости параметров x_0, y_0 определяется знаком некоторого выражения α_3 , называемого ляпуновской величиной. Для рассматриваемого состояния равновесия $\alpha_3 > 0$, поэтому, когда особая точка из неустойчивой превращается в устойчивую, то при этом из нее рождается неустойчивый предельный цикл. При удалении от границы в область 1 неустойчивый и устойчивый циклы сливаются и затем исчезают. Условие исчезновения предельных циклов определяет в области 1 рис. 3.8 границу между описанными выше случаями, которые изображены на рис. 3.9, а и б. При переходе из области 2

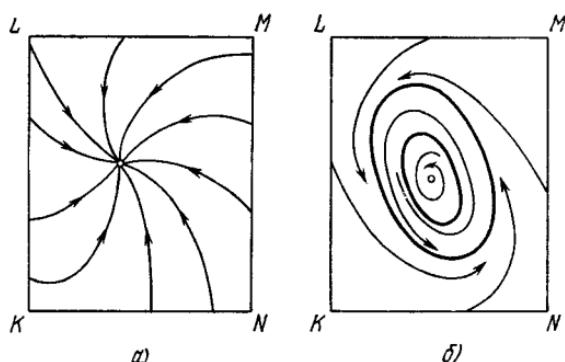


Рис. 3.9

в область 5 через границу $\Delta = 0$ вблизи острия клина или через само острие неустойчивая особая точка — узел — распадается на три особые точки: одно седло и два неустойчивых узла. Все они оказываются внутри предельного цикла (рис. 3.14). Нетрудно показать, что предельный цикл не сохраняется для всех значений параметров x_0, y_0 внутри кривой $\Delta = 0$. В самом деле, предельный цикл заведомо отсутствует в том случае, если точка изоклины $dy/dx = 0$, в которой касательная к изоклине вертикальна, находится вне прямоугольника $KLMN$. Из условий соприкосновения изоклины $dy/dx = 0$ с прямой $x = \lambda x_0/(1 + \lambda)$ и с прямой $x = x_0$ получаются соответственно кривая

$$x_0 = \frac{\beta(1 + \gamma)}{2\lambda} \left(1 - 2y_0 + \sqrt{1 - 4y_0}\right) e^{\frac{2}{1 + \sqrt{1 - 4y_0}}}, \quad (3.13)$$

а также кривая

$$x_0 = \frac{\beta}{2} (1 - 2y_0 - \sqrt{1 - 4y_0}) e^{\frac{2}{1 - \sqrt{1 - 4y_0}}}, \quad (3.14)$$

ограничивающие область плоскости $y_0 x_0$, в которой заранее нет цикла, охватывающего все три особые точки. На рис. 3.8 изображены дуги этих кривых, расположенные внутри кривой $\Delta = 0$. Предельный цикл заранее отсутствует для значений x_0, y_0 в области над

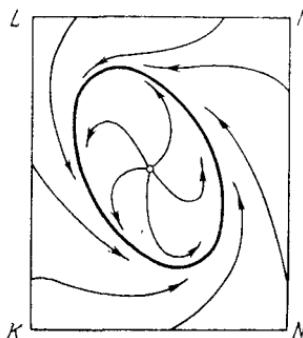


Рис. 3.10

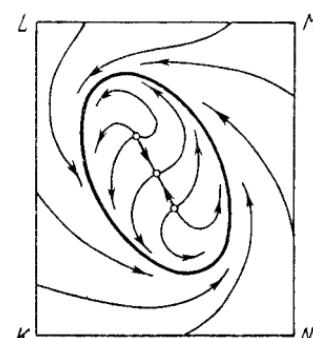


Рис. 3.11

кривой (3.13) (штриховая линия) и слева от кривой (3.14) (штрихпунктирная линия). Каков механизм исчезновения устойчивого предельного цикла, охватывающего три особые точки? При удалении от острия клина по направлению к кривым (3.13) и (3.14) наступает момент, когда на фазовой плоскости возникает петля сепаратрисы, идущая из седла в седло и охватывающая крайние особые точки. При дальнейшем изменении параметров x_0, y_0 происходит либо вливание цикла в эту петлю, либо рождение из петли неустойчивого предельного цикла, сливающегося впоследствии с устойчивым. В обоих случаях результатом является исчезновение устойчивого предельного цикла.

В заключение выделим область параметров x_0, y_0 , при которых в системе не могут возникнуть автоколебания. Для этого воспользуемся критерием Бендиксона, согласно которому предельные циклы *) отсутствуют

*) Имеются в виду предельные циклы, целиком лежащие в этой области.

в той области фазовой плоскости, где выражение $\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}$ не меняет знак. Граница этой области определяется равенством

$$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} = 0.$$

Подставляя в левую часть этого равенства выражения (3.14), получаем уравнение кривой

$$x = y^2 [1 + (\lambda + \beta) e^{1/y}]. \quad (3.15)$$

Потребовав, чтобы кривая (3.15) не пересекалась с циклом без контакта $KLMN$, приходим к следующим условиям: циклы заведомо отсутствуют в заштрихованной области плоскости $y_0 x_0$ (рис. 3.12), ограниченной прямой $x_0 = \tilde{x}_0$, где \tilde{x}_0 — корень уравнения

$$(\lambda + \beta) \exp(\sqrt{x_0 + 1} + \sqrt{x_0}) x_0^{-1/2} = \\ = 2 \sqrt{x_0} (\sqrt{x_0 + 1} + \sqrt{x_0}),$$

а также частью кривой

$$x_0 = y_0^2 [1 + (\lambda + \beta)^{1/y_0}],$$

которая в своем минимуме касается прямой $x_0 = \tilde{x}_0$.

Пример 2. Задача Жуковского о полете планера [1]. Рассмотрим полет планера в вертикальной плоскости xz (ось Oz направлена вверх) при следующих предположениях: 1) сила сопротивления воздуха пропорциональна квадрату скорости полета; 2) угол атаки планера остается постоянным независимо от режима полета. При сделанных допущениях аэродинамические коэффициенты силы сопротивления воздуха C_1 и подъемной силы крыльев планера C_2 будут постоянными. Составим уравнения движения центра масс планера в проекциях на касательную и нормаль к его траектории

$$m \frac{dv}{dt} = -mg \sin \theta - \frac{1}{2} \rho S C_1 v^2, \\ mv \frac{d\theta}{dt} = -mg \cos \theta + \frac{1}{2} \rho S C_2 v^2. \quad (3.16)$$

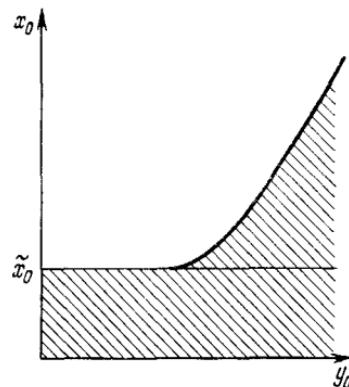


Рис. 3.12

Здесь m — масса планера, v — скорость движения, θ — угол между касательной к траектории и осью Ox , g — ускорение силы тяжести, ρ — плотность воздуха, S — площадь крыльев планера. Введем далее безразмерные величины:

$$y = v \sqrt{\frac{\rho S C_2}{2m g}}, \quad \tau = t \sqrt{\frac{\rho g S C_2}{2m}}, \quad a = \frac{C_1}{C_2}$$

и запишем уравнения (3.16) в виде

$$\dot{y} = -\sin \theta - ay^2, \quad \dot{\theta} = \frac{y^2 - \cos \theta}{y}, \quad (3.17)$$

где точкой сверху обозначено дифференцирование по безразмерному времени τ . Из вида уравнений (3.17) следует, что динамика полета планера характеризуется одним существенным положительным параметром a , который равен отношению силы сопротивления движению планера к его подъемной силе.

Поскольку значения (θ, y) и $(\theta + 2\pi, y)$ соответствуют одному и тому же состоянию, фазовым пространством рассматриваемой динамической системы является поверхность цилиндра, на котором вдоль образующей отложена величина y , а вдоль направляющей — угол θ . Будем рассматривать лишь область $y \geq 0$ (тем самым исключается случай полета хвостом вперед), в которой интегральные кривые, согласно (3.17), удовлетворяют уравнению

$$\frac{dy}{d\theta} = \frac{y(\sin \theta + ay^2)}{\cos \theta - y^2}. \quad (3.18)$$

Интегральная кривая $y = 0$ является особой фазовой траекторией системы уравнений (3.17) и соответствует мгновенному опрокидыванию планера из положения $\theta = \pi/2$ в положение $\theta = -\pi/2$ при обращении скорости v в нуль. Рассмотрим сначала частный случай $a = 0$, когда силы сопротивления отсутствуют и рассматриваемая система оказывается консервативной. Уравнения движения (3.17) в этом случае принимают вид

$$\dot{y} = -\sin \theta, \quad \dot{\theta} = \frac{y^2 - \cos \theta}{y}. \quad (3.19)$$

Единственное состояние равновесия системы (3.19) находится в точке $\theta = 0$, $y = 1$ и соответствует режиму горизонтального полета планера с постоянной скоростью.

Фазовые траектории определяются соотношением

$$\frac{y^3}{3} - y \cos \theta = \text{const}, \quad (3.20)$$

которое представляет собой первый интеграл уравнения (3.18) при $a = 0$. Согласно (3.20) на фазовом цилиндре имеются две другие особые точки с координатами $\theta = \pi/2$, $y = 0$ и $\theta = -\pi/2$, $y = 0$. Однако они не являются состояниями равновесия системы (3.19), поскольку в этих точках производная \dot{y} отлична от нуля. Для построения интегральных кривых на фазовом цилиндре удобно воспользоваться кривыми (3.20) на вспомогательной плоскости, где по осям координат отложены величины y и $\cos \theta$ (рис. 3.13). Значению $C = -2/3$ соответствует особая точка $\theta = 0$, $y = 1$ типа центра. Для значений C на интервале $-2/3 < C < 0$ фазовые траектории представляют собой замкнутые кривые, охватывающие центр, и для значений $C > 0$ — замкнутые кривые, охватывающие фазовый цилиндр. Интегральная кривая, соответствующая значению $C = 0$, разделяет эти два типа замкнутых траекторий. Она состоит из сепаратрис седловых особых точек $\theta = \pi/2$, $y = 0$ и $\theta = -\pi/2$, $y = 0$, определяемых уравнением $y = 0$, $-\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2$ и $y^2 = 3 \cos \theta$. Разбиение фазового цилиндра на траектории приведено на рис. 3.14, где изображена развертка цилиндра на плоскость. Траектории движения планера, соответствующие различным типам фазовых траекторий, показаны на рис. 3.15.

Таким образом, движение изображающей точки по замкнутым фазовым траекториям, охватывающим состояние равновесия на фазовом цилиндре, соответствует полету планера по волнообразным линиям, а при движении по кривым, охватывающим фазовый цилиндр, — полету, при котором планер совершает мертвые петли.

Рассмотрим теперь, как изменяется фазовый портрет системы и, следовательно, характер движения планера в общем случае $a \neq 0$.

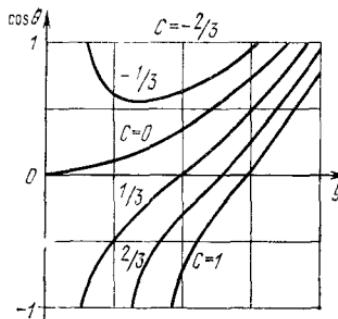


Рис. 3.13

Согласно уравнениям (3.17) система по-прежнему имеет одно состояние равновесия, однако теперь его координаты определяются выражениями

$$\theta_0 = -\operatorname{arctg} a \quad (-\pi/2 < \theta_0 < 0), \quad (3.24)$$

$$y_0 = \frac{1}{\sqrt[4]{1+a^2}} \quad (0 < y_0 < 1).$$

Состояние равновесия системы (3.21) соответствует полету планера по нисходящей прямой с постоянной скоростью $y_0 < 1$. Устойчивость этого состояния равновесия определяется корнями характеристического уравнения

$$p^2 + 3ap + 2 = 0,$$

откуда следует, что равновесие всегда устойчиво: при значениях $a < 2\sqrt{2}/3$ особая точка — фокус, а при

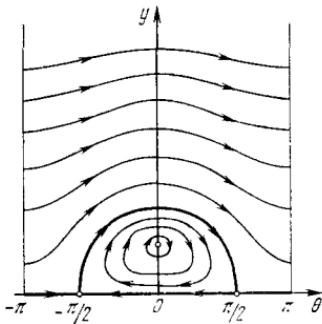


Рис. 3.14

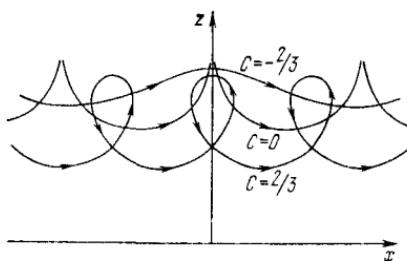


Рис. 3.15

$a > 2\sqrt{2}/3$ — узел. Покажем, что в рассматриваемом случае на фазовом цилиндре не может быть замкнутых фазовых траекторий ни при каком значении параметра $a \neq 0$. Для этого воспользуемся критерием Дюлака, взяв y в качестве функции R :

$$\begin{aligned} \frac{\partial(yP)}{\partial y} + \frac{\partial(yQ)}{\partial \theta} &= \\ &= -\frac{\partial}{\partial y}(y \sin \theta + ay^3) + \frac{\partial}{\partial \theta}(y^2 - \cos \theta) = -3ay^2. \end{aligned}$$

Это выражение обращается в нуль лишь на окружности $y = 0$, охватывающей фазовый цилиндр. Следовательно, в области $y > 0$ замкнутые фазовые траектории отсутствуют.

Убедимся также в том, что в области $y > 0$ не может быть замкнутых траекторий, охватывающих фазовый цилиндр. В самом деле, предположим, что такая траектория

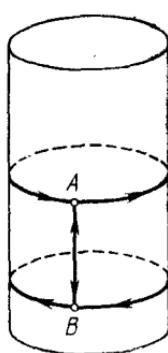


Рис. 3.16



Рис. 3.17

существует. Тогда, соединив эту замкнутую фазовую кривую с интегральной кривой $y = 0$ при помощи отрезка образующей, получим замкнутый контур (рис. 3.16),

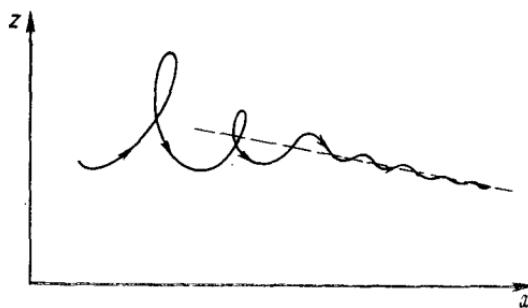


Рис. 3.18

ограничивающий область, заключенную между интегральными кривыми. Интеграл $\int y(Pdy - Qdx)$, взятый вдоль этого контура, равен нулю, потому что отрезок AB на рис. 3.16 проходится два раза (в прямом и обратном направлении), а остальные участки этого замкнутого контура состоят из интегральных кривых. Следователь-

но, выражение $\frac{\partial(yP)}{\partial y} + \frac{\partial(yQ)}{\partial x}$ должно было бы в рассматриваемой области обратиться в нуль, что невозможно.

Итак, в случае $a \neq 0$ все фазовые траектории асимптотически приближаются к устойчивому состоянию равновесия, а фазовый портрет системы имеет вид, показанный на рис. 3.17. Таким образом, при наличии сил сопротивления воздуха планер при любых начальных условиях приходит к единственному устойчивому равновесному режиму. Если начальная скорость планера достаточно велика, то планер совершил спачала одну или несколько мертвых петель, затем по волнобразно затухающей траектории будет приближаться к траектории прямолинейного полета. Одна из возможных траекторий полета планера показана на рис. 3.18.