

Г Л А В А 4

ПРОСТЕЙШИЕ КУСОЧНО-ЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ (СИСТЕМЫ С ПЕРЕМЕННОЙ СТРУКТУРОЙ) И ИХ ИССЛЕДОВАНИЕ МЕТОДОМ ТОЧЕЧНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ

Рассмотрим динамическую систему, поведение которой описывается системой дифференциальных уравнений

$$\dot{x}_i = f_i(x_1, \dots, x_n) \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (4.1)$$

где переменные x_1, \dots, x_n определяют состояние динамической системы, а функции $f_1(x_1, \dots, x_n), f_2(x_1, \dots, x_n), \dots, f_n(x_1, \dots, x_n)$ предполагаются кусочно-гладкими. Допустим, кроме того, что эти функции в заданных областях изменения переменных x_1, x_2, \dots, x_n обеспечивают существование единственного решения дифференциальных уравнений (4.1) (по крайней мере для возрастающих значений времени t) и его непрерывную зависимость от начальных условий. Поскольку функции f_1, f_2, \dots, f_n не содержат явно времени t , динамическая система называется автономной, а ее фазовое пространство является n -мерным. Если правая часть уравнений (4.1) может быть представлена в виде $f \cdot Ax$, где A обозначает матрицу, элементы которой не зависят от x_i , то динамическая система называется линейной. Свойство линейности тесно связано с широко используемым принципом суперпозиции. В случае автономной системы элементы матрицы A — постоянные величины и решение системы дифференциальных уравнений (4.1) находится наиболее просто.

Динамическая система называется квазилинейной, если уравнения (4.1) имеют вид

$$\dot{x} = Ax + \mu g(x),$$

где μ — малый параметр. Теория квазилинейных систем разработана достаточно полно, с ее помощью решены многие нелинейные задачи. Квазилинейные системы представляют собою, пожалуй, единственный широкий класс динамических систем, допускающих сравнительно полное аналитическое исследование. Существенный недостаток этой теории, однако, состоит в том, что в практических приложениях значения параметра μ , который в теории предполагается сколь угодно малым, часто не удовлетворяют оценкам, при которых построена теория. Поэтому границы достоверности получаемых при помощи этой теории результатов оказываются трудно определимыми. Наиболее сложными для теоретического исследования динамическими системами являются так называемые сильно нелинейные системы.

Под сильно нелинейной системой обычно понимают либо динамическую систему, не допускающую линеаризации в малом, либо систему, в которой проявляются нелинейные эффекты, не обнаруживаемые квазилинейной теорией. К таким системам относятся релейные системы автоматического регулирования, динамические системы с ударным взаимодействием, системы с люфтом и сухим трением и др. Одним из эффективных методов изучения динамики сильно нелинейных систем, поведение которых описывается дифференциальными уравнениями (4.1) с кусочно-гладкими правыми частями, является метод точечных отображений. Этот метод, зарождение которого связано с именем А. Пуанкаре и Дж. Биркгофа, был введен в теорию нелинейных колебаний А. А. Андроновым. Установив связь между автоколебаниями и предельными циклами А. Пуанкаре и опираясь на математический аппарат качественной теории дифференциальных уравнений, А. А. Андронов существенно расширил возможности метода «припасовывания» и сформулировал принципы, которые легли в основу метода точечных отображений и позволили эффективно использовать этот метод при исследовании конкретных систем автоматического регулирования и радиотехники. С помощью метода точечных отображений оказалось возможным полностью решить ряд основных задач теории автоматического регулирования и, в первую очередь, классическую задачу И. А. Вышнеградского о регуляторе прямого действия с сухим трением в чувствительном элементе [1, 2]. Была рассмотрена динамика часовых ходов [3], построена теория релейных

систем [4, 5], виброударных устройств [6] и систем с циклической автоматикой, изучена динамика экстремальных регуляторов и самонастраивающихся систем [7], сложных радиосхем — ламповых и транзисторных [8] и т. д. Успех в решении этих и других существенно нелинейных задач связан в значительной мере с возможностью кусочно-линейной аппроксимации нелинейностей, что позволяет получать аналитические выражения точечного отображения в явном или параметрическом виде. При кусочно-линейной аппроксимации нелинейностей фазовое пространство динамической системы может быть разбито на области D_1, D_2, \dots, D_m , в каждой из которых поведение системы описывается системой линейных дифференциальных уравнений. Следовательно, в каждой из областей D_1, D_2, \dots, D_m решение дифференциальных уравнений (4.1) находится без труда, а при переходе изображающей точки из одной области в другую решения «спиваются» по непрерывности. Этот прием исследования, получивший название метода припасовывания, применялся вначале лишь для отыскания периодических движений. Его дальнейшее развитие и систематическое использование послужило одним из источников, из которых возник метод точечных отображений. Параметрическое представление функций последования, впервые введенное А. А. Андроновым, существенно увеличило «пробивную силу» метода точечных отображений и позволило в короткий срок решить большое число задач, долгое время остававшихся не исследованными. Итог большой работы, проделанной А. А. Андроновым, его сотрудниками и учениками, был подведен в книге А. А. Андронова, А. А. Витта и С. Э. Хайкина «Теория колебаний». Во втором издании этой книги, вышедшем под редакцией Н. А. Железцова, содержится описание метода точечных отображений в применении к динамическим системам второго порядка. В дальнейшем изучение точечных отображений, порождаемых фазовыми траекториями динамической системы, позволило с единой точки зрения рассмотреть такие, казалось бы, разнородные задачи, как движение блуждающей частицы, эволюция популяций, работа конечного автомата, математические модели уличного движения автотранспорта на перекрестке, динамика перцептрона, представляющего модель процесса обучения, и другие задачи. Изучение при помощи метода точечных отображений гомоклинических структур в многомерном фазовом простран-

стве дало возможность установить связь между детерминированными и стохастическими системами (см. гл. 7). Итоги проделанной работы по развитию метода точечных отображений применительно к динамическим системам с многомерным фазовым пространством изложены в книге [9].

В данной главе излагаются начальные сведения о методе точечных отображений: вводятся основные понятия и приемы исследования, которые позволяют изучать поведение фазовых траекторий в двумерном и трехмерном фазовом пространстве. На конкретных примерах простейших кусочно-линейных систем рассматриваются автоколебания, вынужденные и параметрические колебания, а также скользящие движения, возможные в этих системах.

§ 1. Сведениe рассмотрения поведения фазовых траекторий к точечному отображению прямой в прямую и плоскости в плоскость

Многие стороны поведения фазовых траекторий динамической системы, а в ряде случаев и полная картина разбиения фазового пространства на траектории могут быть выяснены путем исследования поведения точек пересечения траекторий с так называемым отрезком без контакта (в случае двумерного фазового пространства) или с секущей поверхностью (в случае трехмерного фазового пространства). Последовательность точек пересечения образует некоторое точечное преобразование T , к изучению которого и сводится задача об исследовании поведения фазовых траекторий. При этом оказывается, что структура рассматриваемой динамической системы взаимно однозначно определяется структурой порождаемого ею точечного отображения T . Это означает, что каждому вопросу в отношении структуры решений дифференциальных уравнений отвечает некоторый вопрос, относящийся к структуре точечного отображения T . В частности, периодическим решениям дифференциальных уравнений или, что то же самое, замкнутым фазовым траекториям ставится в соответствие неподвижные точки соответствующего точечного отображения T .

Орбитно устойчивому или орбитно неустойчивому периодическому движению отвечает соответственно устойчивая или неустойчивая неподвижная точка. Для того чтобы убедиться в справедливости всех этих утверждений,

а также выяснить другие свойства точечного отображения, вновь рассмотрим случай двумерного фазового пространства, т. е. рассмотрим автономную динамическую систему второго порядка, поведение которой описывается дифференциальными уравнениями

$$\frac{dx}{dt} = P(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = Q(x, y). \quad (4.2)$$

Предположим, как и прежде, что для системы уравнений (4.2) выполняются теоремы единственности решения и его непрерывной зависимости от начальных условий по крайней мере в сторону возрастания времени, а фазовое пространство представляет собою плоскость.

Проведем на фазовой плоскости через неособые точки отрезок без контакта AB , т. е. такой отрезок прямой или дуги некоторой гладкой кривой, в каждой точке которого фазовые траектории системы (4.2) пересекают его, нигде не касаясь. Рассмотрим фазовую траекторию Γ , проходящую через некоторую точку M отрезка AB , где M отлична от точек A или B . Пусть в момент времени $t = 0$ изображающая точка, движущаяся на траектории Γ согласно уравнениям (4.2), совпадает с точкой M . Если при дальнейшем движении изображающей точки вдоль фазовой кривой Γ она будет вновь и вновь пересекать отрезок без контакта AB , то говорят, что точка M имеет последующие. Тогда на основании теоремы о непрерывной зависимости решения от начальных условий все точки на отрезке AB , достаточно близкие к точке M , также имеют последующие. Пусть s и \bar{s} — координаты точки M и ее последующей (рис. 4.1). Согласно сказанному выше, будет существовать функциональная зависимость

$$\bar{s} = f(s), \quad (4.3)$$

которая называется функцией последования. Она выражает закон некоторого точечного отображения отрезка AB (или его части) в себя, устанавливая взаимно однозначное соответствие между точками этого отрезка и их последующими. Тем самым задача изучения структуры разбиения фазовой плоскости (или ее части) на траектории сводится

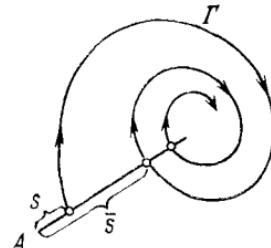


Рис. 4.1

к изучению структуры соответствующего точечного отображения T отрезка без контакта в себя с функцией последования (4.3). Геометрически непосредственно ясно (рис. 4.1), что для существования функции последования необходимо, чтобы траектории на фазовой плоскости обладали свойством возвращаемости, причем возвращение изображающей точки на отрезок без контакта должно происходить за конечный промежуток времени.

Для замкнутой фазовой траектории точка M совпадает со своей следующей, поэтому $s^* = f(s^*)$. Точка $s = s^*$ называется неподвижной точкой точечного отображения T . Отсюда следует, что отыскание замкнутых траекторий

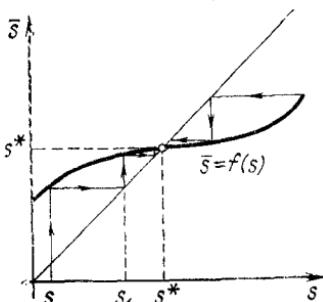


Рис. 4.2

(пределных циклов) на фазовой плоскости сводится к отысканию неподвижных точек точечного отображения T . Эта задача может быть решена графически при помощи построения на плоскости \bar{s} графика функции $\bar{s} = f(s)$. Кривая $\bar{s} = f(s)$ обладает тем свойством, что ее производная $d\bar{s}/ds$ всегда положительна, так как в силу теоремы Коши фазовые траектории не могут пересекаться. Непод-

вижные точки отображения T находятся из условия пересечения графика функции последований $\bar{s} = f(s)$ с биссектрисой $\bar{s} = s$. Указанное геометрическое построение называется диаграммой Ламерая (рис. 4.2).

Существенно, что характер поведения кривой $\bar{s} = f(s)$ вблизи точки $\bar{s} = s$ полностью определяется характером поведения фазовых траекторий вблизи соответствующей этой точке предельного цикла. Это позволяет сформулировать на языке точечных преобразований условие устойчивости предельного цикла. Рассмотрим последовательность точек, определяемую соотношениями

$$s_1 = f(s), \quad s_2 = f(s_1), \quad s_3 = f(s_2), \dots \quad (4.4)$$

Если фазовая траектория при $t \rightarrow \infty$ стремится к предельному циклу, то соответствующая последовательность (4.4) будет иметь своей предельной точкой неподвижную точку $s = s^*$. И наоборот, из сходимости последовательности (4.4) к неподвижной точке $s = s^*$ следует, что соответствующая ей фазовая траектория стремится при $t \rightarrow \infty$

к предельному циклу. В этом случае неподвижная точка называется устойчивой, ибо она соответствует устойчивому предельному циклу. Последовательность (4.4) можно изобразить на диаграмме рис. 4.2 в виде «лестницы Ламерея», направление перемещения по которой дает возможность наглядно определить устойчивость неподвижной точки $s = s^*$ в большом (потому что это построение можно провести на всей кривой $\bar{s} = f(s)$). Условие устойчивости неподвижной точки $s = s^*$ в малом дается следующей теоремой Кёнигса: неподвижная точка $s = s^*$ точечного отображения $\bar{s} = f(s)$ устойчива, если $|d\bar{s}/ds|_{s=s^*} < 1$, и неустойчива, если $|d\bar{s}/ds|_{s=s^*} > 1$ *). Для доказательства этой теоремы достаточно линеаризовать функцию $\bar{s} = f(s)$ в малой окрестности точки $s = s^*$ и построить соответствующую «лестницу Ламерея», что мы предлагаем проделать читателю.

Во многих задачах не представляется возможным получить функцию последовательности, записанную в явном виде (4.3). В таком случае прибегают к параметрической форме этой записи, что часто облегчает не только нахождение функции последовательности, но и ее исследование. Пусть, например, фазовая плоскость xy рассматриваемой динамической системы разбивается прямой L , определяемой уравнением $y = -kx$, на две области: I и II (рис. 4.3), в каждой из которых уравнения движения (4.2) различны, но линейны. Обозначим через x_1, x' абсциссы точек пересечения прямой $y = -kx$ с некоторой фазовой траекторией, по которой изображающая точка движется в области I , а через x', x_2 — абсциссы точек пересечения той же прямой с фазовой траекторией, которая проходит через точку $x', y' = -kx'$ и принадлежит области II . Интегрируя ли-

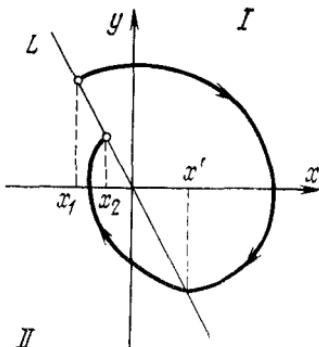


Рис. 4.3

*) Теорема Кёнигса справедлива и для случая, когда производная $d\bar{s}/ds < 0$. Указанный случай имеет место, например, при исследовании вырожденного трехмерного фазового пространства, когда это исследование сводится к изучению точечного отображения полуправой в себя (см. § 3).

нейные дифференциальные уравнения в области I с начальными условиями $t = 0, x = x_1, y = y_1$, получим решение $x = \varphi_1(t, x_1, y_1), y = \varphi_2(t, x_1, y_1)$, которое зависит от начальных значений x_1, y_1 фазовых переменных линейно. Через промежуток времени τ_1 изображающая точка вновь придет на прямую L в точку с координатами $x', y' = -kx'$. Подставляя эти значения в найденное решение и используя уравнение прямой L , приходим к системе уравнений

$$x' = \varphi_1(\tau_1, x_1, y_1), \quad y' = -kx',$$

$$y' = \varphi_2(\tau_1, x_1, y_1), \quad y_1 = -kx_1,$$

откуда после исключения величин y_1, y' получаем искомую функцию последования в параметрическом представлении

$$x_1 = \psi_1(\tau_1), \quad x' = \psi_2(\tau_1) \quad (4.5)$$

с текущим параметром τ_1 . Функция последования (4.5) осуществляет точечное отображение T_1 верхней части прямой L в нижнюю ее часть.

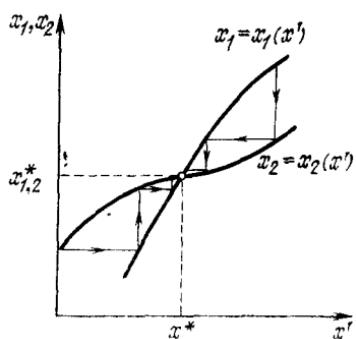


Рис. 4.4

Проводя аналогичное рассмотрение области II на рис. 4.3, получим точечное отображение T_2 нижней части прямой L в верхнюю ее часть с функцией последования

$$x_2 = \psi_3(\tau_2), \quad x' = \psi_4(\tau_2), \quad (4.6)$$

где текущий параметр τ_2 представляет собою время пробега изображающей точки в области II. Точечное отображение T отрезка полупрямой L в себя получается в результате последовательного применения точечных отображений T_1 и T_2 , т. е. отображение $T = T_1 \cdot T_2$ является произведением отображений T_1 и T_2 . Задача отыскания предельных циклов, охватывающих обе области, сводится, таким образом, к нахождению точек пересечения кривых (4.5) и (4.6) (рис. 4.4) или, что то же самое, к решению системы уравнений

$$\psi_1(\tau_1^*) = \psi_3(\tau_2^*), \quad \psi_2(\tau_1^*) = \psi_4(\tau_2^*),$$

которые обычно оказываются трансцендентными. Устойчивость неподвижной точки и соответствующего предельного цикла определяется по-прежнему теоремой Кёнигса, в которой нужно использовать выражение

$$\frac{dx_2}{dx_1} = - \frac{dx_2}{dx'} \cdot \frac{dx'}{dx_1} = \frac{\psi'_3(\tau_2^*)}{\psi'_4(\tau_2^*)} \cdot \frac{\psi'_2(\tau_1^*)}{\psi'_1(\tau_1^*)}. \quad (4.7)$$

Описанный способ получения точечных отображений применим для любых кусочно-линейных динамических систем второго порядка и в более общем случае, когда фазовая плоскость разбивается на три, четыре и большее число областей. Однако практические трудности в решении задачи при этом возрастают из-за громоздкости получаемых выражений. Лишь с созданием быстродействующих электронно-вычислительных машин появились новые возможности для преодоления математических трудностей при решении не только этих, но и более сложных и громоздких задач.

Обратимся теперь к исследованию поведения траекторий в трехмерном фазовом пространстве. Поведение соответствующей динамической системы описывается системой трех нелинейных дифференциальных уравнений первого порядка. Будем по-прежнему предполагать, что для их решений в сторону возрастания времени соблюдаются теоремы единственности и непрерывной зависимости от начальных условий. Введем понятие поверхности без контакта. По определению поверхностью без контакта называется гладкая поверхность, во всех своих точках пересекаемая фазовыми траекториями без касания. Секущей поверхностью будем называть поверхность без контакта, которая при возрастании времени вновь и вновь пересекается фазовыми траекториями, причем так, что промежутки времени между последовательными пересечениями ограничены. При выполнении сделанных выше предположений фазовые траектории рассматриваемой динамической системы порождают на секущей поверхности S некоторое непрерывное точечное отображение T , которое любой точке M поверхности S ставит в соответствие ближайшую, следующую за M , точку \bar{M} пересечения фазовой траектории, выходящей из точки M , с поверхностью S . Часто в качестве секущей поверхности S выбирают некоторую плоскость. В этом случае задача изучения поведения траекторий в трехмерном фазовом пространстве сводится

к исследованию точечного отображения T плоскости в себя. Неподвижная точка отображения T так же, как и в случае фазовой плоскости, соответствует замкнутой траектории в трехмерном фазовом пространстве. Устойчивая неподвижная точка отвечает орбитно устойчивому предельному циклу. Процедура нахождения точечного отображения T в рассматриваемом случае аналогична

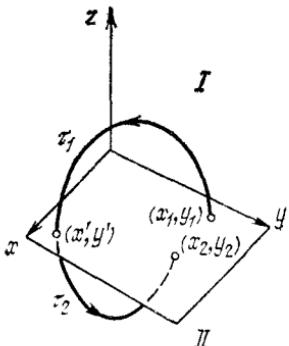


Рис. 4.5

описанной выше для случая фазовой плоскости, однако получающиеся при этом выражения значительно усложняются. Пусть, например, трехмерное фазовое пространство Φ с декартовыми координатами x, y, z разбивается плоскостью $z = 0$ на две области, в каждой из которых уравнения динамики

$$\frac{dx}{dt} = P(x, y, z), \quad \frac{dy}{dt} = Q(x, y, z), \\ \frac{dz}{dt} = R(x, y, z) \quad (4.8)$$

различны, но линейны. Интегрируя линейные дифференциальные уравнения (4.8) в области I фазового пространства Φ (рис. 4.5), запишем решение с начальными условиями $t = 0, x = x_0, y = y_0, z = z_0$ в виде

$$x = \varphi_1(t, x_0, y_0, z_0), \quad y = \varphi_2(t, x_0, y_0, z_0), \\ z = \varphi_3(t, x_0, y_0, z_0). \quad (4.9)$$

Начальные значения x_0, y_0, z_0 входят в выражения (4.9) линейно, что существенно упрощает дальнейшее выкладки. Пусть изображающая точка, которая в начальный момент времени $t = 0$ находилась на плоскости $z = 0$ в точке $M_1(x_1, y_1)$, перемещается в области I согласно уравнениям (4.8) и через промежуток времени τ_1 вновь попадает на плоскость $z = 0$ в другую, вообще говоря, точку $M'(x', y')$. При этом в соответствии с законом движения (4.9) мы получаем соотношения

$$x' = \varphi_1(\tau_1, x_1, y_1, 0), \quad y' = \varphi_2(\tau_1, x_1, y_1, 0), \\ 0 = \varphi_3(\tau_1, x_1, y_1, 0), \quad (4.10)$$

определяющие точечное отображение T_1 плоскости $z = 0$ в себя. В самом деле, пусть значения x_1, y_1 заданы. Тогда, подставляя эти значения в (4.10), получаем уравнение

$\varphi_3(\tau_1, x_1, y_1, 0) = 0$, которое обычно оказывается трансцендентным относительно τ_1 . Затем находим наименьший корень τ_1 уравнения $\varphi_3 = 0$ и подставляем найденное значение τ_1 в первые два соотношения (4.10). В результате находим координаты точки (x', y') , в которую преобразуется точка (x_1, y_1) . Если разрешить первые два соотношения (4.10) относительно x_1, y_1 и подставить полученные выражения x_1, y_1 в третье соотношение (4.10), то можно представить точечное отображение T_1 в виде

$$x_1 = \psi_1(\tau_1, x', y'), \quad y_1 = \psi_2(\tau_1, x', y'), \\ \psi_3(\tau_1, x', y') = 0. \quad (4.11)$$

Отсюда по заданным значениям x', y' сначала из третьего соотношения (4.11) определяем наименьший корень τ_1 полученного уравнения $\psi_3 = 0$ и, подставляя затем это значение τ_1 в первые два соотношения (4.11), находим величины x_1, y_1 . Тем самым точке M' плоскости $z = 0$ однозначно ставится в соответствие некоторая точка M_1 той же плоскости.

Проинтегрируем теперь уравнения (4.8) в области II фазового пространства Φ и запишем найденное решение в виде

$$x = \varphi_4(t, x_0, y_0, z_0), \quad y = \varphi_5(t, x_0, y_0, z_0), \\ z = \varphi_6(t, x_0, y_0, z_0). \quad (4.12)$$

Начальные значения x_0, y_0, z_0 входят сюда также линейно. Пусть изображающая точка находится в начальный момент времени $t = 0$ на плоскости $z = 0$ в точке M' (x', y') и затем, перемещаясь в области II , через промежуток времени τ_2 вновь приходит на плоскость $z = 0$ в некоторую точку $M_2(x_2, y_2)$; тогда согласно (4.12) получаем соотношения

$$x_2 = \varphi_4(\tau_2, x', y', 0), \quad y_2 = \varphi_5(\tau_2, x', y', 0), \\ 0 = \varphi_6(\tau_2, x', y', 0), \quad (4.13)$$

которые осуществляют точечное отображение T_2 плоскости $z = 0$ в себя: точке M' однозначно ставится в соответствие точка M_2 . Точечное отображение T_1 , определяемое соотношениями (4.10), и точечное отображение T_2 , определяемое соотношениями (4.13), проведенные последовательно, определяют точечное отображение $T = T_2 \cdot T_1$, которое является произведением точечных отображений T_1 и T_2 , осуществляющее преобразование точки M_1 плоскости $z = 0$ в точку M_2 . Это отображение можно записать в виде

краткой формулы $TM_1 = M_2$. При совпадении точек M_1 и M_2 эта формула превращается в уравнение $TM^* = M^*$, которому должна удовлетворять неподвижная точка $M_1 = M_2 = M^*$. Неподвижная точка отображения T соответствует замкнутой траектории в трехмерном фазовом пространстве Φ . Из условия совпадения точек M_1 и M_2 после подстановки в соотношения (4.10) и (4.13) значений $x_1 = x_2 = x^*$, $y_1 = y_2 = y^*$ получаем систему уравнений

$$\begin{aligned} x'^* &= \varphi_1(\tau_1^*, x^*, y^*, 0), \quad y'^* = \varphi_2(\tau_1, x^*, y^*, 0), \\ &\quad \varphi_3(\tau_1^*, x^*, y^*) = 0, \\ x^* &= \varphi_4(\tau_1^*, x'^*, y^*, 0), \quad y^* = \varphi_5(\tau_2^*, x'^*, y^*, 0), \quad (4.14) \\ &\quad \varphi_6(\tau_2^*, x'^*, y'^*) = 0 \end{aligned}$$

для определения координат x^* , y^* , x'^* , y'^* точек, через которые проходит замкнутая фазовая траектория, а также величин τ_1^* и τ_2^* , определяющих период $\tau = \tau_1^* + \tau_2^*$ соответствующего периодического движения. Устойчивая изолированная неподвижная точка отображения T соответствует наличию в фазовом пространстве Φ орбитно устойчивого предельного цикла.

Может оказаться, что $TM_1 = M_2 \neq M_1$, однако при вторичном применении отображения T точка $M_3 = TM_2 = T(TM_1) = T^2M_1$ совпадает с точкой M_1 . Точка $M_1 = M_3 = M^*$, удовлетворяющая уравнению $T^2M^* = M^*$, называется двукратной неподвижной точкой отображения T . Предельный цикл, соответствующий двукратной неподвижной точке, состоит из двух витков, каждый из которых охватывает обе области I и II трехмерного фазового пространства Φ . В общем случае, когда M^* является m -кратной неподвижной точкой отображения T , для которой удовлетворяется соотношение $T^mM^* = M^*$ (и при целых s , меньших m , $T^sM^* \neq M^*$), в фазовом пространстве рассматриваемой динамической системы имеется предельный цикл, состоящий из m витков.

Если для точечного отображения T_1 воспользоваться выражениями (4.11), то процедуру отыскания неподвижных точек полного отображения $T = T_2 \cdot T_1$ можно свести, аналогично случаю фазовой плоскости, к некоторым геометрическим построениям. Для этого рассмотрим трехмерное пространство Ψ с декартовыми координатными осями Ox' , Oy' , Oz' . Соотношения (4.11) определяют в этом пространстве уравнения поверхностей $x_1 = \Psi_1(x', y')$,

$y_1 = \Psi_2(x', y')$, а соотношения (4.12) — уравнения поверхностей $x_2 = \Psi_3(x', y')$, $y_2 = \Psi_4(x', y')$. Отложим сначала вдоль направления оси Oz' величины $x_1 = \Psi_1(x', y')$ и $x_2 = \Psi_3(x', y')$. В результате получаем две поверхности, пересекающиеся вдоль некоторой кривой, проекция которой на плоскость $z' = 0$ дает кривую Γ_1 (рис. 4.6). Если затем отложить по направлению оси Oz' величины $y_1 = \Psi_2(x', y')$ и $y_2 = \Psi_4(x', y')$, то получаем две другие поверхности, кривая пересечения которых дает в проекции на плоскость $z' = 0$ кривую Γ_2 (рис. 4.7). Совместим теперь плоскости $z' = 0$ рис. 4.6 и 4.7 с имеющимися на них кривыми Γ_1 и Γ_2 , тогда получим диаграмму, изображенную на рис. 4.8. Точки пересечения кривых на этой диаграмме (на рис. 4.8 показан случай одной точки пересечения) соответствуют неподвижным точкам отображения T . В самом деле, в точке пересечения кривых Γ_1 и Γ_2 на рис. 4.8 одновременно выполняются два условия: $x_1 = x_2$ и $y_1 = y_2$, которые говорят о том, что полное

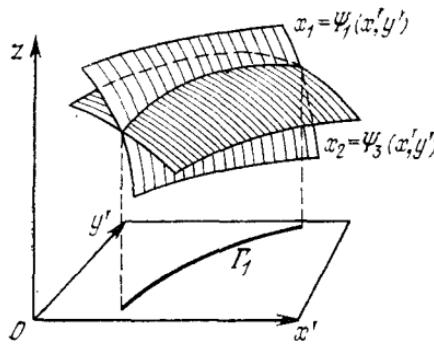


Рис. 4.6

изображение T — это точка $M_1 = M_2 = M^*$ неподвижной. Одновременно неподвижной точкой является, конечно, и точка M'^* с координатами

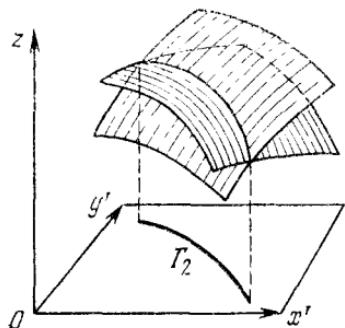


Рис. 4.7

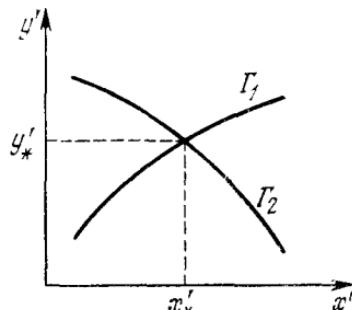


Рис. 4.8

точечное отображение $T = T_2 \cdot T_1$ оставляет точку $M_1 = M_2 = M^*$ неподвижной. Одновременно неподвижной точкой является, конечно, и точка M'^* с координатами

x'^* , y'^* потому, что соответствующий предельный цикл проходит и через эту точку.

Этот геометрический прием отыскания неподвижных точек отображения T при помощи построения некоторых поверхностей и кривых можно рассматривать как обобщение геометрического метода исследования точечного отображения прямой в прямую при помощи построения диаграммы Кёнигса—Ламеря на случай точечного отображения плоскости в плоскость. Объем вычислений, которые необходимо выполнить при построении поверхностей и кривых Γ_1 и Γ_2 , значительно превышает объем вычислений, связанных с построением диаграмм Кёнигса—Ламеря, и практически эти вычисления в большинстве случаев удается проделать лишь с привлечением электронных вычислительных машин.

Описанная процедура отыскания неподвижных точек отображения плоскости самой в себя может быть с успехом использована и в случае, когда фазовое пространство Φ разделяется на две области произвольно расположенной в этом пространстве плоскостью. В этом случае на разделяющей плоскости S нужно ввести систему координат, например, с декартовыми осями u , v и выразить фазовые переменные x , y , z через величины u , v . Эти соотношения будут иметь вид

$$x = a_1 u + b_1 v + c_1, \quad y = a_2 u + b_2 v + c_2,$$

$$z = a_3 u + b_3 v + c_3,$$

где a_i , b_i , c_i — известные постоянные коэффициенты. Затем находятся параметрические уравнения, выражающие u_1 , v_1 и u_2 , v_2 через величины u' , v' .

§ 2. Динамические системы, описываемые дифференциальными уравнениями с разрывной правой частью. Скользящие движения

В ряде случаев рассмотрение динамической системы сводится к исследованию системы дифференциальных уравнений (4.1), правые части которых терпят разрывы непрерывности первого рода на некоторых гладких поверхностях S_1 , S_2 , ..., S_k , разбивающих фазовое пространство на некоторые области D_1 , D_2 , ..., D_m . В каждой из областей D_j ($j = 1, 2, \dots, m$) движение системы определяется дифференциальными уравнениями

$$\dot{x}_i = f_{ij}(x_1, x_2, \dots, x_n) \begin{cases} l=1, 2, \dots, n, \\ j=1, 2, \dots, m, \end{cases}, \quad (4.15)$$