

x'^* , y'^* потому, что соответствующий предельный цикл проходит и через эту точку.

Этот геометрический прием отыскания неподвижных точек отображения T при помощи построения некоторых поверхностей и кривых можно рассматривать как обобщение геометрического метода исследования точечного отображения прямой в прямую при помощи построения диаграммы Кёнигса—Ламеря на случай точечного отображения плоскости в плоскость. Объем вычислений, которые необходимо выполнить при построении поверхностей и кривых Γ_1 и Γ_2 , значительно превышает объем вычислений, связанных с построением диаграмм Кёнигса—Ламеря, и практически эти вычисления в большинстве случаев удается проделать лишь с привлечением электронных вычислительных машин.

Описанная процедура отыскания неподвижных точек отображения плоскости самой в себя может быть с успехом использована и в случае, когда фазовое пространство Φ разделяется на две области произвольно расположенной в этом пространстве плоскостью. В этом случае на разделяющей плоскости S нужно ввести систему координат, например, с декартовыми осями u , v и выразить фазовые переменные x , y , z через величины u , v . Эти соотношения будут иметь вид

$$x = a_1 u + b_1 v + c_1, \quad y = a_2 u + b_2 v + c_2,$$

$$z = a_3 u + b_3 v + c_3,$$

где a_i , b_i , c_i — известные постоянные коэффициенты. Затем находятся параметрические уравнения, выражающие u_1 , v_1 и u_2 , v_2 через величины u' , v' .

§ 2. Динамические системы, описываемые дифференциальными уравнениями с разрывной правой частью. Скользящие движения

В ряде случаев рассмотрение динамической системы сводится к исследованию системы дифференциальных уравнений (4.1), правые части которых терпят разрывы непрерывности первого рода на некоторых гладких поверхностях S_1 , S_2 , ..., S_k , разбивающих фазовое пространство на некоторые области D_1 , D_2 , ..., D_m . В каждой из областей D_j ($j = 1, 2, \dots, m$) движение системы определяется дифференциальными уравнениями

$$\dot{x}_i = f_{ij}(x_1, x_2, \dots, x_n) \begin{cases} l=1, 2, \dots, n, \\ j=1, 2, \dots, m, \end{cases}, \quad (4.15)$$

в которых функции $f_{ij}(x_1, \dots, x_n)$ являются гладкими. Однако для полного описания рассматриваемой динамической системы необходимо еще выяснить, как движется изображающая точка в фазовом пространстве при попадании на граничные поверхности S_1, S_2, \dots, S_k .

С этой целью рассмотрим сначала простейший случай двумерного фазового пространства. Пусть фазовая плоскость разделяется некоторой прямой S на две области D_1 и D_2 , в каждой из которых правые части соответствующих дифференциальных уравнений (4.15) являются гладкими функциями фазовых переменных. Среди всех возможных типов поведения фазовых траекторий в окрестности прямой S рассмотрим лишь три основных случая:

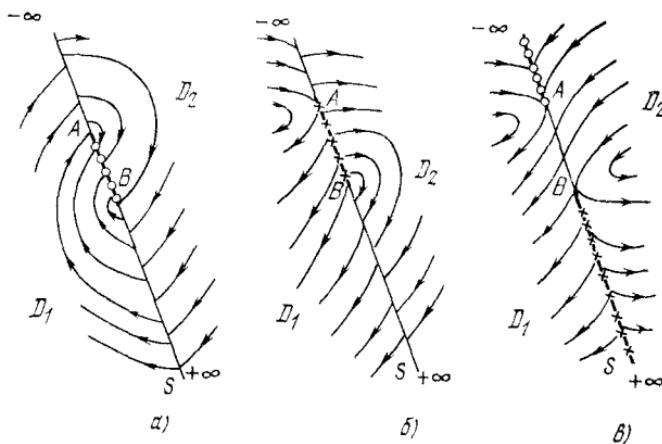


Рис. 4.9

которые показаны на рис. 4.9. В первом случае (рис. 4.9, *a*) при возрастании времени t изображающая точка переходит из области D_1 в область D_2 на участке $(-\infty, A)$ границы S , переходит из D_2 в D_1 на участке $(B, +\infty)$ и остается на отрезке AB границы S . Предположим, что в рассматриваемой динамической системе не могут происходить скачкообразные изменения фазовых переменных, т. е. они изменяются во времени непрерывно (по крайней мере в малой окрестности границы S). Тогда при возрастании времени изображающая точка, пересекая границу S , на участках $(-\infty, A)$ и $(B, +\infty)$ переходит из одной области в другую. Непрерывный переход фазовой точки через поверхность разрыва из одной области гладкости

в другую соответствует так называемому «шиванию» решений по непрерывности. Иная ситуация возникает на участке стыка фазовых траекторий. При попадании на отрезок AB изображающая точка вынуждена двигаться по нему до тех пор, пока не достигнет состояния равновесия, если оно существует, или одной из конечных точек отрезка AB . Перемещение изображающей точки по отрезку AB называется скользящим движением. Во втором случае (рис. 4.9, б) изображающая точка при возрастании времени t переходит из области D_1 в область D_2 на участке $(-\infty, A)$ и из области D_2 в область D_1 на участке $(B, +\infty)$ прямой S . Что касается отрезка AB , то он является границей, разделяющей фазовые траектории областей D_1 и D_2 , от которой изображающая точка, двигаясь по фазовым траекториям, уходит от прямой S с возрастанием времени. По аналогии с предыдущим случаем отрезок AB на рис. 4.9, б можно назвать участком неустойчивого скользящего движения. Наконец, в третьем случае (рис. 4.9, в) устойчивое скользящее движение осуществляется на участке $(-\infty, A)$, неустойчивое скользящее движение — на участке $(B, +\infty)$, а на отрезке AB прямой S изображающая точка переходит из области D_2 в область D_1 . Направление наклона касательных фазовых кривых, приходящих навстречу друг другу на участок $(-\infty, A)$ устойчивого скользящего движения, указывает на то, что движение изображающей точки по этому участку будет происходить в направлении точки A^*). После достижения точки A , которая не является состоянием равновесия рассматриваемой динамической системы, изображающая точка уходит в область D_1 , по траектории, касающейся прямой S в точке A .

Рассмотрим теперь поведение фазовой точки вблизи и на поверхности разрыва правой части дифференциальных уравнений (4.1) в случае трехмерного фазового пространства. Пусть S — одна из поверхностей разрыва S_1 и пусть к рассматриваемому ее участку примыкают области D_1 и D_2 . По-прежнему предполагая, что в динамической системе не могут происходить скачкообразные изменения фазовых переменных, рассмотрим некоторые основные случаи, которые могут здесь представиться. На рис. 4.10 показан один из наиболее простых случаев. Упрощение состоит в том, что со стороны области D_1 поведение фазо-

*) Строгое обоснование этого утверждения приведено в [9].

вых траекторий в малой окрестности поверхности S одинаково: двигаясь по любой из этих траекторий, изображающая точка или всегда приходит на рассматриваемый участок поверхности S (рис. 4.10, a и \bar{b}), или уходит от этой поверхности (рис. 4.10, \bar{c}). В малой окрестности поверхности S со стороны области D_2 поведение фазовых

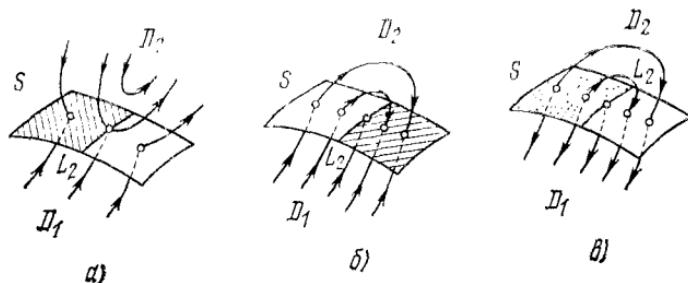


Рис. 4.10

траекторий более сложное: двигаясь по кривым в области D_2 рис. 4.10, a , изображающая точка или попадает на поверхность S , или, приближаясь к поверхности S , достигает некоторого минимального расстояния от этой поверхности и затем удаляется от нее, или, наконец, постоянно удаляется от поверхности S . Кривая L_2 , которая состоит из точек соприкосновения поверхности S с фазовыми траекториями области D_2 , отделяет область скользящих движений на поверхности S от области непрерывного перехода изображающей точки из D_1 в D_2 (рис. 4.10, a и \bar{b}) или из D_2 в D_1 (рис. 4.10, \bar{c}). В той части поверхности S , где фазовые траектории стыкуются, находится область устойчивых скользящих движений (на рис. 4.10, a и \bar{b} эта область отмечена штриховкой). Слева от кривой L_2 на рис. 4.10, \bar{c} находится область неустойчивых скользящих движений, которая по существу является граничной поверхностью, разделяющей фазовые траектории на участки с различным направлением движения по ним изображающей точки.

Если в результате устойчивого скользящего движения изображающая точка приходит на граничную кривую L_2 , то в случае рис. 4.10, a фазовая точка покидает поверхность S и уходит в область D_2 , а в случае рис. 4.10, \bar{b} она продолжает движение вдоль кривой L_2 . Рассмотрим теперь более сложный случай, когда поведение траекторий

в области D_1 аналогично поведению траекторий в области D_2 только что описанного случая. Тогда на поверхности S появляется кривая L_1 , аналогичная кривой L_2 в первом случае. На рис. 4.11 показан практически часто встречающийся случай совпадения кривых L_1 и L_2 . Область устойчивых скользящих движений заштрихована,

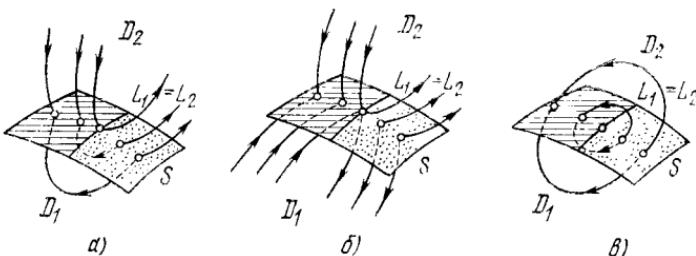


Рис. 4.11

а область неустойчивых скользящих движений отмечена точками. Более общий случай, когда кривые L_1 и L_2 не совпадают, изображен на рис. 4.12, a , b , c . Границу области скользящих движений на рис. 4.12 образуют кривые L_1 и L_2 . Если изображающая точка в результате устойчивого скользящего движения по поверхности S приходит на границу области — кривую L_1 или L_2 , то в дальнейшем фазовая точка или движется вдоль этой границы, если эта граница является устойчивым множеством (например, кривая L_2 на рис. 4.12), или уходит в одну из областей, примыкающих к поверхности S . (Например, при достижении кривой L_1 на рис. 4.12, c изображающая точка уходит в область D_1 .)

В общем случае n -мерного фазового пространства изображающая точка, пришедшая на устойчивую границу S размерности $n - 2$ области скользящих движений размерности $n - 1$, движется по ней до тех пор, пока не дойдет до соответствующей границы размерности $n - 3$ и т. д. вплоть до границы нулевой размерности. В соответствии с этим описанием фазовое пространство Φ распадается на подпространства Φ_i , роль которых играют области D_j размерности n , области устойчивых скользящих движений на граничных поверхностях S_l размерности $n - 1$, их границы размерности $n - 2$, $n - 3$ и т. д. [9].

Вопрос о том, каким уравнениям подчиняется скользящее движение, решается после рассмотрения характера

той идеализации, в результате которой возникла разрывность правой части дифференциальных уравнений (4.1). В случае, когда некоторая характеристика, имеющая участок с крутым наклоном касательной, заменяется двумя горизонтальными прямыми с разрывом первого рода

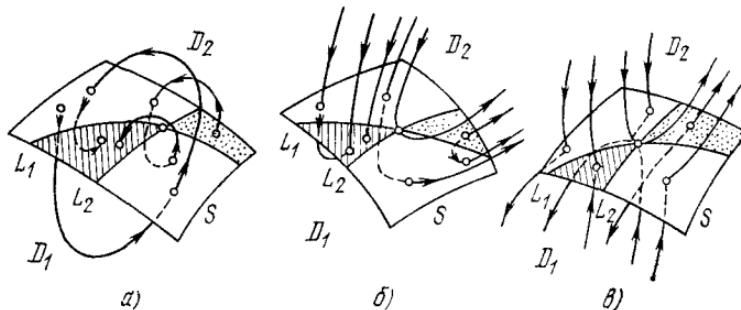


Рис. 4.12

(т. е. идеализируется при помощи так называемой Z -характеристики), уравнения скользящего движения можно получить следующим предельным переходом: участок кривой с крутым наклоном заменяется сначала наклонной прямой, далее составляются уравнения движения системы в этой «переходной» области и затем совершается переход к пределу, при котором угол наклона прямой стремится к значению $\pi/2$. В рассмотренном случае разрывность правых частей дифференциальных уравнений движения является идеализацией очень быстрого изменения правых частей в окрестности поверхности S . В других случаях эта разрывность может быть следствием пренебрежения некоторыми быстро меняющимися в окрестности S дополнительными переменными ξ_i , от которых зависят правые части систем уравнений (4.1), а сами уравнения (4.1) являются упрощением некоторой более общей системы дифференциальных уравнений вида

$$\dot{x}_i = f_i(x_1, x_2, \dots, x_n, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m), \quad (4.16)$$

$$F_j(x_1, x_2, \dots, x_n, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m, \dot{\xi}_1, \dot{\xi}_2, \dots, \dot{\xi}_m) = 0 \quad (4.17) \\ (i = 1, 2, \dots, n, j = 1, 2, \dots, m),$$

где присоединенные уравнения (4.17) и зависимость правых частей уравнений (4.16) от переменных $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m$ нам не известны. При этом, однако, предполагается, что в силу уравнений (4.16) и (4.17) вне малой окрестности

поверхности S_l ($l = 1, 2, \dots, k$) функции $f_i(x_1, x_2, \dots, x_n, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ пренебрежимо мало отличаются от функций $f_{is}(x_1, x_2, \dots, x_n), f_{ir}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ в уравнениях (4.15), описывающих движение системы в областях D_s и D_r , отделенных одна от другой поверхностью S_l . Кроме того, должно быть известно, что в окрестности поверхности S_l происходит быстрое изменение величин $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m$, идеализация которого скачкообразным изменением приводит к разрывности правых частей уравнений (4.1). При этих условиях предельный переход, частный случай которого был описан выше, приводит к правильным уравнениям скользящих движений. Общий прием составления уравнений скользящих движений в практически важном частном случае, когда разрыв непрерывности порождается одной быстро меняющейся вблизи поверхности S ограниченной функцией $\Omega(x, \xi)$, указан в книге [9].

§ 3. Точечное отображение сдвига T_τ и его применение к изучению вынужденных и параметрических колебаний динамической системы

В § 1 было показано, что динамической системе, поведение которой описывается дифференциальными уравнениями (4.1), можно сопоставить некоторое точечное отображение T при помощи отрезка без контакта в случае двумерного фазового пространства или при помощи секущей поверхности в случае трехмерного пространства. В этом параграфе мы рассмотрим еще один тип точечного отображения, называемого отображением сдвига. По определению, отображением сдвига T_τ динамической системы, описываемой дифференциальными уравнениями[†] вида

$$\dot{x}_i = f_i(x_1, x_2, \dots, x_n, t) \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (4.18)$$

называется точечное обображение, ставящее в соответствие каждой точке фазового пространства такую точку, в которую эта точка[†] перейдет согласно дифференциальным уравнениям (4.18) спустя время τ . При этом предполагается, что дифференциальные уравнения (4.18) допускают единственное решение, определенное для всех значений времени t . При различных значениях τ на интервале $-\infty < \tau < \infty$ точечные отображения T_τ образуют однопараметрическую группу, причем

$$T_{\tau_1} T_{\tau_2} = T_{\tau_1 + \tau_2}. \quad (4.19)$$