поверхности S_l ($l = 1, 2, \ldots, k$) функции $f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n, \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ пренебрежимо мало отличаются от функций $f_{is}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $f_{ir}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ в уравнениях (4.15), описывающих движение системы в областях D_s и D_r, отделенных одна от другой поверхностью S_l. Кроме того, должно быть известно, что в окрестности поверхности S_l происходит быстрое изменение величин ξ_1, $\xi_2, \ldots, \xi_m$, идеализация которого скачкообразным изменением приводит к разрывности правых частей уравнений (4.1). При этих условиях предельный переход, частный случай которого был описан выше, приводит к правильным уравнениям скользящих движений. Общий прием составления уравнений скользящих движений в практически важном частном случае, когда разрыв непрерывности порождается одной быстро меняющейся вблизи поверхности S ограниченной функцией $\Omega(x, \xi)$, указан в книге [9].

§ 3. Точечное отображение сдвига T_τ и его применение к изучению вынужденных и параметрических колебаний динамической системы

В § 1 было показано, что динамической системе, поведение которой описывается дифференциальными уравнениями (4.1), можно сопоставить некоторое точечное отображение T при помощи отрезка без контакта в случае двумерного фазового пространства или при помощи секущей поверхности в случае трехмерного пространства. В этом параграфе мы рассмотрим еще один тип точечного отображения, называемого отображением сдвига. По определению, отображением сдвига T_τ динамической системы, описываемой дифференциальными уравнениями вида

$$\dot{x}_i = f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n, t) \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{4.18}$$

называется точечное обображение, ставящее в соответствие каждой точке фазового пространства такую точку, в которую эта точка перейдет согласно дифференциальным уравнениям (4.18) спустя время τ. При этом предполагается, что дифференциальные уравнения (4.18) допускают единственное решение, определенное для всех значений времени t. При различных значениях τ на интервале $-\infty < \tau < \infty$ точечные отображения T_τ образуют однопараметрическую группу, причем

$$T_{\tau_1} T_{\tau_2} = T_{\tau_1+\tau_2}. \tag{4.19}$$

При значении $\tau = 0$ оператор сдвига T_τ представляет тождественное преобразование, а при изменении τ от $-\infty$ до ∞ оператор T_τ определяет фазовые траектории рассматриваемой динамической системы. В силу соотношения (4.19) оператор T_τ определен для любого τ, если он определен для всех достаточно малых значений τ.

Нетрудно видеть, что оперетор T_τ находится непосредственно в случае, когда известно общее решение дифференциальных уравнений (4.18). В самом деле, пусть это общее решение имеет вид

$$x_i = \varphi_i (t, x_1^0, x_2^0 \ldots, x_n^0, t^0) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \quad (4.20)$$

где $x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0$ — значения фазовых переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ в начальный момент времени t_0. Тогда в расширенном фазовом пространстве Φ_{n+1}, в котором по осям координат отложены фазовые переменные $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и время t, изображающая точка, перемещаясь в соответствии с законом движения (4.20), в момент времени t_1 ($t_1 > t_0$) достигает некоторой точки M_1 с координатами $x_1^1, x_2^1, \ldots, x_n^1$. Согласно (4.20) координаты точки M_1 ($x_1^1, x_2^1, \ldots, x_n^1$) и точки M_0 ($x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0$) связаны соотношениями $x_i^1 = \varphi_i (t_1, x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0, t_0)$ ($i = 1, 2, \ldots, n$). Если в этих соотношениях положить $t_1 = t_0 + \tau$, где τ — фиксированная величина, то они определят в пространстве Φ_{n+1} отображение сдвига T_τ:

$$x_i^1 = \varphi_i (t_0 + \tau, x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0, t_0) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \quad (4.21)$$

В случае автономной системы правые части формул преобразования (4.21) не зависят от времени явно и отображение T_τ принимает вид

$$x_i^1 = \varphi_i (\tau, x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \quad (4.22)$$

Остановимся теперь на вопросе о связи точечного отображения T, порождаемого фазовыми траекториями на секущей поверхности, с отображением сдвига T_τ. Отображение T секущей поверхности определено в пространстве, размерность которого по крайней мере на единицу меньше, чем размерность фазового пространства системы. В отличие от T, точечное отображение сдвига T_τ определено в пространстве той же размерности, что и фазовое простран-

ство. Поэтому характер связи между структурой фазового портрета динамической системы и структурой точечного отображения сдвига T_τ отличается от связи структуры разбиения фазового пространства на траектории со структурой отображения T секущей поверхности. Вместе с тем отображение сдвига T_τ автономной системы или неавтономной системы, правые части дифференциальных уравнений которой являются периодическими функциями времени t, можно интерпретировать как точечное отображение T, порождаемое решениями дифференциальных уравнений на секущей поверхности $t = \text{const}$ в расширенном фазовом пространстве Φ_{n+1}. Таким образом, мы получаем возможность применять отображение сдвига T_τ для изучения вынужденных и параметрических колебаний динамической системы. В самом деле, пусть τ — период изменения параметра или внешней силы, действующей на рассматриваемую динамическую систему. Расширенное фазовое пространство такой системы представляет собою топологическое произведение пространства Φ_n переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и окружности, которая соответствует фазе $\varphi = t - \left[\frac{t}{\tau}\right]\tau$ (квадратные скобки означают целую часть от стоящего внутри выражения). Поверхность $\varphi = 0$ в этом расширенном фазовом пространстве является секущей, и фазовые траектории порождают на ней некоторое точечное отображение T, совпадающее в этом случае с отображением сдвига T_τ. Неподвижная точка этого отображения для неавтономной системы соответствует периодическому решению с периодом τ. Что касается автономной системы, то периодическому движению, изображаемому в пространстве Φ_n замкнутой кривой Γ, соответствует кривая, инвариантная по отношению к отображению сдвига. В случае, когда период периодического движения соизмерим с временем сдвига τ, инвариантная кривая состоит из кратных неподвижных точек отображения T_τ. Неподвижной точке отображения сдвига T_τ для автономной динамической системы отвечает либо состояние равновесия, либо периодическое движение с периодом, кратным времени сдвига τ.

В заключение этого параграфа покажем, каким образом можно обосновать известный метод усреднения и его модификации (метод Ван-дер-Поля, стробоскопический метод Минорского и др.) при помощи метода точечных отображений. Идея метода усреднения, как известно, состоит

в том, что исследование уравнений

$$\dot{x}_i = \mu f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n, t) \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \quad (4.23)$$

где функции f_i предполагаются периодическими по t с периодом τ, заменяется исследованием уравнений

$$\dot{x}_i = \mu F_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \quad (4.24)$$

правая часть которых получается путем усреднения по времени правой части исходных уравнений (4.23).

Для доказательства правомерности такой замены покажем, что точечное отображение T, построенное для системы дифференциальных уравнений (4.23), близко к точечному отображению сдвига T_τ, построенному для уравнений (4.24), с точностью до малых величин порядка μ^2. В самом деле, точечное отображение T, порождаемое фазовыми траекториями уравнений (4.23), легко находится, если известно общее решение этих уравнений. В нашем случае общее решение уравнений (4.23) с точностью до малых величин порядка μ^2 записывается в виде

$$x_i(t) = x_i(0) + \mu \int_0^t f_i(x_i(0), \ldots, x_n(0), \xi)\, d\xi \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Отсюда, обозначая через τ время перехода изображающей точки из $M(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ в $\overline{M}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n)$, получаем отображение T с той же степенью точности:

$$\bar{x}_i = x_i + \mu \int_0^\tau f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n, t)\, dt \quad (i = 1, 2, \ldots, n). \quad (4.25)$$

Найдем теперь точечное отображение сдвига T_τ системы автономных дифференциальных уравнений (4.24). С точностью до малых членов порядка μ^2 отображение T_τ имеет вид

$$x_i(\tau) = x_i + \mu F_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)\, \tau \quad (i = 1, 2, \ldots, n). \quad (4.26)$$

Сравнивая выражения (4.25) и (4.26), нетрудно видеть, что они совпадают в случае, если функции f_i и F_i связаны соотношениями

$$F_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n, t)\, dt$$

$$(i = 1, 2, \ldots, n),$$

т. е. когда функция F_i получается в результате усреднения по времени функции f_i. При этом точечные отображения T и T_τ совпадают с точностью до μ^2. Таким образом, возможность исследования дифференциальных уравнений (4.23) с помощью совсем не близких к ним уравнений (4.24) имеет свое обоснование с точки зрения метода точечных отображений в близости (порядка μ^2) их точечных отображений T и T_τ.

§ 4. Примеры исследования динамики систем при помощи метода точечных отображений

В этом параграфе приводится ряд примеров динамических систем второго и третьего порядка, исследование которых при помощи метода точечных отображений оказывается весьма эффективным.

Пример 1. Простейшая модель часов [8]. Основными рабочими деталями часов являются балансир A и ходовой механизм B (рис. 4.13). При нормальной работе часов балансир совершает незатухающие колебания, которые поддерживаются в результате взаимодействия балансира с ходовым механизмом. В простейшей модели часов обычно пренебрегают временем этого взаимодействия, а также не учитывают обратное влияние балансира на ходовой механизм. При такой постановке задача сводится к рассмотрению колебаний балансира, которому в определенные моменты времени сообщается внешний импульс. Значение импульса и момент его приложения определяются состоянием балансира. Таким образом, рассматриваемую модель часов можно представить в виде осциллятора, описываемого дифференциальным уравнением второго порядка

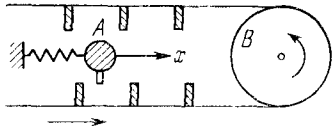

Рис. 4.13

$$\ddot{x} + 2h\dot{x} + \omega^2 x = 0, \tag{4.27}$$

которому в состояниях, удовлетворяющих некоторому соотношению вида $f(x, \dot{x}) = 0$, сообщается импульс $p = p(x, \dot{x})$. Фазовыми переменными описанной модели динамической системы являются переменные x и $y = \dot{x}$, а пространство состояний представляет собою двумерную плоскость xy с разрезом по кривой $f(x, y) = 0$, в точках