

т. е. когда функция F_i получается в результате усреднения по времени функции f_i . При этом точечные отображения T и T_τ совпадают с точностью до μ^2 . Таким образом, возможность исследования дифференциальных уравнений (4.23) с помощью совсем не близких к ним уравнений (4.24) имеет свое обоснование с точки зрения метода точечных отображений в близости (порядка μ^2) их точечных отображений T и T_τ .

§ 4. Примеры исследования динамики систем при помощи метода точечных отображений

В этом параграфе приводится ряд примеров динамических систем второго и третьего порядка, исследование которых при помощи метода точечных отображений оказывается весьма эффективным.

Пример 1. Простейшая модель часов [8]. Основными рабочими деталями часов являются балансир A и ходовой механизм B (рис. 4.13). При нормальной работе часов балансир совершает незатухающие колебания, которые поддерживаются в результате взаимодействия балансира с ходовым механизмом. В простейшей модели часов обычно пренебрегают временем этого взаимодействия,

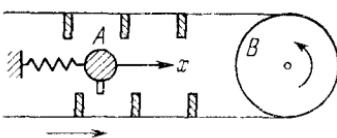


Рис. 4.13

а также не учитывают обратное влияние балансира на ходовой механизм. При такой постановке задача сводится к рассмотрению колебаний балансира, которому в определенные моменты времени сообщается внешний импульс. Значение импульса и момент его приложения определяются состоянием балансира. Таким образом, рассматриваемую модель часов можно представить в виде осциллятора, описываемого дифференциальным уравнением второго порядка

$$\ddot{x} + 2h\dot{x} + \omega^2x = 0, \quad (4.27)$$

которому в состояниях, удовлетворяющих некоторому соотношению вида $f(x, \dot{x}) = 0$, сообщается импульс $p = p(x, \dot{x})$. Фазовыми переменными описанной модели динамической системы являются переменные x и $y = \dot{x}$, а пространство состояний представляет собою двумерную плоскость xy с разрезом по кривой $f(x, y) = 0$, в точках

которой система получает «удар» в виде импульса p (рис. 4.14). Заштрихованная сторона линии разреза на рис. 4.14 соответствует доударным состояниям балансира. Достигнув кривой $f(x, y) = 0$ после движения на фазовой плоскости, согласно дифференциальному уравнению (4.27), изображающая точка совершают мгновенный скачок в новое положение [согласно формулам

$$x_{\text{п}} = x_{\text{д}}, \quad y_{\text{п}} = y_{\text{д}} + p (x_{\text{д}}, y_{\text{д}}), \quad (4.28)$$

где $(x_{\text{д}}, y_{\text{д}})$ — доударное состояние, $(x_{\text{п}}, y_{\text{п}})$ — послеударное состояние системы. Решения уравнения (4.27) вместе с соотношениями (4.28) определяют на линии разреза точечное отображение T , неподвижные устойчивые точки которого соответствуют устойчивым периодическим колебаниям балансира, т. е. нормальной работе часового механизма.

Найдем вид точечного отображения T в случае, когда балансиру сообщается постоянный по величине импульс $p = \text{const}$ в точках полуоси $x = 0, y \geq 0$. Подставляя в общее решение уравнения (4.28)

$$\begin{aligned} x &= e^{-ht} (A \cos \Omega t + B \sin \Omega t), \\ y &= e^{-ht} [(B\Omega - Ah) \cos \Omega t - (A\Omega + Bh) \sin \Omega t] \\ &\quad (\Omega = \sqrt{\omega^2 - h^2}) \end{aligned}$$

начальные значения $t = 0, x = 0, y = y_1$, получим

$$x = y_1 \Omega^{-1} e^{-ht} \sin \Omega t, \quad y = y_1 e^{-ht} (\cos \Omega t - h\Omega^{-1} \sin \Omega t).$$

Через время $\tau = 2\pi/\Omega$ изображающая точка вновь придет на полуправую $x \geq 0, y > 0$ (рис. 4.15), имея ординату $y' = e^{-h\tau} y_1$ ($\delta = 2\pi h / (\omega^2 - h^2)^{1/2}$). Затем, согласно условию, она совершает скачок в точку $y_2 = y' + p$ этой полуправой. В результате точка $y = y_1$ полуправой $x = 0, y > 0$ преобразуется в точку $y = y_2$ этой же полуправой по закону

$$y_2 = y_1 e^{-\delta} + p, \quad (4.29)$$

который и представляет искомое отображение T . На плоскости $y_1 y_2$ соотношение (4.29) изображается прямой, кото-

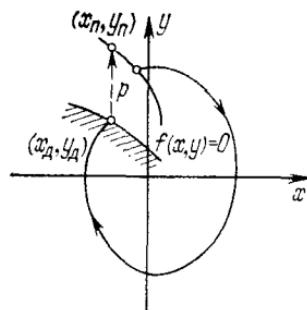


Рис. 4.14

рая пересекает биссектрису первого квадранта в точке $y_1 = y_2 = y^*$ рис. (4.16, а). Из полученной таким образом диаграммы Ламерея непосредственно видно, что точечное отображение T рассматриваемой модели часов обладает единственной глобально устойчивой неподвижной точкой.

Если при передаче импульса балансиру сохраняется постоянным не импульс, а энергия, тогда передаваемый балансиру импульс равен $p = \sqrt{y^2 + e} - y$, где $e = \text{const}$. В этом случае точечное отображение T имеет вид

$$y_2 = e^{-\delta} \sqrt{y_1^2 + \varepsilon_1} \quad (\varepsilon_1 = \text{const}). \quad (4.30)$$

Рис. 4.15

Соотношение (4.30) изображается на плоскости y_1y_2 в виде отрезка гиперболы, пересекающей биссектрису в единственной точке $y_1 = y_2 = y^*$, которая является глобально устойчивой неподвижной точкой отображения T . Соот-

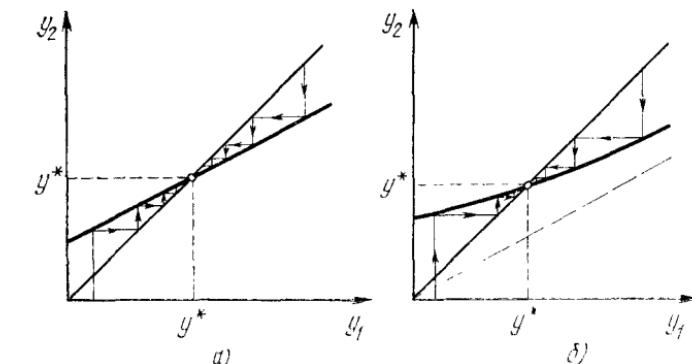


Рис. 4.16

ветствующая этому случаю диаграмма Ламерея показана на рис. 4.16, б.

Пример 2. Экстремальный регулятор с автоколебательным типом поиска [7]. Для регулирования параметров объекта, содержащего медленно изменяющиеся величины, которые характеризуют неконтролируемые процессы в объекте, применяют самонастраивающиеся систе-

мы автоматического регулирования. Одной из таких систем и является экстремальный регулятор, включающий в себя объект регулирования и управляющий автомат (рис. 4.17). Объект регулирования имеет входную управляемую переменную u и выходную переменную φ , значение которой должно поддерживаться наибольшим

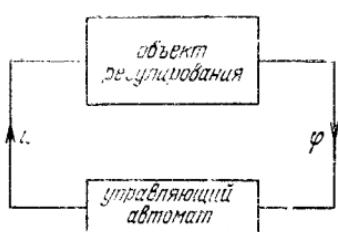


Рис. 4.17

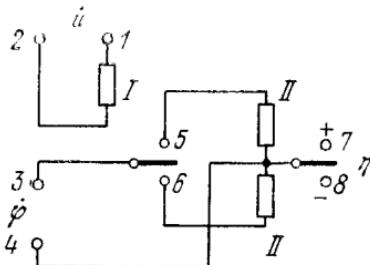


Рис. 4.18

(экстремальным). Поэтому регулятор, выполняющий эту задачу, и называется экстремальным. Рассмотрим динамику простейшей системы, объект регулирования которой описывается дифференциальным уравнением первого порядка

$$T\dot{\varphi} + \varphi = -\alpha u^2, \quad (4.31)$$

где T — постоянная времени объекта, α — медленно изменяющийся параметр, который мы пока будем считать постоянным. Согласно рис. 4.17, управляющий автомат вырабатывает управляющее воздействие u по входной переменной φ . В зависимости от способа формирования переменной u различают автоколебательный и шаговый тип поиска экстремума. Рассмотрим простую схему управляющего автомата, который осуществляет автоколебательный тип поиска, определяемый уравнениями

$$\dot{u} = \eta, \quad \eta = \Phi [\dot{u}(t - \theta), \varphi(t - \theta)], \quad (4.32)$$

где

$$\Phi[\dot{u}, \varphi] = \begin{cases} +1, & \text{если в течение времени } \theta \text{ до этого } \dot{u} > 0, \\ & \varphi + \Delta > 0 \text{ или } \dot{u} < 0, \varphi + \Delta < 0; \\ -1, & \text{если в течение времени } \theta \text{ до этого } \dot{u} < 0, \\ & \varphi + \Delta > 0 \text{ или } \dot{u} > 0, \varphi + \Delta < 0. \end{cases}$$

Здесь θ — время запаздывания при срабатывании реле, реверсивного устройства и дифференциаторов; Δ — порог

нечувствительности, связанный с особенностями характеристики реле. Нелинейная функция $\Phi[\dot{u}, \phi]$ реализуется при помощи двух поляризованных реле, соединенных в схему, показанную на рис. 4.18. В самом деле, пусть входному значению $\dot{u} = +1$ соответствует знак (+) на клемме 1 и знак (-) на клемме 2. При этом якорь реле I притягивается к клемме 5 и замкнет цепь 3, 5, 4, на вход которой подается ϕ . Значению $\phi + \Delta > 0$ соответствует знак (+) на клемме 3 и знак (-) на клемме 4. При этом якорь реле II притягивается к клемме 7 и на выходе получаем $\eta = +1$. Напротив, значению $\phi + \Delta < 0$ соответствует знак (-) на клемме 3 и знак (+) на клемме 4. В этом случае якорь реле II притягивается к клемме 8 и на выходе получаем $\eta = -1$. Аналогичное рассмотрение случая, когда на входные клеммы 1, 2 подается напряжение (-), (+), соответствующее значению $\dot{u} = -1$, убеждает нас в том, что при $\phi + \Delta > 0$ получаем на выходе значение $\eta = -1$, а при $\phi + \Delta < 0$ — значение $\eta = +1$.

Описанная модель экстремального регулятора характеризуется четырьмя положительными физическими параметрами T , α , Δ и θ . Согласно уравнениям (4.32) управляющий автомат обладает двумя состояниями, которым соответствуют значения выхода $\eta = +1$ и $\eta = -1$. Фазовыми переменными экстремального регулятора, который представляет собою автономную динамическую систему, в соответствии с уравнениями (4.31) и (4.32), являются переменные u , ϕ и состояние $\eta = 1$ или $\eta = -1$ управляющего автомата. Фазовое пространство состоит из двух плоскостей $u\phi$. На одной плоскости величина $\eta = +1$, а переменные u , ϕ подчиняются дифференциальному уравнению

$$T\phi + \varphi = -\alpha u^2, \dot{u} = +1. \quad (4.33)$$

На второй плоскости величина $\eta = -1$, а переменные u , ϕ изменяются согласно уравнениям

$$T\phi + \varphi = -\alpha u^2, \dot{u} = -1, \quad (4.34)$$

При смене значения η , согласно соотношениям (4.32), изображающая точка переходит с одной плоскости на другую. Из уравнения (4.31) следует, что величина $\dot{\phi} = 0$ на кривой $\varphi = -\alpha u^2$. Выше этой кривой производная $\dot{\phi} < 0$, и ниже кривой производная $\dot{\phi} > 0$ на каждой из плоскостей $\eta = +1$ и $\eta = -1$. Величина $\phi + \Delta$ отрица-

тельна в области O_+ над кривой Γ , определяемой уравнением

$$\varphi = T\Delta - \alpha u^2,$$

и положительна в области O_- под этой кривой (рис. 4.19). В соответствии с (4.32) переход изображающей точки с одного листа фазовой плоскости Φ на другой происходит через каждый промежуток времени длительности θ пребывания фазовой точки в области O_+ . Поэтому в области O_+ движение изображающей точки происходит вниз

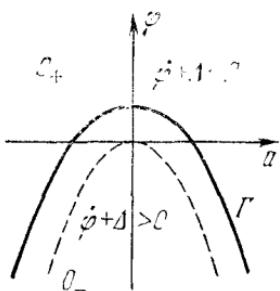


Рис. 4.19

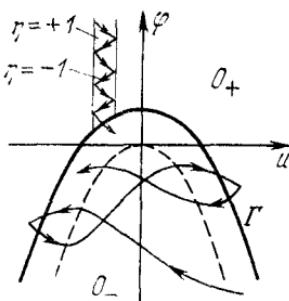


Рис. 4.20

по ломаной кривой до тех пор, пока эта траектория не пересечет кривую Γ (рис. 4.20). В области O_- изображающая точка движется на листе $\eta = +1$ или $\eta = -1$ до тех пор, пока не пересечет граничную кривую Γ . Спустя время θ после пересечения кривой Γ она переходит с одного листа на другой, в результате чего траектория движения изображающей точки имеет вид, показанный на рис. 4.20. Таким образом, при любых начальных условиях изображающая точка начиная с некоторого момента времени вновь и вновь пересекает кривую Γ , порождая на ней некоторое точечное отображение, которое и позволяет изучить динамику экстремального регулятора.

Найдем вид этого точечного отображения в случае, когда запаздывание θ пренебрежимо мало, хотя и отлично от нуля *). В этом случае в области O_+ движение изображающей точки сколь угодно мало отличается от движения вдоль прямой $u = u_0$ по закону $\varphi = (\varphi_0 + \alpha u_0^2) e^{-t/T} - \alpha u_0^2$.

*) Нетрудно видеть, что полагать $\theta = 0$ нельзя, так как при $\theta = 0$ описание (4.32) оказывается противоречивым, т. е. постановка задачи является некорректной.

Отсюда следует, что из любого начального положения в области O_+ изображающая точка через конечный промежуток времени пересекает границу Γ и в дальнейшем остается в области O_- . Поэтому для нахождения точечного отображения кривой Γ в себя достаточно рассмотреть движение изображающей точки в области O_- . Решение уравнений (4.33) и (4.34) при начальных условиях $t = 0$, $u = u_0$, $\varphi = \varphi_0$ имеет вид

$$u = u_0 + \eta t, \quad \varphi = C_1 e^{-t/T} - \alpha(t^2 + at + b), \quad (4.35)$$

где $C_1 = \varphi_0 + \alpha b$, $a = 2(\eta u_0 - T)$, $b = u_0^2 - 2\eta u_0 T + 2T^2$. Исключая из (4.35) время t , получаем уравнение фазовой траектории

$$\varphi = (\varphi_0 + \alpha u_0^2 - 2\alpha \eta T u_0 + 2\alpha T^2) e^{\frac{t(u_0-u)}{T}} - \alpha(u^2 - 2\eta Tu + 2T^2). \quad (4.36)$$

Из выражения (4.36) следует, что траектории плоскости $\eta = +1$ симметричны относительно оси $u = 0$ траекториям плоскости $\eta = -1$, поэтому для исследования динамики системы в рассматриваемом случае $\theta \ll 1$ достаточно рассмотреть точечное отображение, порожденное на кривой Γ траекториями плоскости $\eta = +1$, и преобразование симметрии относительно оси $u = 0$, переводящее точку (u, φ) в точку $(-u, \varphi)$. Траектории плоскости $\eta = +1$ касаются кривой Γ в точке $u_k = \Delta/2\alpha$, поэтому порожденное этими траекториями точечное отображение преобразует точки кривой Γ , для которых $-\infty < u < u_k$, в точки той же кривой, для которых $u > u_k$. Представляя в выражение (4.36) координаты начальной точки ($u_0 = -x$, $\varphi_0 = T\Delta - \alpha x^2$) и конечной точки ($u = y$, $\varphi = T\Delta - \alpha y^2$), находим искомое точечное отображение в виде

$$[\Delta + 2\alpha(T - y)]e^{y/T} = [\Delta + 2\alpha(T + x)]e^{-x/T}. \quad (4.37)$$

При построении графика функции последования на плоскости xy следует принять во внимание, что кривая (4.37) начинается в точке $(x_0 = -\Delta/2\alpha, y_0 = \Delta/2\alpha)$, имеет асимптоту $y = T + \frac{\Delta}{2\alpha}$, а ее производная

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2\alpha x + \Delta}{2\alpha y - \Delta} e^{-\frac{x+y}{T}}$$

положительна, так как $y > \Delta/2\alpha$, $x > -\Delta/2\alpha$. Соответствующая диаграмма Ламерей изображена на рис. 4.21. Из этой диаграммы следует, что точечное отображение кривой Γ в себя имеет единственную устойчивую неподвижную точку $x = y = u^*$, соответствующую глобально устойчивому предельному циклу, т. е. устойчивому периодическому движению экстремального регулятора

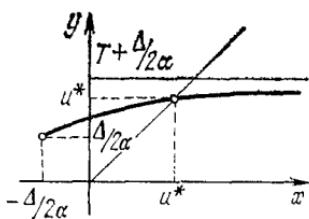


Рис. 4.21

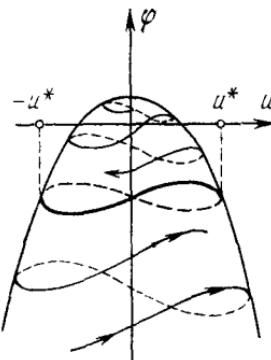


Рис. 4.22

(рис. 4.22). Значение u^* является корнем трансцендентного уравнения

$$u^* = \left(\frac{\Delta}{2\alpha} + T \right) \operatorname{th} \frac{u^*}{T},$$

которое получается при подстановке $x = y = u^*$ в уравнение (4.37). Проведенное исследование показывает, что устойчивое периодическое движение экстремального регулятора сохраняется при любых значениях параметров T , α , Δ . Найденный режим сохраняется и при произвольных изменениях параметра α , если эти изменения будут происходить достаточно медленно.

Пример 3. Ламповый генератор [8]. Рассмотрим простейшую схему генератора с индуктивной обратной связью и колебательным контуром в цепи сетки, изображенную на рис. 4.23. При выбранных положительных направлениях токов i , i_a и полярности конденсатора C имеем, на основании законов Кирхгофа, следующие соотношения:

$$i = -C \frac{dv}{dt}, \quad Ri = v - L \frac{di}{dt} - M \frac{di_a}{dt}.$$

Отсюда получаем уравнение

$$LC \frac{d^2v}{dt^2} + RC \frac{dv}{dt} + v = M \frac{di_a}{dt}. \quad (4.38)$$

Знак коэффициента взаимоиндукции M определяется относительным расположением витков катушек L и L_a . Пусть

величина $M > 0$. (Это означает, что при $i > 0$, $i_a > 0$ для направлений токов i и i_a , указанных на рис. 4.23, магнитные потоки в катушке L усиливают друг друга.) Зависимость анодного тока i_a от сеточного напряжения v имеет вид кривой, показанной на рис. 4.24. Заменяя в (4.38) производную $\frac{di_a}{dt}$ ее выражением

$$\frac{di_a}{dt} = \frac{di_a}{dv} \cdot \frac{dv}{dt} = S(v) \frac{dv}{dt}, \text{ где } S(v) —$$

крутизна характеристики лампы (рис. 4.24), получим нелинейное уравнение

$$LC \frac{d^2v}{dt^2} + [RC - MS(v)] \frac{dv}{dt} + v = 0, \quad (4.39)$$

которое и описывает электрические процессы в ламповом генераторе. В дальнейшем воспользуемся кусочно-линейной

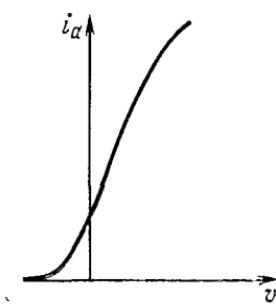


Рис. 4.24

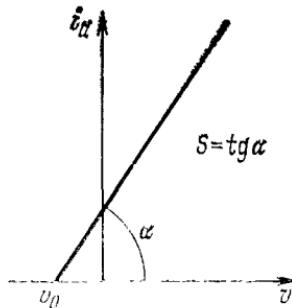


Рис. 4.25

аппроксимацией ламповой характеристики (рис. 4.25) и введем безразмерные величины

$$x = \frac{v}{v_0}, \quad t' = \omega_0 t \left(\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \right), \quad h_1 = \frac{\omega_0}{2} RC, \quad h_2 = -\frac{\omega_0}{2} (MS - RC).$$

После этого уравнение (4.39) записывается в виде

$$\begin{aligned} \ddot{x} + 2h_1\dot{x} + x = 0, & \text{ если } x < -1, \\ \ddot{x} - 2h_2\dot{x} + x = 0, & \text{ если } x > -1, \end{aligned} \quad (4.40)$$

где точкой над буквой обозначена операция дифференцирования по безразмерному времени t' . Фазовая плоскость xy ($y = \dot{x}$) лампового генератора разбивается прямой $x = -1$ на две области O_1 и O_2 , в каждой из которых фазовые траектории определяются соответствующим линейным дифференциальным уравнением (4.40). На границе $x = -1$ решения уравнений (4.40) «склеиваются» по непрерывности. Рассматриваемая модель лампового генератора характеризуется двумя существенными физическими параметрами h_1, h_2 , которые мы будем считать положительными величинами (т. е. мы предполагаем, что выполнено неравенство $MS > RC$, когда генератор обладает

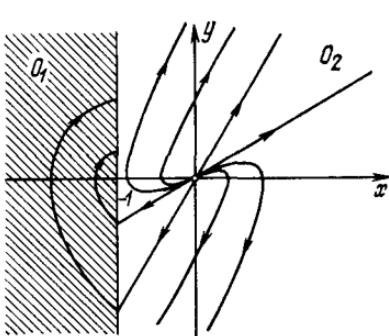


Рис. 4.26

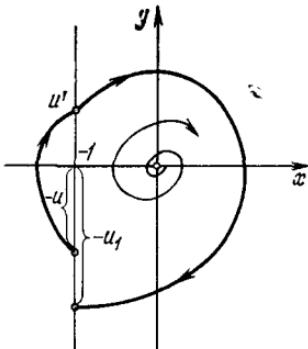


Рис. 4.27

самовозбуждением). Фазовые траектории разбивают прямую $x = -1$ на две полупрямые ($x = -1, y > 0$) и ($x = -1, y < 0$), которые являются полуправыми без контакта. Заметив, что в случае $h_2 > 1$ состояние равновесия $x = y = 0$ является неустойчивым узлом и, следовательно, при любых начальных условиях изображающая точка на фазовой плоскости уходит в бесконечность (рис. 4.26), рассмотрим в дальнейшем случай $0 < h_2 < 1$.

Фазовые траектории при $0 < h_2 < 1$ порождают на полуправой ($x = -1, y > 0$) точечное отображение $T = T_1 \cdot T_2$, которое можно представить в виде произведения двух отображений: точечного отображения T_2 полуправой ($x = -1, y > 0$) в полуправую ($x = -1, y < 0$),

осуществляемого траекториями области O_2 , и точечного отображения T_1 полуправой линии ($x = -1, y < 0$) в полуправую линию ($x = -1, y > 0$) осуществляемого траекториями области O_1 . Найдем эти отображения. Фазовые траектории в области O_1 определяются первым уравнением (4.40). Его решением при начальных условиях ($t = 0, x_0 = -1, y_0 = -u$) будет

$$\begin{aligned} x &= -e^{-h_1 t'} \left(\cos \omega_1 t' + \frac{u + h_1}{\omega_1} \sin \omega_1 t' \right), \\ y &= e^{-h_1 t'} \left(-u \cos \omega_1 t' + \frac{1 + h_1 u}{\omega_1} \sin \omega_1 t' \right) \quad (4.41) \\ (\omega_1 &= \sqrt{1 - h_1^2}). \end{aligned}$$

В некоторый момент времени $t'_1 = \tau_1/\omega_1$ изображающая точка придет на полуправую линию ($x = -1, y > 0$) в точку $y = u' > 0$ (рис. 4.27). Подставляя эти значения в (4.41) и разрешая полученные выражения относительно u и u' , находим функцию соответствия $u = f(u')$ для отображения T_1 , записанную в параметрической форме:

$$u = \frac{e^{\gamma_1 \tau_1} - \cos \tau_1 - \gamma_1 \sin \tau_1}{\sqrt{1 + \gamma_1^2 \sin \tau_1}}, \quad u' = \frac{e^{-\gamma_1 \tau_1} - \cos \tau_1 + \gamma_1 \sin \tau_1}{\sqrt{1 + \gamma_1^2 \sin \tau_1}} \quad (4.42)$$

$$\left(\gamma_1 = \frac{h_1}{\omega_1} = \frac{h_1}{\sqrt{1 - h_1^2}} \right).$$

Текущий параметр τ_1 имеет смысл приведенного времени пробега изображающей точки в области O_1 . Поэтому из

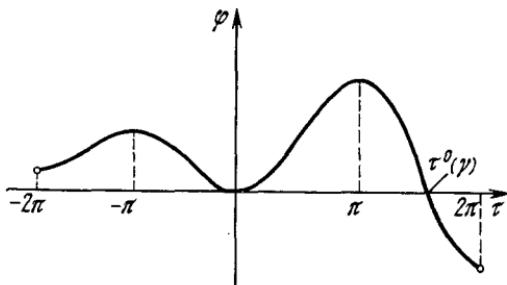


Рис. 4.28

всех возможных значений τ_1 , соответствующих заданному значению u , следует брать наименьшее положительное. Согласно первому соотношению (4.42) интервал $0 < u <$

$< +\infty$ соответствует интервалу $0 < \tau_1 < \pi$. Для построения графика функции соответствия (4.42) введем вспомогательную функцию

$$\varphi(\tau, \gamma) = 1 - e^{\gamma\tau} (\cos \tau - \gamma \sin \tau), \quad (4.43)$$

график которой для $\gamma > 0$ изображен на рис. 4.28. Используя функцию (4.43) и ее свойства: $\varphi(-\tau, -\gamma) \equiv \varphi(\tau, \gamma)$, $\frac{d\varphi}{d\tau} = (1 + \gamma^2) e^{\gamma\tau} \sin \tau$, представим выражения (4.42) и их производные в виде

$$u = \frac{e^{\gamma_1 \tau_1} \varphi(\tau_1, -\gamma_1)}{\sqrt{1 + \gamma_1^2 \sin^2 \tau_1}}, \quad u' = \frac{e^{-\gamma_1 \tau_1} \varphi(\tau_1, \gamma_1)}{\sqrt{1 + \gamma_1^2 \sin^2 \tau_1}},$$

$$\begin{aligned} \frac{du}{d\tau_1} &= \frac{\varphi(\tau_1, \gamma_1)}{\sqrt{1 + \gamma_1^2 \sin^2 \tau_1}}, \quad \frac{du'}{d\tau_1} = \frac{\varphi(\tau_1, -\gamma_1)}{\sqrt{1 + \gamma_1^2 \sin^2 \tau_1}}, \quad \frac{du}{du'} = \\ &= \frac{\varphi(\tau_1, \gamma_1)}{\varphi(\tau_1, -\gamma_1)}. \end{aligned}$$

Из этих выражений следует, что на интервале $0 < \tau_1 < \pi$ производная $du/du' > 0$ и при изменении τ_1 от нуля до π монотонно возрастает от единицы до $e^{\gamma_1 \tau_1}$, так как

$$\begin{aligned} \frac{d^2u}{du'^2} &= \frac{d}{d\tau_1} \left[\frac{\varphi(\tau_1, \gamma_1)}{\varphi(\tau_1, -\gamma_1)} \right] \left(\frac{du'}{d\tau_1} \right)^{-1} = \\ &= \frac{2(1 + \gamma_1^2)^{3/2} \sin^2 \tau_1}{[\varphi(\tau_1, -\gamma_1)]^3} [\operatorname{sh} \gamma_1 \tau_1 - \\ &\quad - \gamma_1 \sin \tau_1] > 0. \end{aligned}$$

При $\tau_1 \rightarrow \pi - 0$ кривая (4.42) имеет асимптоту

$$u = e^{\gamma_1 \pi} u' - \frac{2\gamma_1(1 + e^{\gamma_1 \pi})}{\sqrt{1 + \gamma_1^2}}.$$

Таким образом, кривая (4.42) монотонно возрастает от нуля до бесконечности и имеет вид, изображенный на рис. 4.29 сплошной линией.

В случае $h_1 > 1$ решение уравнения (4.40) получается из (4.41) заменой тригонометрических функций на гиперболические и ω_1 на $\bar{\omega}_1 = \sqrt{h_1^2 - 1}$. В результате имеем

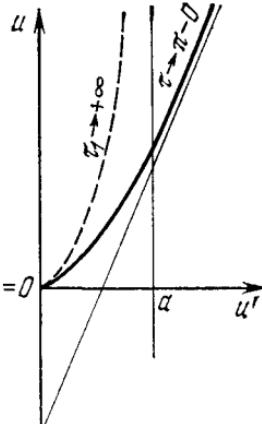


Рис. 4.29

функцию соответствия для точечного отображения T_1 в виде

$$u = \frac{e^{\bar{\gamma}_1 \tau_1} - \operatorname{ch} \tau_1 - \bar{\gamma}_1 \operatorname{sh} \tau_1}{\sqrt{\bar{\gamma}_1^2 - 1} \operatorname{sh} \tau_1}, \quad u' = \frac{e^{-\bar{\gamma}_1 \tau_1} - \operatorname{ch} \tau_1 + \bar{\gamma}_1 \operatorname{sh} \tau_1}{\sqrt{\bar{\gamma}_1^2 - 1} \operatorname{sh} \tau_1} \quad (4.44)$$

$$\left(\bar{\gamma}_1 = \frac{h_1}{\sqrt{h_1^2 - 1}} \right).$$

При изменении τ_1 от нуля до бесконечности величина u монотонно растет от нуля до $+\infty$, а u' — от нуля до значения $a = \sqrt{\frac{\bar{\gamma}_1 - 1}{\bar{\gamma}_1 + 1}}$. График кривой $u = f_1(u')$ в этом случае изображен на рис. 4.29 штриховой линией.

Точечное отображение T_2 , порождаемое фазовыми траекториями области O_2 , находится аналогично. В случае $0 < h_2 < 1$ функция соответствия для отображения T_2 имеет вид (см. рис. 4.27):

$$u_1 = -\frac{e^{-\gamma_2 \tau_2} \varphi(\tau_2, -\gamma_2)}{\sqrt{1 + \gamma_2^2 \sin \tau_2}}, \quad u' = -\frac{e^{\gamma_2 \tau_2} \varphi(\tau_2, \gamma_2)}{\sqrt{1 + \gamma_2^2 \sin \tau_2}}. \quad (4.45)$$

Из свойств функции $\varphi(\tau, \gamma)$ и выражений (4.45) следует, что при возрастании u' от нуля до $+\infty$ параметр τ_2 уменьшается от значения $\tau = \tau_2^0$, где τ_2^0 — наименьший положительный корень уравнения $\varphi(\tau_2, \gamma_2) = 0$, до значения $\tau = \pi$. При этом u_1 возрастает от некоторого значения $u_1 = u_1^0$ до $+\infty$. Принимая во внимание, что $\frac{du_1}{du'} = \frac{\varphi(\tau_2, \gamma_2)}{\varphi(\tau_2, -\gamma_2)} > 0$ и $\frac{d^2 u_1}{du'^2} > 0$, мы видим, что кривая (4.45) является монотонно возрастающей. При $\tau_2 \rightarrow \pi + 0$ она имеет асимптоту

$$u_1 = e^{\gamma_2 \pi} u' + \frac{2\gamma_2 (1 + e^{\gamma_2 \pi})}{\sqrt{1 + \gamma_2^2}}.$$

Следовательно, график функции последования для T_2 имеет вид, показанный на рис. 4.30. Нанесем теперь найденные кривые для точечных отображений T_1 и T_2 на одной диаграмме, тогда получим диаграмму Ламеря, показанную на рис. 4.31. Проведенное исследование показывает, что в рассматриваемом случае ($0 < h_1 < \infty$,

$0 < h_2 < 1$) существует единственная неподвижная точка отображения $T = T_1 \cdot T_2$, которая является глобально устойчивой. Таким образом, на фазовой плоскости xy имеется только один предельный цикл, устойчивый в большом, т. е. к этому предельному циклу приближаются асимптотически (при $t \rightarrow +\infty$) все фазовые траектории (рис. 4.32).

Проведенное рассмотрение позволяет провести разбиение плоскости физических параметров $h_1 h_2$ на области

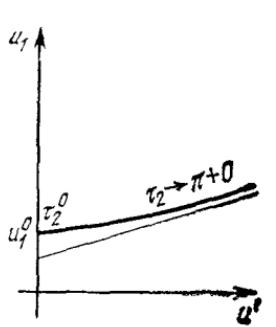


Рис. 4.30

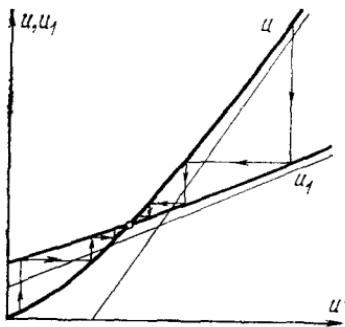


Рис. 4.31

различного качественного поведения лампового генератора. На рис. 4.33 дано такое разбиение, из которого видно, что первый квадрант плоскости $h_1 h_2$ состоит из области

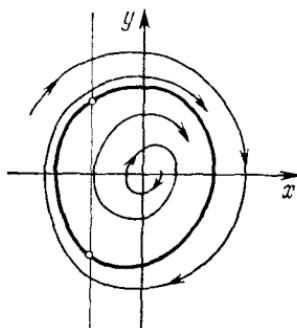


Рис. 4.32

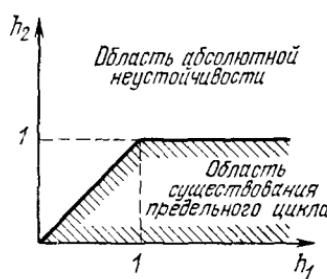


Рис. 4.33

существования предельного цикла и области абсолютной неустойчивости.

Пример 4. Динамика судна, курс которого стабилизируется при помощи двухпозиционного авторулевого [8]. Уравнение вращательного движения судна вокруг верти-

кальной оси, проходящей через центр масс судна, имеет вид

$$I \frac{d^2\varphi}{dt^2} + h \frac{d\varphi}{dt} = M. \quad (4.46)$$

Здесь φ — угол между продольной осью судна и неизменным направлением (заданным курсом судна (рис. 4.34)), I — главный центральный момент инерции, h — коэффициент вязкого трения, M — момент внешних сил. Пусть

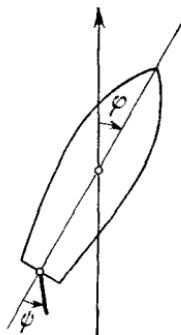


Рис. 4.34

$M = M(\psi)$ является известной функцией угла ψ поворота руля. При $M = 0$ установившийся угол φ зависит от начальных условий и может принимать согласно (4.46) любое значение $\varphi = \text{const}$, т. е. при $M = 0$ судно обладает многообразием равновесных состояний. Создание одного устойчивого состояния равновесия, соответствующего заданному курсу $\varphi = 0$, возможно лишь посредством перемещения руля. Одной из простейших систем автоматической стабилизации курса является двухпозиционный авторулевой, при котором руль может находиться лишь в двух

положениях: $\psi = \pm\psi_0$, создавая в каждом из них равные, но противоположно направленные моменты сил $M = \pm M_0$. При этом положение руля зависит от состояния судна, т. е. является определенной функцией переменных φ и $d\varphi/dt$, определяющих состояние судна. Пусть перекладка руля из одного крайнего положения в другое осуществляется при прохождении нулевого значения величиной $\xi = \varphi + b d\varphi/dt$, где $b = \text{const}$ — параметр, характеризующий величину коррекции по скорости, а функция $M = M(\xi)$ имеет вид, изображенный на рис. 4.35. При $\xi = 0$ рулевая машина выключена, и угол ψ руля может принимать любое значение в интервале $-\psi_0 < \psi < +\psi_0$.

В переменных $x = \frac{h^2}{M_0 I} \varphi$, $t_{\text{нов}} = \frac{h}{I} t$, $\beta = \frac{bh}{I}$ движение корабля описывается следующими дифференциальными уравнениями:

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -y - 1, \quad \text{если } x + \beta y > 0, \quad (4.47)$$

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -y + 1, \quad \text{если } x + \beta y < 0. \quad (4.48)$$

Поскольку величины φ и $\varphi + 2\pi$ соответствуют одному и тому же положению судна, фазовое пространство рассматриваемой системы представляет собою двумерный цилиндр, развертка которого на плоскость изображена на рис. 4.36 в виде полосы шириной $2a = \frac{2\pi h^2}{M_0 J}$. Прямая переключений $x + \beta y = 0$ разбивает фазовую полосу на две области: O_1 , в которой движение изображающей точки

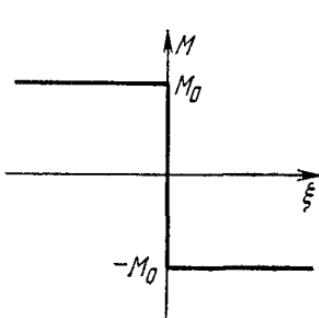


Рис. 4.35

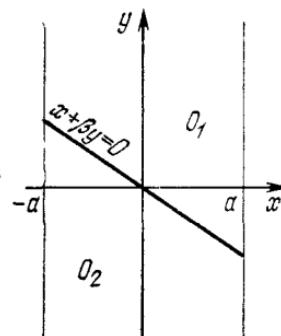


Рис. 4.36

подчиняется уравнениям (4.47), и O_2 , где справедливы уравнения (4.48). Поскольку уравнения (4.48) получаются из (4.47) заменой x, y на $-x, -y$, соответствующие траектории области O_1 и области O_2 симметричны друг другу относительно начала координат. Следовательно, для разбиения фазовой полосы xy на траектории достаточно изучить их поведение в области O_1 , включая граничную прямую $x + \beta y = 0$.

Рассмотрим сначала ход фазовых траекторий области O_1 вблизи прямой $x + \beta y = 0$. Для этого введем величину $\xi = x + \beta y$ и найдем $\dot{\xi} = \dot{x} + \beta \dot{y} = (1 - \beta) y - \beta$. Производная $\dot{\xi}$ обращается в нуль на прямой $y = \frac{\beta}{1 - \beta}$, которая, таким образом, является геометрическим местом точек, где траектории области O_1 имеют касательную, параллельную прямой $x + \beta y = 0$. Пусть $0 < \beta < 1$. В этом случае для значений $y > \frac{\beta}{1 - \beta}$ на прямой $x + \beta y = 0$ фазовые траектории удаляются от граничной прямой, а для значений $y < \frac{\beta}{1 - \beta}$ приближаются к ней. Таким образом, принимая во внимание аналогичное поведение траекторий области O_2 в окрестности граничной прямой,

приходим к выводу, что на прямой $x + \beta y = 0$ имеется отрезок

$$|y| \leq \frac{\beta}{1-\beta}, \quad (4.49)$$

к которому фазовые траектории подходят с обеих сторон, а вне этого отрезка в соответствии с требованием непрерывности движения изображающей точки пересекают ее (т. е. изображающая точка, двигаясь по этим траекториям, переходит из одной области в другую). Если изображающая точка приходит на отрезок (4.49) граничной прямой $x + \beta y = 0$, то в дальнейшем она движется по этому отрезку. Движение вдоль отрезка (4.49) соответствует устойчивому скользящему режиму двухпозиционного авторулевого. Закон движения изображающей точки на отрезке (4.49) находится из уравнения $x + \beta \dot{x} = 0$, которое получается при подстановке $y = \dot{x}$ в уравнение граничной прямой. Отсюда $x = x_0 e^{-t/\beta}$ и, следовательно, при скользящем режиме двухпозиционного рулевого отклонение судна от заданного курса затухает по экспоненциальному закону.

Поведение фазовых траекторий вне отрезка (4.49) изучим путем сведения задачи к точечному отображению граничной прямой $x + \beta y = 0$ в себя. Общее решение системы (4.47) имеет вид

$$y = -1 + (y_0 + 1)e^{-t}, \quad x = x_0 - t + (y_0 + 1)(1 - e^{-t}), \quad (4.50)$$

где x_0, y_0 — значения фазовых переменных x, y при $t = 0$. Пусть в начальный момент времени $x_0 = -\beta y_1, y_0 = y_1$, а через время $\tau \geq 0$ изображающая точка возвратилась на граничную прямую $x + \beta y = 0$, имея координаты $(\beta y_2, -y_2)$. Подставляя эти значения в (4.50) и разрешая полученные выражения относительно y_1 и y_2 , приходим к параметрической записи искомого точечного отображения:

$$y_1 = -1 + \frac{\tau}{(1-\beta)(1-e^{-\tau})}, \quad y_2 = 1 - \frac{\tau}{(1-\beta)(e^{\tau}-1)}, \quad (4.51)$$

где время перехода τ является текущим параметром. Согласно (4.51) при $\tau \rightarrow 0$ имеем $y_1 \rightarrow \frac{\beta}{1-\beta}, \quad y_2 \rightarrow -\frac{\beta}{1-\beta}$. При $\tau \rightarrow \infty$ кривые $y_1 = y_1(\tau)$ и $y_2 = y_2(\tau)$ уходят в

бесконечность, приближаясь к асимптотам $y_1 = \frac{\tau}{1-\beta}$ и соответственно $y_2 = 1$. Производные

$$\frac{dy_1}{d\tau} = \frac{1 - (\tau + 1) e^{-\tau}}{(1 - \beta)(1 - e^{-\tau})^2}, \quad \frac{dy_2}{d\tau} = \frac{e^\tau [\tau - (1 - e^{-\tau})]}{(1 - \beta)(e^\tau - 1)^2}$$

при всех значениях $\tau > 0$ положительны. Графики функций $y_1 = y_1(\tau)$ и $y_2(\tau)$ изображены на рис. 4.37. Поскольку эти кривые не пересекаются, точечное отображение (4.51) не имеет неподвижных точек. «Лестница Ламерея»,

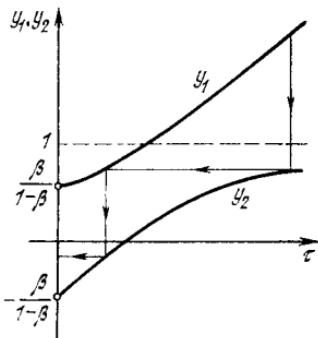


Рис. 4.37

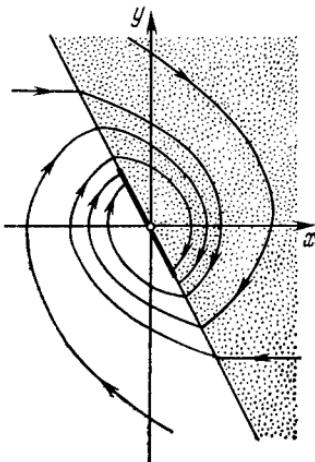


Рис. 4.38

построенная на этих кривых, может содержать самое большое две «ступеньки». Это означает, что при любых начальных условиях изображающая точка попадает на отрезок (4.49) скользящих движений не более чем после двух пересечений граничной прямой $x + \beta y = 0$. Соответствующее разбиение фазовой плоскости xy на траектории для рассматриваемого случая $0 < \beta < 1$ показано на рис. 4.38. Рассмотрение случая $\beta < 0$ проводится аналогично. Функция последования по-прежнему определяется соотношениями (4.51), а диаграмма Ламерея имеет вид, показанный на рис. 4.39. Таким образом, в случае $\beta < 0$ точечное отображение (4.51) имеет единственную неподвижную точку, которая является устойчивой. На фазовой плоскости xy этой точке соответствует устойчивый предельный цикл, расположенный симметрично относительно начала координат (рис. 4.40). При этом режиме корабль

совершает устойчивые колебания относительно заданного курса. Период автоколебаний τ^* определяется из уравнения $1 - \beta = \frac{\tau^*}{2} \operatorname{cth} \frac{\tau^*}{2}$, которое получается из соотношений

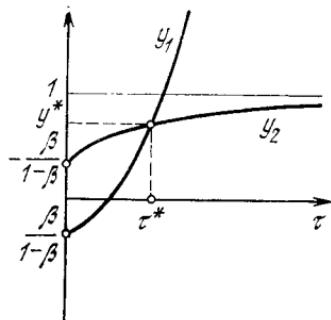


Рис. 4.39

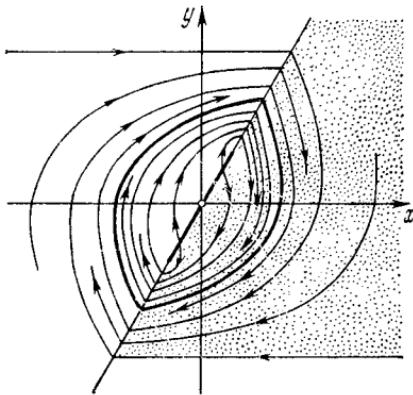


Рис. 4.40

(4.51) после подстановки в них $y_1 = y_2 = y^*$ и исключения величины y^* .

Период автоколебаний, так же как и их амплитуда, стремится к нулю вместе с $\beta \rightarrow 0$.

Пример 5. Электромагнитный прерыватель [10]. Рассмотрим модель электромагнитного прерывателя (рис. 4.41), представляющую собой пример динамической системы с трехмерным фазовым пространством, которое оказывается вырожденным. Это позволяет свести задачу

к изучению точечного отображения полупрямой в себя. На схеме рис. 4.41 катушка M с железным сердечником включена в цепь с источником постоянной э. д. с. E . Электрическая цепь может замыкаться и размыкаться при помощи подвижного контакта (молоточка), укрепленного на упругой ножке. Обозначим через x координату смещения молоточка прерывателя от его положения в отсут-

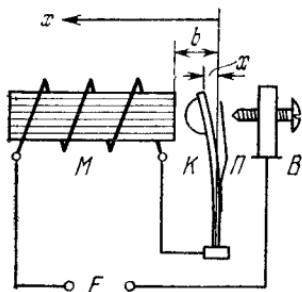


Рис. 4.41

ствие источника э.д.с. Будем считать, что мягкая пластина P , укрепленная на молоточке, не препятствует его отклоне-

нию в сторону отрицательных x . Координату $x = a$, при которой происходит замыкание и размыкание цепи, можно задавать, изменяя положение винта B . На расстоянии b от начала координат осуществляется неупругий удар молоточка о преграду, например о неподвижный сердечник катушки, с мгновенной потерей части кинетической энергии. Процесс удара описывается уравнением

$$\left(\frac{dx}{dt} \right)_1 = -\mu \left(\frac{dx}{dt} \right)_0 \quad (x=b), \quad (4.52)$$

где $(dx/dt)_0$ — скорость молоточка до удара, $(dx/dt)_1$ — скорость после удара, μ — коэффициент восстановления ($\mu = 1$ при абсолютно упругом ударе, $\mu = 0$ при абсолютно неупругом ударе). Пусть L — коэффициент самоиндукции, R — омическое сопротивление, m — масса молоточка, k — коэффициент упругости его ножки, y — ток в цепи, gy — сила притяжения со стороны электромагнита. Тогда, пренебрегая силами вязкого трения, действующими на молоточек прерывателя, и считая, что разрыв цепи происходит мгновенно и без искры, получим уравнения динамики:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + kx = gy, \quad L \frac{dy}{dt} + R(x)y = E;$$

$$R(x) = \begin{cases} R, & \text{если } x \leq a, \\ \infty, & \text{если } x > a. \end{cases}$$

В безразмерных переменных

$$x_{\text{нов}} = \frac{kR}{gE} x, \quad y_{\text{нов}} = \frac{R}{E} y, \quad t_{\text{нов}} = t \sqrt{\frac{k}{m}}$$

уравнения движения электромагнитного прерывателя имеют вид

$$\ddot{x} + x = y, \quad \dot{y} + \rho y = \rho \quad (x \leq \xi), \quad (4.53)$$

$$\ddot{x} + x = 0, \quad y = 0 \quad (\xi < x < \beta), \quad (4.54)$$

$$\dot{x}_1 = -\mu \dot{x}_0 \quad (x = \beta), \quad (4.55)$$

где точками обозначено дифференцирование по безразмерному времени и введены безразмерные параметры

$$\rho = \frac{R}{L} \sqrt{\frac{m}{k}}, \quad \xi = \frac{kR}{gE} a, \quad \beta = \frac{kR}{gE} b.$$

Таким образом, рассматриваемая система характеризуется четырьмя существенными параметрами: ξ , β , ρ , μ , изменяющими

няющимися в пределах $-\infty < \xi < \beta < +\infty$, $0 \leq \rho < \infty$, $0 \leq \mu \leq 1$. Фазовое пространство системы является трехмерным ($x, y, z \equiv \dot{x}$) при $x \leq \xi$ и двумерным ($x, y = 0, z$) при $\xi < x < b$, причем фазовая полоса ($\xi < x < b$, $y = 0$) «склеена» с фазовым полупространством ($x \leq \xi$)

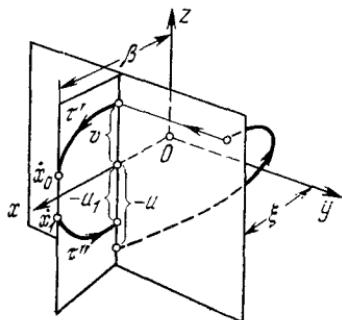


Рис. 4.42

вдоль прямой $x = \xi$, $y = 0$ (рис. 4.42). Движение изображающей точки в фазовом пространстве происходит следующим образом; перемещаясь в фазовой полосе, изображающая точка приходит на граничную прямую $x = \xi$, $y = 0$, после чего совершает переход в фазовом полупространстве согласно уравнениям (4.53). Попав на граничную плоскость $x = \xi$, изображающая точка мгновенно

(в соответствии с предположением о мгновенном спадании тока y при размыкании цепи) переносится вдоль прямой $x = \xi + 0$, $z = \text{const}$ на границу фазовой полосы, после чего продолжает двигаться в фазовой полосе согласно уравнениям (4.54). Из точки $x = \beta$, $z = \dot{x}_0$ она совершает мгновенный скачок в точку $x = \beta$, $z = \dot{x}_1$ (уравнение удара (4.55)) и далее движется в фазовой полосе согласно уравнениям (4.54) до прихода на граничную прямую $x = \xi$, $y = 0$. Затем описанный процесс повторяется. Если начальная и конечная точки совпадают, то траектория оказывается замкнутой. Структура фазового пространства позволяет свести исследование его разбиения на траектории и отыскание, в частности, замкнутых кривых к рассмотрению точечного отображения T полупрямой $x = \xi$, $y = 0$, $z < 0$ в себя. Отображение $T = T_2 \cdot T_1$ можно представить в виде двух преобразований, проведенных последовательно: преобразования T_1 точек нижней полупрямой ($x = \xi$, $y = 0$, $z < 0$) в точки верхней полупрямой ($x = \xi$, $y = 0$, $z > 0$), порождаемого траекториями в фазовом полупространстве, и преобразования T_2 точек верхней полупрямой в нижнюю, порождаемого траекториями в фазовой полосе, включая скачок изображающей точки вдоль границы $x = \beta$.

Согласно обозначениям на рис. 4.42, отображение T_2 можно записать в виде функции соответствия $u_1 =$

$= u_1(v)$. Для значений $v < v_0$, где $v_0^2 = \beta^2 - \xi^2$, имеем, пользуясь уравнением семейства траекторий $x^2 + z^2 = c^2 = \text{const}$ системы (4.54):

$$u_1 = v. \quad (4.56)$$

Для значений $v > v_0$, согласно (4.54) и (4.55), получаем следующее выражение:

$$u_1^2 = \mu^2 v^2 + \sigma, \quad \sigma = (\beta^2 - \xi^2)(1 - \mu^2). \quad (4.57)$$

С целью нахождения функции последования $u = u(v)$ точечного отображения T_1 воспользуемся общим решением системы дифференциальных уравнений (4.53):

$$x = A \cos t + B \sin t + 1 + \frac{C}{1 + \rho^2} e^{-\rho t}, \quad y = 1 + C e^{-\rho t}.$$

Определив произвольные постоянные A, B, C из начальных условий $t = 0, x = \xi, y = 0, z = -u$, следим далее за движением изображающей точки, которая через промежуток времени τ вновь приходит на граничную плоскость $x = \xi$, имея аппликату $z = v$. Подставляем эти значения в выражения для x и $\dot{x} \equiv z$:

$$\begin{aligned} \xi &= \left(\xi - \frac{\rho^2}{1 + \rho^2} \right) \cos \tau - \left(u + \frac{\rho}{1 + \rho^2} \right) \sin \tau + 1 - \frac{1}{1 - \rho^2} e^{-\rho \tau}, \\ v &= - \left(\xi - \frac{\rho^3}{1 + \rho^2} \right) \sin \tau - \left(u + \frac{\rho}{1 + \rho^2} \right) \cos \tau + \frac{\rho}{1 + \rho^2} e^{-\rho \tau}. \end{aligned} \quad (4.58)$$

Отсюда мы и получаем функцию соответствия $u = u(v)$ в параметрическом представлении:

$$\begin{aligned} u &= \frac{(1 - \chi) \cos \tau + \chi - e^{-\rho \tau} - \rho \sin \tau}{(1 + \rho^2) \sin \tau}, \\ v &= \frac{\rho e^{-\rho \tau} \sin \tau - 1 + \chi - (\chi - e^{-\rho \tau}) \cos \tau}{(1 + \rho^2) \sin \tau}, \end{aligned} \quad (4.59)$$

где введено обозначение $\chi = (1 - \xi)(1 + \rho^2)$. Исследуем поведение кривых $u = u(v)$ и $u_1 = u_1(v)$ в зависимости от значений параметров системы, принимая во внимание, что диаграмма Ламерей имеет смысл лишь для $u > 0$, $u_1 > 0$, $v > 0$.

Кривая $u_1 = u_1(v)$ состоит из отрезка биссектрисы координатного угла (для значений $v < v_0$) и части гиперболы (4.57), имеющей асимптоту $u_1 = \mu v$ (для $v > v_0$). Характер поведения кривой не изменяется при любых

значениях параметров, если $|\xi| < |\beta|$. При $|\xi| = |\beta|$ ($\xi < 0, \beta > 0$) кривая $u_1 = u_1(v)$ совпадает со своей асимптотой, а при $|\xi| > |\beta|$ ($\xi < 0$) она проходит ниже асимптоты, пересекая ось Ov в точке $\bar{v} = -\mu^{-1} \sqrt{(\xi^2 - \beta^2)(1 - \mu^2)}$.

Переходя к исследованию поведения кривой $u = u(v)$, заметим, что при всех значениях τ , изменяющемся в пределах $0 < \tau < 2\pi$, выполняется неравенство $u < v$. Кроме того, выражение для производной

$$\frac{du}{dv} = \frac{v}{u + \frac{\rho}{1+\rho^2}[1 - e^{-\rho\tau}(\cos \tau + \rho \sin \tau)]}$$

показывает, что для $u > 0, v > 0$ производная du/dv всегда положительна. Обозначим через $\varphi(\xi, \rho, \pi) \equiv \equiv 2\xi - 1 - e^{-\rho\pi}$ числители в выражениях (4.59) при $\tau = \pi$, совпадающие при этом значении τ . При $\tau \rightarrow \pi$ кривая $u = u(v)$ приближается к асимптоте

$$u = v - \frac{\rho}{1+\rho^2}(1 + e^{-\rho\pi}), \quad (4.60)$$

оставаясь выше нее, если $\varphi(\xi, \rho, \pi) > 0$, или ниже нее, если $\varphi(\xi, \rho, \pi) < 0$. При значениях физических па-

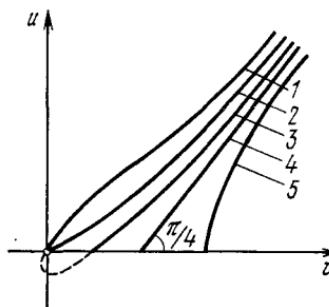


Рис. 4.43

$v = v(\tau)$ в ряды для малых значений τ :

$$u = -\frac{\xi}{2}\tau + \frac{\rho}{6}\tau^2 - \frac{\xi - \rho^2}{24}\tau^3 + \dots,$$

$$v = -\frac{\xi}{2}\tau + \frac{\rho}{3}\tau^2 + \frac{\xi - 3\rho^2}{24}\tau^3 + \dots,$$

получим различные случаи возможного поведения кривой $u = u(v)$, изображенные на рис. 4.43. Кривая 1 относит-

ся к параметрам, удовлетворяющим соотношению $\varphi(\xi, \rho, \pi) = 0$, функция соответствия $u = u(v)$ вырождается в прямую (4.60), которая получается из второго соотношения (4.58) при подстановке в него значения $\tau = \pi$. (При этом первое соотношение (4.58) обращается в тождество.) Используя далее выражение $\frac{du}{d\tau} = \frac{v}{\sin \tau}$ и разложение функций $u = u(\tau)$ и

ся к значениям параметров в области $\xi < 0$; кривая 2 получается при $\xi = 0$; кривая 3 — в области $\xi > 0$, $\varphi(\xi, \rho, \pi) > 0$; прямая 4 — при значениях параметров, удовлетворяющих условию $\varphi(\xi, \rho, \pi) = 0$; кривая 5 — в области значений параметров $\varphi(\xi, \rho, \pi) < 0$. Перейдем теперь к построению диаграмм Ламерея, которые представляют собой сочетание какого-нибудь типа кривой $u = u(v)$ с одним из возможных (при данных значениях

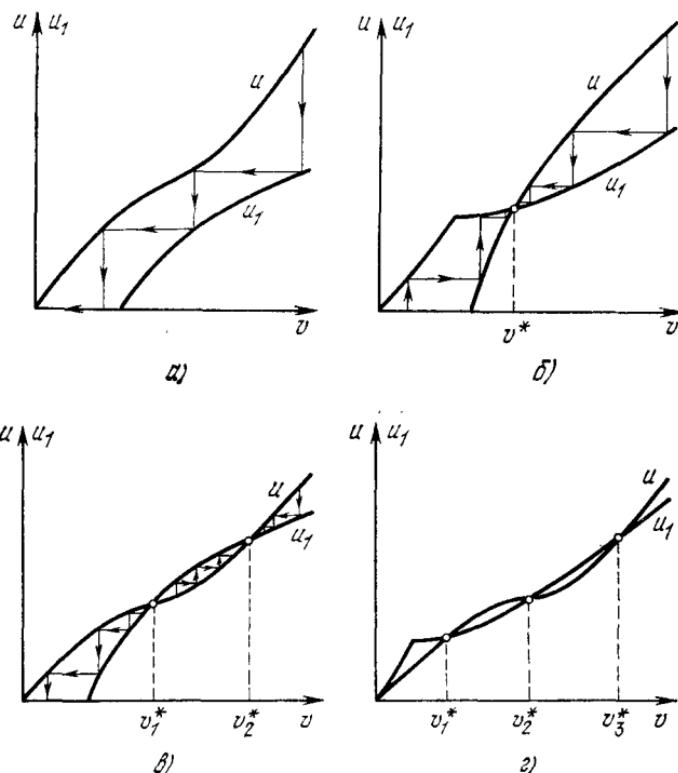


Рис. 4.44

параметров) типов кривой $u_1 = u_1(v)$. В результате получаем четыре диаграммы Ламерея (рис. 4.44), различающиеся числом точек пересечения кривых $u = u(v)$ и $u_1 = u_1(v)$. Значения параметра τ , соответствующие точкам пересечения этих кривых, являются корнями уравнения

$$[u(\tau)]^2 - \mu^2 [v(\tau)]^2 - \sigma = 0 \quad (0 < \tau < 2\pi), \quad (4.61)$$

причем имеет место следующее утверждение: при любых значениях физических параметров в области $\xi < 0$ уравнение (4.61) может иметь не более трех корней, отличных от нуля, а в области $\xi > 0$ — не более одного корня, отличного от нуля. Доказательство этого утверждения, которое мы здесь опускаем, содержится в работе [10]. Из диаграмм Ламеря на рис. 4.44 следует, что возможны следующие случаи разбиения фазового пространства на траектории:

1) все траектории являются скручивающимися, предельные циклы отсутствуют (рис. 4.44, *a*), в системе нет периодических движений, связанных с разрывом электрической цепи;

2) в фазовом пространстве существует один устойчивый предельный цикл, соответствующий точке v^* на рис. 4.44, *b*;

3) существуют два предельных цикла, соответствующие точкам v_1^* и v_2^* на рис. 4.44, *c*: внешний цикл устойчивый, а внутренний — неустойчивый;

4) существуют одновременно три предельных цикла (точки v_1^*, v_2^*, v_3^* на рис. 4.44, *г*): внутренний и внешний циклы устойчивы, а средний — неустойчивый.

В соответствии с этими случаями пространство параметров системы разбивается на области значений, при которых топологическая структура разбиения фазового пространства на траектории остается одинаковой. Уравнения границ указанных областей находятся из условия изменения числа точек пересечения кривых $u = u(v)$ и $u_1 = u_1(v)$ на диаграммах Ламеря, изображенных на рис. 4.44. Исчезновение одной точки пересечения с уходом в начало координат приводит к границе $|\xi| = |\beta|$. Другая возможность изменения числа точек пересечения состоит в слиянии двух точек с их последующим исчезновением. На этой границе должны быть выполнены условия

$$u(\tau) = u_1, \quad v_{T_1}(\tau) = v_{T_2}, \quad \frac{du_1}{dv} = \frac{du}{dv}.$$

Подставляя сюда выражения входящих в эти соотношения величин $u(\tau)$, u_1 , $v_{T_1}(\tau)$, v_{T_2} , получаем параметрические уравнения границы

$$(1 + \rho^2)\xi = f_1(\rho, \tau) - \frac{\kappa \sin \tau}{1 - \cos \tau} f_2(\rho, \tau),$$

$$(1 + \rho^2)^2 (\beta^2 - \xi^2) = \kappa \{ \kappa f_2(\rho, \tau) [f_2(\rho, \tau) - 2f_3(\rho, \tau)] - [f_3(\rho, \tau)]^2 \},$$

где введены обозначения:

$$f_1(\rho, \tau) = \rho^2 + \frac{1 - \rho \sin \tau - e^{-\rho \tau}}{1 - \cos \tau},$$

$$f_2(\rho, \tau) = \rho [1 - e^{-\rho \tau} (\cos \tau + \rho \sin \tau)],$$

$$f_3(\rho, \tau) = 2\rho - \left(\rho + \frac{1 + \cos \tau}{\sin \tau} \right) (1 - e^{-\rho \tau}), \quad \kappa = \frac{\mu^2}{1 - \mu^2}$$

$$(0 < \tau < 2\pi).$$

В качестве примера на рис. 4.45 приведено разбиение плоскости параметров $(\beta^2 - \xi^2, \xi)$ при фиксированных

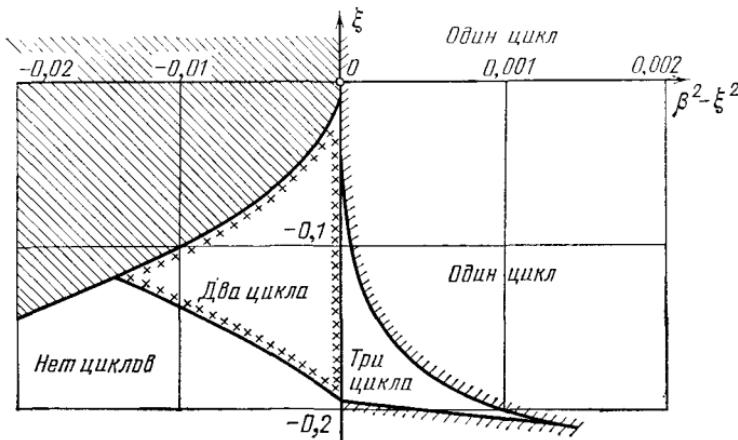


Рис. 4.45

значениях $\kappa = 1$, $\rho = 1$. В выбранных таким образом переменных следует рассматривать всю плоскость, за исключением полностью заштрихованной части, так как эта область не соответствует никаким действительным значениям физических параметров. Качественный характер разбиения этой плоскости, изображенный на рис. 4.45, сохраняется и при значениях κ и ρ , отличных от единицы.

Диаграммы Ламерая на рис. 4.44 показывают, что в рассматриваемой системе все существующие периодические движения являются простыми (т. е. фазовая траектория предельного цикла замыкается после одного оборота). В системе не может быть сложных периодических движений в силу того, что кривые $u = u(\tau)$ и $v = v(\tau)$ непрерывны и ни в одной точке первого квадранта не имеют отрицательного наклона касательной.

Период автоколебаний равен $\tau_0 + \tau_1 + \tau_2$, где τ_0 является корнем трансцендентного уравнения

$$\left[\frac{(1-\chi) \cos \tau_0 + \chi - e^{-\rho \tau_0}}{\sin \tau_0} - \rho \right]^2 = \\ = \mu^2 \left[\rho e^{-\rho \tau_0} - \frac{1 - \chi + (\chi - e^{-\rho \tau_0}) \cos \tau_0}{\sin \tau_0} \right]^2 + \\ + (\rho^2 + 1)^2 (1 - \mu^2) (\beta^2 - \xi^2),$$

а τ_1 и τ_2 определяются выражениями

$$\tau_1 = \arccos \frac{\xi \beta + v \sqrt{v^2 + \xi^2 - \beta^2}}{\xi^2 + v^2},$$

$$\tau_2 = \arccos \frac{\xi \beta + \mu \sqrt{(v^2 + \xi^2 - \beta^2) [\mu^2 (v^2 + \xi^2 - \beta^2) + \beta^2 - \xi^2]}}{\beta^2 + \mu^2 (v^2 + \xi^2 - \beta^2)},$$

куда нужно подставить значение

$$v = \frac{1}{1 + \rho^2} \left[\rho e^{-\rho \tau_0} - \frac{1 - \chi + (\chi - e^{-\rho \tau_0}) \cos \tau_0}{\sin \tau_0} \right].$$