

ГЛАВА 5

КВАЗИЛИНЕЙНЫЕ ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ

В этой главе будут рассмотрены некоторые свойства динамических систем, уравнения движения которых могут быть представлены в виде

$$\sum_{k=1}^s (a_{jk}\ddot{q}_k + d_{jk}\dot{q}_k + c_{jk}q_k) = \mu f_j(q_1, q_2, \dots, q_s, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_s, t) + F_j(t) \quad (j = 1, 2, \dots, s), \quad (5.1)$$

где a_{jk} , c_{jk} , $d_{jk} = -d_{kj}$ ($d_{jj} = 0$) — постоянные коэффициенты; $f_j(q_1, q_2, \dots, q_s, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_s, t)^*$ — нелинейные функции обобщенных координат (q_k), обобщенных скоростей (\dot{q}_k) и времени; $F_j(t)$ — функции времени; μ — малый параметр. При $\mu = 0$ система уравнений (5.1) становится линейной, при $\mu \neq 0$, но достаточно малом, динамическая система близка к линейной и поэтому называется «квазилинейной». Будем предполагать, что коэффициенты a_{jk} , c_{jk} и d_{jk} таковы, что характеристическое уравнение линейной однородной системы уравнений

$$\sum_{k=1}^s (a_{jk}\ddot{q}_k + d_{jk}\dot{q}_k + c_{jk}q_k) = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, s)$$

имеет чисто мнимые корни. Члены $d_{jk}\dot{q}_k$, входящие в левую часть уравнений (5.1), называются «гироскопическими членами» или «гироскопическими силами». Сумма работ этих сил на действительном перемещении динамической системы равна нулю. Название «гироскопические» про-

*) Будем в дальнейшем предполагать, что функции f_j обладают свойствами, позволяющими проводить с ними необходимые операции.

исходит от того, что такие силы появляются в динамической системе, если она имеет в своем составе гироскопы. Однако гироскопические члены могут появиться и в системе без гироскопов, но при наличии нестационарных связей [24]. Заметим, что рассматриваемые нами динамические системы при $F_j(t) = 0$ являются системами, в которых при $\mu = 0$ действует закон сохранения энергии, и если гироскопические силы в системе отсутствуют, то эти динамические системы при $\mu = 0$ будут консервативными.

Разработке и обоснованию методов исследования таких квазилинейных систем и приложению этих методов к решению конкретных задач посвящена большая литература. Не останавливаясь на обзоре всей этой литературы, укажем только основополагающие работы. Это фундаментальные исследования по разработке асимптотических методов исследования нелинейных систем Н. М. Крылова, Н. Н. Боголюбова, Ю. А. Митропольского [18, 19, 5, 25]; работы Л. И. Мандельштамма, Н. Д. Папалекси, А. А. Андронова, А. А. Витта [3, 4, 23, 27]; работы Б. В. Булгакова [6, 7]. В основе этих методов лежит гипотеза о наличии порождающего решения, за которое берется решение системы (5.1) при $\mu = 0$.

Отметим, что существуют и другие методы малого параметра, определения периодических режимов, которые не предполагают наличия порождающего решения, а исходят из так называемой гипотезы фильтра [1, 2], которая опирается на наличие у любой реальной системы конечной полосы пропускания частот.

В данной главе, имеющей целью показать характерные особенности квазилинейных систем, рассматривается лишь один метод — метод медленно меняющихся коэффициентов, связанный с проблемой осреднения. Начало применения этого метода к задачам теории нелинейных колебаний принадлежит Ван-дер-Полю [15]: дальнейшее его развитие и обоснование связано с именами Н. М. Крылова, Н. Н. Боголюбова, Ю. А. Митропольского, Л. И. Мандельштамма, Н. Д. Папалекси, А. А. Андронова, Б. В. Булгакова и их учеников и последователей. Указанный метод нами используется еще и потому, что позволяет в наибольшей степени использовать идеи А. А. Андронова по качественному исследованию дифференциальных уравнений.

§ 1. Автономные динамические системы с одной степенью свободы

Уравнение движения квазилинейной автономной динамической системы имеет вид

$$a_{11}\ddot{q} + c_{11}q = \mu f_1(q, \dot{q}). \quad (5.2)$$

Будем считать, что обычно безразмерный коэффициент $\mu > 0$.

Введем в рассмотрение базразмерное время $\tau = \sqrt{\frac{c_{11}}{a_{11}}} t$, тогда в силу $\dot{q} = \frac{dq}{d\tau} \frac{d\tau}{dt} = \frac{dq}{d\tau} \sqrt{\frac{c_{11}}{a_{11}}}$, $\ddot{q} = \frac{d^2q}{d\tau^2} \frac{c_{11}}{a_{11}}$ уравнение (5.2) примет вид

$$\frac{d^2q}{d\tau^2} + q = \mu f\left(q, \frac{dq}{d\tau}\right), \quad (5.3)$$

где

$$f\left(q, \frac{dq}{d\tau}\right) = \frac{1}{c_{11}} f_1\left(q, \frac{dq}{d\tau} \sqrt{\frac{c_{11}}{a_{11}}}\right).$$

Если ввести обозначение $q^* = dq/d\tau$, то уравнение (5.3) можно представить в виде двух уравнений первого порядка:

$$\frac{dq^*}{d\tau} = -q + \mu f(q, q^*),$$

$$\frac{dq}{d\tau} = q^*.$$

На фазовой плоскости qq^* уравнение интегральных кривых будет

$$\frac{dq^*}{dq} = \frac{-q + \mu f(q, q^*)}{q^*}. \quad (5.4)$$

При $\mu = 0$ рассматриваемая динамическая система будет линейной консервативной и фазовые траектории на плоскости qq^* представляют собой вложенные друг в друга концентрические окружности с центром в начале координат, являющимся состоянием равновесия. В этом случае решением уравнения (5.3) служит

$$q = a \cos \tau + b \sin \tau, \quad (5.5)$$

где a и b — постоянные числа (постоянные интегрирования).

Пусть теперь μ отлично от нуля, но достаточно мало. Выясним, как изменится при этом картина разбиения плоскости qq^* на траектории. Будем искать решение уравнения (5.3) в виде (5.5), считая коэффициенты a и b функциями времени. Тогда

$$\frac{dq}{d\tau} = -a \sin \tau + b \cos \tau + \frac{db}{d\tau} \cos \tau + \frac{da}{d\tau} \sin \tau. \quad (5.6)$$

Из выражения (5.5) видно, что при заданном q функции a и b недостаточно определены, поэтому наложим на них ограничение, заключающееся в том, что производная от q по τ должна иметь такой же вид, как при постоянных a и b . Следовательно,

$$\frac{dq}{d\tau} = -a \sin \tau + b \cos \tau \quad (5.7)$$

и

$$\frac{da}{d\tau} \cos \tau + \frac{db}{d\tau} \sin \tau = 0. \quad (5.8)$$

Дифференцируя выражение (5.7) по τ , получаем

$$\frac{d^2q}{d\tau^2} = -a \cos \tau - b \sin \tau - \frac{da}{d\tau} \sin \tau + \frac{db}{d\tau} \cos \tau. \quad (5.9)$$

Подставляя это соотношение и соотношение (5.7) в уравнение (5.3), имеем

$$\begin{aligned} -\frac{da}{d\tau} \sin \tau + \frac{db}{d\tau} \cos \tau &= \\ &= \mu f(a \cos \tau + b \sin \tau, -a \sin \tau + b \cos \tau). \end{aligned} \quad (5.10)$$

Уравнения (5.8) и (5.10) представляют собой систему уравнений для определения da/dt и db/dt . Решая эту систему, будем иметь

$$\frac{da}{d\tau} = -\mu f(a \cos \tau + b \sin \tau, -a \sin \tau + b \cos \tau) \sin \tau, \quad (5.11)$$

$$\frac{db}{d\tau} = \mu f(a \cos \tau + b \sin \tau, -a \sin \tau + b \cos \tau) \cos \tau.$$

Полученные уравнения — это уравнение (5.3), преобразованное к новым переменным. Эта система уравнений неавтономна, тогда как исходное уравнение было автономным. Из выражений (5.11) следует, что производные da/dt и db/dt при достаточно малом μ достаточно малы, и мы можем считать, что функции a и b являются медленно меняю-

щимися функциями времени. Исходя из этого, предположим, что функции a и b меняются столь медленно, что их изменением за один период колебаний исходной системы можно пренебречь. Будем также считать, что $da/d\tau$ и $db/d\tau$, имеющие порядок μ , в течение одного периода постоянны. Умножая теперь обе части уравнений (5.11) на $d\tau$ и интегрируя от 0 до 2π , получаем

$$\begin{aligned}\frac{da}{d\tau} &= -\frac{\mu}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a \cos \tau + b \sin \tau, -a \sin \tau + b \cos \tau) \sin \tau d\tau, \\ \frac{db}{d\tau} &= -\frac{\mu}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a \cos \tau + b \sin \tau, -a \sin \tau + b \cos \tau) \cos \tau d\tau.\end{aligned}\quad (5.12)$$

Эти уравнения отличаются от уравнений (5.11) тем, что в правых частях этих уравнений стоят средние интегральные за периоды 2π от правых частей уравнений (5.11). Вводя обозначения

$$\begin{aligned}P(a, b) &= \\ &= -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a \cos \tau + b \sin \tau, -a \sin \tau + b \cos \tau) \sin \tau d\tau, \\ Q(a, b) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a \cos \tau + b \sin \tau, -a \sin \tau + b \cos \tau) \cos \tau d\tau,\end{aligned}$$

перепишем уравнения (5.12) в виде

$$\frac{da}{d\tau} = \mu P(a, b), \quad \frac{db}{d\tau} = \mu Q(a, b). \quad (5.13)$$

Эти уравнения называются «укороченными» или уравнениями Ван-дер-Поля. Из уравнений (5.13) получается, что

$$\frac{db}{da} = \frac{Q(a, b)}{P(a, b)}. \quad (5.14)$$

Уравнение (5.14) позволяет исследовать поведение интегральных кривых на плоскости ab .

Очевидно, что состояние равновесия $a = 0, b = 0$ на плоскости ab согласно (5.5) соответствует состоянию равновесия $q = 0, q^* = 0$ для исходной динамической системы. Состояния равновесия системы (5.14), для которых $a \neq 0, b \neq 0$, соответствуют периодическим движениям

для исходной системы. Следовательно, изучив состояния равновесия уравнения (5.14), а также расположение фазовых траекторий на плоскости ab , можно судить о возможных движениях исходной динамической системы. Этот прием был впервые предложен А. А. Андроновым [3]. Переход к полярным координатам в системе уравнений (5.13) позволит ответить на вопрос о поведении интегральных кривых на плоскости qq^* . Пусть

$$a = \rho \cos \vartheta, \quad b = \rho \sin \vartheta; \quad (5.15)$$

тогда

$$\begin{aligned} \frac{da}{d\tau} &= \frac{d\rho}{d\tau} \cos \vartheta - \rho \sin \vartheta \frac{d\vartheta}{d\tau}, \\ \frac{db}{d\tau} &= \frac{d\rho}{d\tau} \sin \vartheta + \rho \cos \vartheta \frac{d\vartheta}{d\tau}, \\ a \cos \tau + b \sin \tau &= \rho \cos(\vartheta - \tau), \\ -a \sin \tau + b \cos \tau &= -\rho \sin(\vartheta - \tau). \end{aligned}$$

После подстановки этих выражений в уравнения (5.12) получим

$$\begin{aligned} \frac{d\rho}{d\tau} \cos \vartheta - \rho \sin \vartheta \frac{d\vartheta}{d\tau} &= \\ &= -\frac{\mu}{2\pi} \int_0^{2\pi} f[\rho \cos(\tau - \vartheta), -\rho \sin(\tau - \vartheta)] \sin \tau d\tau, \\ \frac{d\rho}{d\tau} \sin \vartheta + \rho \cos \vartheta \frac{d\vartheta}{d\tau} &= \\ &= -\frac{\mu}{2\pi} \int_0^{2\pi} f[\rho \cos(\tau - \vartheta), -\rho \sin(\tau - \vartheta)] \cos \tau d\tau, \end{aligned}$$

откуда находим

$$\begin{aligned} \frac{d\rho}{d\tau} &= \\ &= -\frac{\mu}{2\pi} \int_0^{2\pi} f[\rho \cos(\tau - \vartheta), -\rho \sin(\tau - \vartheta)] \sin(\tau - \vartheta) d\tau, \\ \rho \frac{d\vartheta}{d\tau} &= \frac{\mu}{2\pi} \int_0^{2\pi} f[\rho \cos(\tau - \vartheta), -\rho \sin(\tau - \vartheta)] \cos(\tau - \vartheta) d\tau. \end{aligned}$$

Поскольку подынтегральные функции периодические, то, введя замену $\xi = \tau - \vartheta$, окончательно получим

$$\begin{aligned}\frac{d\rho}{d\tau} &= \mu\Phi(\rho), \\ \frac{d\vartheta}{d\tau} &= \mu\Psi(\rho),\end{aligned}\tag{5.16}$$

где

$$\begin{aligned}\Phi(\rho) &= -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\rho \cos \xi, -\rho \sin \xi) \sin \xi d\xi, \\ \Psi(\rho) &= \frac{1}{2\pi\rho} \int_0^{2\pi} f(\rho \cos \xi, -\rho \sin \xi) \cos \xi d\xi.\end{aligned}\tag{5.17}$$

Первое уравнение системы (5.16) не зависит от ϑ , и фазовая плоскость для него вырождается в прямую. Состояния равновесия этого уравнения располагаются на фазовой прямой. По характеру и расположению этих состояний равновесия можно полностью определить качественную картину поведения координаты ρ .

Координаты положений равновесия уравнения

$$\frac{d\rho}{d\tau} = \mu\Phi(\rho)\tag{5.18}$$

являются корнями уравнения

$$\Phi(\rho) = 0.\tag{5.19}$$

Рассмотрим поведение изображающей точки около какого-либо состояния равновесия уравнения (5.18). Пусть $\rho = \rho_0$ является корнем уравнения (5.19). Введем новую переменную u , характеризующую поведение изображающей точки вблизи состояния равновесия $\rho = \rho_0$:

$$\rho = \rho_0 + u.$$

Уравнение (5.18) при этом примет вид

$$\frac{du}{d\tau} = \mu\Phi(\rho_0 + u).$$

Разлагая функцию $\Phi(\rho_0 + u)$ в ряд по степеням u : $\Phi(\rho_0 + u) = \Phi'(\rho_0)u + \text{члены высших порядков малости}$ и ограничиваясь членами с первой степенью u , получим уравнение первого приближения

$$\frac{du}{d\tau} = \mu\Phi'(\rho_0)u.$$

При достаточно малом u , когда членами высших порядков в разложении функции $\Phi(\rho_0 + u)$ можно пренебречь, по знаку производной $\Phi'(\rho_0)$ можно судить о характере состояния равновесия $\rho = \rho_0$.

Если

$$\Phi'(\rho_0) < 0,$$

то состояние равновесия устойчиво, так как при этом $\frac{du}{dt} < 0$ и $u \rightarrow 0$. При $\Phi'(\rho_0) > 0$ состояние равновесия неустойчиво *).

Интегрируя уравнение (5.18), получим закон движения изображающей точки по фазовой прямой:

$$\mu(\tau - \tau_0) = \int_{\rho'}^{\rho} \frac{d\rho}{\Phi(\rho)}, \quad \text{где } \rho' = \rho_{\tau=\tau_0}.$$

Перейдем теперь к рассмотрению уравнения

$$\frac{d\vartheta}{d\tau} = \mu \Psi(\rho).$$

Если $\Psi(\rho) \equiv 0$, то $\frac{d\vartheta}{d\tau} = 0$ и $\vartheta = \vartheta_0$ — постоянное число.

Значит, на плоскости ab все интегральные кривые пред-

ставляют собой прямые, про-
ходящие через начало коорди-
нат. Движение изображающей
точки по всем этим прямым
происходит одинаково. Со-
стояния равновесия на плоско-
сти ab целиком заполняют
дуги окружностей, радиусы
которых являются корнями
уравнения (5.19). Плоскость ab
для случая, когда уравнение
(5.19) имеет корни $\rho_1 = 0$,
 $\rho_2 < \rho_3$, представлена на
рис. 5.1. Выясним, какая же
картина будет на плоскости
 qq^* . В соответствии с форму-

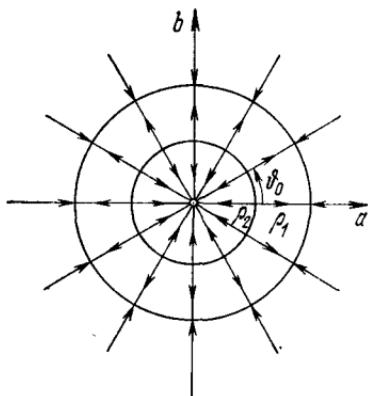


Рис. 5.1

лами (5.5), (5.7) и (5.15) получим

$$q = \rho \cos \vartheta \cos \tau + \rho \sin \vartheta \sin \tau = \rho \cos(\tau - \vartheta),$$

$$q^* = -\rho \cos \vartheta \sin \tau + \rho \sin \vartheta \cos \tau = -\rho \sin(\tau - \vartheta).$$

*) Строго это доказано А. М. Ляпуновым [20].

Для какого-либо состояния равновесия $\rho = \rho_k$ будет

$$\begin{aligned} q &= \rho_k \cos(\tau - \vartheta_0), \\ q^* &= -\rho_k \sin(\tau - \vartheta_0). \end{aligned} \quad (5.20)$$

Это означает, что на плоскости qq^* имеется замкнутая интегральная кривая — круговой предельный цикл

$$q^2 + q^{*2} = \rho_k^2.$$

Если ρ_k соответствует устойчивому состоянию равновесия, то на плоскости qq^* — устойчивый предельный цикл; все соседние интегральные кривые — спирали, накручивающиеся на этот предельный цикл. Если же ρ_k соответствует неустойчивому состоянию равновесия, то на плоскости qq^* — неустойчивый предельный цикл.

Пусть теперь $\Psi(\rho)$ не равно тождественно нулю. Предположим, что $\rho = \rho_k$ является корнем уравнения $\Phi(\rho) = 0$ *); тогда согласно второму уравнению системы (5.16)

$$\frac{d\vartheta}{d\tau} = \mu \Psi(\rho_k), \quad \vartheta = \mu \Psi(\rho_k) \tau + \vartheta_0;$$

изображающая точка на плоскости ab будет двигаться по закону

$$a = \rho_k \cos [\mu \Psi(\rho_k) \tau + \vartheta_0], \quad b = \rho_k \sin [\mu \Psi(\rho_k) \tau + \vartheta_0],$$

т. е. существует предельный цикл радиуса $\rho = \rho_k$. Характер предельного цикла определяется характером состояния равновесия $\rho = \rho_k$. Направление движения изображающей точки по предельному циклу определяется знаком $\Psi(\rho_k)$. Так как ϑ сохраняет знак между окружностями, радиусы которых являются корнями уравнения $\Psi(\rho) = 0$, то все остальные интегральные кривые представляют собой спирали, накручивающиеся на предельный цикл или раскручивающиеся с него. Отметим, что радиальные касательные у этих интегральных кривых будут только в пересечении с окружностями, определяемыми корнями уравнения $\Psi(\rho) = 0$. На плоскости qq^* имеем

$$\begin{aligned} q &= \rho_k \cos \{[1 - \mu \Psi(\rho_k)] \tau - \vartheta_0\}, \\ q^* &= -\rho_k \sin \{[1 - \mu \Psi(\rho_k)] \tau - \vartheta_0\}, \end{aligned}$$

*) Мы предполагаем, что корни уравнения $\Phi(\rho) = 0$ не совпадают с корнями уравнения $\Psi(\rho) = 0$, так как в противном случае получается тот же результат, что и при $\Psi(\rho) \equiv 0$.

т. е. круговые предельные циклы, соответствующие корням уравнения $\Phi(\rho) = 0$.

Таким образом, картина на фазовой плоскости для рассмотренных случаев остается одной и той же. Отличие заключается в том, что при $\Psi(\rho) \not\equiv 0$ имеет место поправка на частоту $\Delta\omega = -\mu\Psi(\rho_k)$.

Применим рассмотренный метод к исследованию движения динамической системы, представляющей собой твердое тело, прикрепленное к неподвижной точке пружиной жесткостью c и находящееся на горизонтальной ленте, которая движется с постоянной скоростью \bar{v}^*) (рис. 5.2).

Уравнение движения тела имеет вид

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + cx = T_x,$$

где m — масса тела; b — коэффициент сопротивления воздуха; T_x — сила трения, возникающая между телом и движущейся лентой. Сила трения является функцией относительной скорости $v_{rx} = v + \dot{x}$. Примерный график

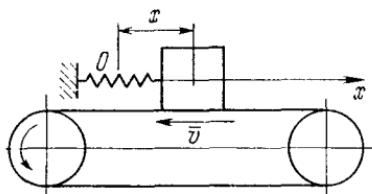


Рис. 5.2

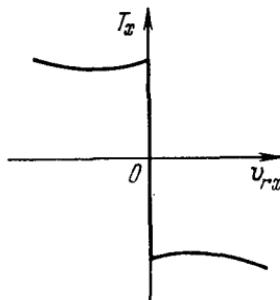


Рис. 5.3

этой функции изображен на рис. 5.3. Как видно из рисунка, $T(v_{rx})$ может иметь участки, где $T'_x > 0$ (падающие участки). Предполагая, что $v \gg |\dot{x}|$, разложим $T_x(v + \dot{x})$ в ряд по степеням \dot{x} :

$$\begin{aligned} T_x(v + \dot{x}) &= T_x(v) + T'_x(v)\dot{x} + \frac{1}{2}T''_x(v)\dot{x}^2 + \\ &\quad + \frac{1}{6}T'''_x(v)\dot{x}^3 + \frac{1}{24}T^{(IV)}_x(v)\dot{x}^4 + \frac{1}{120}T^{(V)}_x(v)\dot{x}^5 + \dots \end{aligned}$$

Ограничимся приведенными членами и исключим в этом разложении члены со второй и четвертой производными, так как при осреднении они исчезнут.

*) Эта динамическая система является аналогом так называемого маятника Фроуда [30].

Уравнение движения тела будет теперь иметь вид

$$\ddot{x} + \frac{b}{m} \dot{x} + \frac{c}{m} x = \frac{T_x(v)}{m} + \frac{T'_x(v)}{m} \dot{x} + \frac{T'''_x(v)}{6m} \dot{x}^3 + \frac{T^{(V)}_x(v)}{120m} \dot{x}^5.$$

Введем $\tau = kt$ ($k = \sqrt{c/m}$), тогда

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{d\tau^2} + x = & - \frac{b}{mk} \frac{dx}{d\tau} + \frac{T_x(v)}{mk^2} + \frac{T'_x(v)}{mk} \frac{dx}{d\tau} + \\ & + \frac{T'''_x(v)k}{6m} \left(\frac{dx}{d\tau} \right)^3 + \frac{T^{(V)}_x(v)k^3}{120m} \left(\frac{dx}{d\tau} \right)^5. \end{aligned}$$

Введя новую переменную $q = x - \frac{T_x(v)}{mk^2}$, получим

$$\begin{aligned} \frac{d^2q}{d\tau^2} + q = & \left(\frac{T'_x(v)}{mk} - \frac{b}{mk} \right) \frac{dq}{d\tau} + \frac{kT'''_x(v)}{6m} \left(\frac{dq}{d\tau} \right)^3 + \\ & + \frac{k^3 T^{(V)}_x(v)}{120m} \left(\frac{dq}{d\tau} \right)^5. \end{aligned}$$

Предположим, что коэффициент вязкого трения мал, а сила сухого трения мало отличается от постоянной, т. е. предположим, что безразмерные величины

$$\frac{b}{mk} \ll 1, \quad \frac{|T'_x(v)|}{mk} \ll 1, \quad \frac{k|T'''_x(v)|}{m} \ll 1, \quad \frac{k^3 |T^{(V)}_x(v)|}{m} \ll 1.$$

Пусть $\mu = \frac{b}{mk}$ — малый параметр, характеризующий близость рассматриваемой системы к линейной консервативной. Вводя обозначения

$$\alpha = \frac{T'_x(v)}{b} - 1, \quad \beta = \frac{k^2}{6} \frac{T'''_x(v)}{b}, \quad \gamma = \frac{k^4 T^{(V)}_x(v)}{b},$$

перепишем уравнение движения в виде

$$\frac{d^2q}{d\tau^2} + q = \mu \left[\alpha \frac{dq}{d\tau} + \beta \left(\frac{dq}{d\tau} \right)^3 + \gamma \left(\frac{dq}{d\tau} \right)^5 \right].$$

Сравнивая это уравнение с уравнением (5.3), видим, что для рассматриваемого случая

$$f\left(q, \frac{dq}{d\tau}\right) = \alpha \frac{dq}{d\tau} + \beta \left(\frac{dq}{d\tau} \right)^3 + \gamma \left(\frac{dq}{d\tau} \right)^5.$$

Тогда в соответствии с формулами (5.17) получим

$$\Phi(\rho) = \frac{1}{2} \rho \left(\alpha + \frac{3}{4} \beta \rho^2 + \frac{5}{8} \gamma \rho^4 \right),$$

$$\Psi(\rho) = 0.$$

Состояния равновесия системы находятся из уравнения

$$\rho \left(\alpha + \frac{3}{4} \beta \rho^2 + \frac{5}{8} \gamma \rho^4 \right) = 0.$$

Корень $\rho_1 = 0$ соответствует состоянию равновесия исходной динамической системы. Так как

$$\Phi'(\rho) = -\frac{1}{2} \left(\alpha + \frac{9}{4} \beta \rho^2 + \frac{25}{8} \gamma \rho^4 \right), \quad (5.21)$$

то состояние равновесия $\rho_1 = 0$ будет устойчивым, если $\alpha < 0$, и неустойчивым, если $\alpha > 0$. Другие состояния равновесия находятся из

уравнения

$$\alpha + \frac{3}{4} \beta \rho^2 + \frac{5}{8} \gamma \rho^4 = 0. \quad (5.22)$$

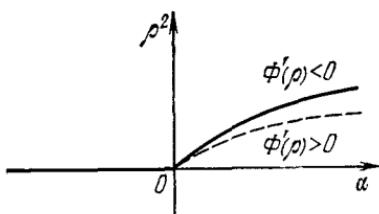


Рис. 5.4

Нас интересуют только положительные корни этого уравнения. Рассмотрим, как зависят эти корни от коэффициента α при фиксированных β и γ .

Исследуем случай, когда $\beta < 0$, $\gamma < 0$. Введем в рассмотрение плоскость $\alpha\rho^2$. На этой плоскости уравнение (5.22) представляет собой уравнение параболы. Из уравнения (5.22) следует, что

$$\rho^2 = -\frac{3}{5} \frac{\beta}{\gamma} \pm \sqrt{\frac{9}{25} \frac{\beta^2}{\gamma^2} - \frac{8}{5} \frac{\alpha}{\gamma}}.$$

При $\alpha = 0$ один корень уравнения (5.22) равен нулю, а второй отрицательный, так как β и γ одного знака. При $\alpha > 0$ уравнение (5.22) будет иметь только один положительный корень. Таким образом, парабола расположена, как показано на рис. 5.4. Согласно выражению (5.21) парабола

$$\alpha + \frac{9}{4} \beta \rho^2 + \frac{25}{8} \gamma \rho^4 = 0 \quad (5.23)$$

отделяет на плоскости $\alpha\rho^2$ области устойчивости, где $\Phi'(\rho) < 0$, от области неустойчивости, где $\Phi'(\rho) > 0$. В рассматриваемом случае область устойчивости находится вне параболы (5.23), нанесенной на рис. 5.4 штрихами. Из рассмотрения рис. 5.4 следует, что при $\alpha < 0$ будет только одно устойчивое состояние равновесия $\rho = 0$. При $\alpha > 0$ будет два состояния равновесия: неустойчивое

$\rho = 0$ и устойчивое, соответствующее верхней ветви параболы.

На фазовой плоскости $q \frac{dq}{d\tau}$ при $\alpha < 0$ будет устойчивое состояние равновесия в начале координат и, следовательно, система совершают затухающие колебания. При $\alpha > 0$ на фазовой плоскости $q \frac{dq}{d\tau}$ будет неустойчивое состояние равновесия в начале координат и устойчивый предельный цикл (рис. 5.5). При уменьшении α предельный

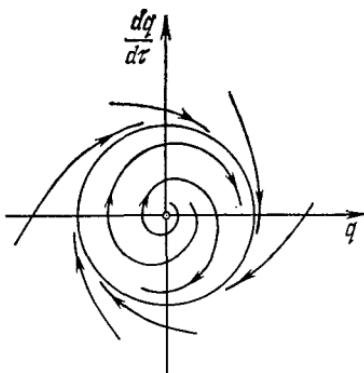


Рис. 5.5

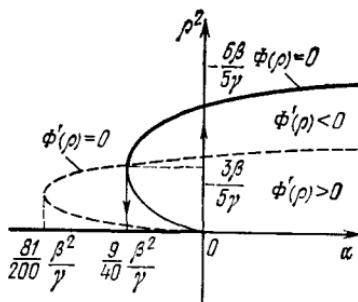


Рис. 5.6

цикл стягивается к началу координат и при $\alpha = 0$ сольется с неустойчивым состоянием равновесия и передаст ему свою устойчивость. При увеличении α от отрицательных значений к положительным при переходе через нуль возникают автоколебания, амплитуда которых увеличивается непрерывно (при непрерывном увеличении α). Такой характер возникновения автоколебаний называется «мягким» возбуждением.

Пусть теперь $\beta > 0$, $\gamma < 0$. В этом случае на плоскости $\alpha\rho^2$ парабола (5.22) пересекает ось ρ^2 в точках $\alpha_2 = 0$, $\rho_2^2 = 0$ и $\alpha_3 = 0$, $\rho_3^2 = -\frac{6}{5} \frac{\beta}{\gamma}$. Расположение этой параболы показано на рис. 5.6. В рассматриваемом случае область устойчивости находится вне параболы (5.23), нанесенной на рис. 5.6 штрихами. Из рассмотрения рис. 5.6 следует, что при $\alpha < \frac{9}{40} \frac{\beta^2}{\gamma}$ будет только одно устойчивое состояние равновесия и динамическая система совершает затухающие колебания.

При $\frac{9}{40} \frac{\beta^2}{\gamma} < \alpha < 0$ состояний равновесия три: устойчивое состояние равновесия $\rho = 0$, неустойчивое состояние равновесия, соответствующее нижней ветви параболы (5.22), и устойчивое состояние равновесия, соответствующее верхней части параболы (5.22). На фазовой плоскости $q - \frac{dq}{d\tau}$ это соответствует устойчивой особой точке в начале координат, неустойчивому предельному циклу и устойчивому предельному циклу. Таким образом, для начальных условий, лежащих внутри неустойчивого предельного цикла, колебания динамической системы затухающие. При начальных условиях, расположенных вне этого цикла, устанавливаются автоколебания. При $\alpha > 0$ состояние равновесия в начале координат неустойчиво и при любых начальных условиях устанавливаются устойчивые автоколебания (см. рис. 5.5).

Заметим, что при $\frac{9}{40} \frac{\beta^2}{\gamma} < \alpha < 0$ динамическая система может находиться в равновесии или совершать автоколебания. Следовательно, если она находится в покое, то мы, сообщив ей достаточно большую скорость, можем привести ее в режим автоколебаний.

Проследим, как возникают автоколебания при изменении α от отрицательных значений к положительным. Пусть при $\alpha < 0$ динамическая система находится в устойчивом состоянии покоя, при $\alpha = 0$ возникнут автоколебания конечной амплитуды. Далее, при увеличении α амплитуда колебаний будет постепенно нарастать. Такой режим возникновения автоколебаний называется «жестким» режимом. При обратном изменении α — от положительных к отрицательным — амплитуда автоколебаний постепенно уменьшается и при $\alpha = \frac{9}{40} \frac{\beta^2}{\gamma}$ автоколебания прекратятся (при конечной амплитуде), а система придет к устойчивому состоянию равновесия.

Следовательно, возникновение и исчезновение автоколебаний происходит при различных значениях параметра α , который часто называют коэффициентом возбуждения.

Мы не будем приводить здесь исследования случаев $\beta < 0$, $\alpha > 0$ и $\beta > 0$, $\gamma > 0$, которые проводятся аналогично. Отметим только, что в этих случаях при определенных значениях в динамической системе могут возникнуть неограниченно возрастающие колебания. Однако неогра-

ническое возрастание колебаний требует неограниченного поступления в систему энергии извне, но это практически невозможно. Следовательно, в этих случаях приближение, взятое при разложении $T_x(v + \dot{x})$, недостаточно и нужно учитывать члены более высоких порядков.

§ 2. Неавтономные квазилинейные динамические системы с одной степенью свободы

Рассмотрим движения неавтономной квазилинейной динамической системы вида

$$a_{11}\ddot{q} + c_{11}q = \mu f_1(q, \dot{q}, t). \quad (5.24)$$

Предположим, что нелинейная функция $f_1(q, \dot{q}, t)$ является периодической функцией по переменной t с периодом $2\pi/p$, т. е.

$$f_1\left(q, \dot{q}, t + \frac{2\pi}{p}\right) = f_1(q, \dot{q}, t).$$

Введя «безразмерное время» $\tau = pt$ и обозначив $k^2 = c_{11}/a_{11}$, перепишем уравнение (5.24) в виде

$$\frac{d^2q}{d\tau^2} + \frac{k^2}{p^2}q = \mu \frac{f_1\left(q, p \frac{dq}{d\tau}, \frac{\tau}{p}\right)}{p^2}.$$

В дальнейшем будем рассматривать случаи, когда отношение $(k^2 - p^2)/p^2$ имеет порядок малого параметра μ , т. е.

$$\frac{k^2 - p^2}{p^2} = \mu \zeta, \quad (5.25)$$

где ζ — так называемая расстройка — параметр, характеризующий различие между величинами k и p . Используя соотношение (5.25), уравнению движения можно придать вид

$$\frac{d^2q}{d\tau^2} + q = \mu f\left(q, \frac{dq}{d\tau}, \tau\right), \quad (5.26)$$

где функция

$$f\left(q, \frac{dq}{d\tau}, \tau\right) = -\zeta q + \frac{1}{p^2} f_1\left(q, p \frac{dq}{d\tau}, \frac{\tau}{p}\right)$$

обладает свойством периодичности по τ :

$$f\left(q, \frac{dq}{d\tau}, \tau + 2\pi\right) = f\left(q, \frac{dq}{d\tau}, \tau\right).$$