

ническое возрастание колебаний требует неограниченного поступления в систему энергии извне, но это практически невозможно. Следовательно, в этих случаях приближение, взятое при разложении $T_x(v + \dot{x})$, недостаточно и нужно учитывать члены более высоких порядков.

§ 2. Неавтономные квазилинейные динамические системы с одной степенью свободы

Рассмотрим движения неавтономной квазилинейной динамической системы вида

$$a_{11}\ddot{q} + c_{11}q = \mu f_1(q, \dot{q}, t). \quad (5.24)$$

Предположим, что нелинейная функция $f_1(q, \dot{q}, t)$ является периодической функцией по переменной t с периодом $2\pi/p$, т. е.

$$f_1\left(q, \dot{q}, t + \frac{2\pi}{p}\right) = f_1(q, \dot{q}, t).$$

Введя «безразмерное время» $\tau = pt$ и обозначив $k^2 = c_{11}/a_{11}$, перепишем уравнение (5.24) в виде

$$\frac{d^2q}{d\tau^2} + \frac{k^2}{p^2}q = \mu \frac{f_1\left(q, p \frac{dq}{d\tau}, \frac{\tau}{p}\right)}{p^2}.$$

В дальнейшем будем рассматривать случаи, когда отношение $(k^2 - p^2)/p^2$ имеет порядок малого параметра μ , т. е.

$$\frac{k^2 - p^2}{p^2} = \mu \zeta, \quad (5.25)$$

где ζ — так называемая расстройка — параметр, характеризующий различие между величинами k и p . Используя соотношение (5.25), уравнению движения можно придать вид

$$\frac{d^2q}{d\tau^2} + q = \mu f\left(q, \frac{dq}{d\tau}, \tau\right), \quad (5.26)$$

где функция

$$f\left(q, \frac{dq}{d\tau}, \tau\right) = -\zeta q + \frac{1}{p^2} f_1\left(q, p \frac{dq}{d\tau}, \frac{\tau}{p}\right)$$

обладает свойством периодичности по τ :

$$f\left(q, \frac{dq}{d\tau}, \tau + 2\pi\right) = f\left(q, \frac{dq}{d\tau}, \tau\right).$$

При $\mu = 0$ уравнение (5.26) имеет решение

$$q = a \cos \tau + b \sin \tau. \quad (5.27)$$

Если искать решение уравнения (5.26) при $\mu \neq 0$ в виде (5.27), считая a и b медленно меняющимися функциями времени, то, поступая аналогично тому, как это было сделано в § 1 гл. 5, получим для нахождения a и b укороченные уравнения вида

$$\begin{aligned} \frac{da}{d\tau} &= -\frac{\mu}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a \cos \tau + b \sin \tau, -a \sin \tau + b \cos \tau, \tau) \sin \tau d\tau, \\ \frac{db}{d\tau} &= \frac{\mu}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a \cos \tau + b \sin \tau, -a \sin \tau + b \cos \tau, \tau) \cos \tau d\tau. \end{aligned} \quad (5.28)$$

Заметим, что система уравнений (5.28) является автономной. В частном случае, когда

$$f\left(q, \frac{dq}{d\tau}, \tau\right) = \psi\left(q, \frac{dq}{d\tau}\right) + A_0 \sin \tau,$$

уравнения (5.28) имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{da}{d\tau} &= -\frac{\mu A_0}{2} - \frac{\mu}{2\pi} \int_0^{2\pi} \psi(a \cos \tau + \\ &\quad + b \sin \tau, -a \sin \tau + b \cos \tau) \sin \tau d\tau, \\ \frac{db}{d\tau} &= \frac{\mu}{2\pi} \int_0^{2\pi} \psi(a \cos \tau + b \sin \tau, -a \sin \tau + b \cos \tau) \cos \tau d\tau. \end{aligned} \quad (5.29)$$

В качестве первого примера на применение полученных уравнений рассмотрим задачу о действии внешней синусоидальной силы на автоколебательную систему. Это рассмотрение связано с одним из интересных и важных свойств автоколебательных систем — явлением принудительной синхронизации, которое иногда называется захватыванием. Это явление заключается в том, что при достаточно малой разности между частотой автоколебательной системы и частотой внешней силы устойчивое периодическое движение системы приобретает частоту внешней силы. Основ-

ным вопросом теории является нахождение интервала захватывания, т. е. той наибольшей разности частот, при которой еще имеет место захватывание, в то время как при дальнейшем увеличении различия между частотами захватывание уже не имеет места и наступает особый режим, связанный с наличием в системе квазипериодического движения с двумя основными частотами, из которых одна — частота внешней силы, а другая — более или менее измененная частота автоколебательной системы (режим биений).

Впервые приближенную теорию явления захватывания в регенеративном приемнике дал Ван-дер-Поль [15]. Математическое обоснование теории захватывания было дано в работах А. А. Андронова и А. А. Витта [4]. В настоящее время имеется большая литература, посвященная этому вопросу ([23, 27, 29, 26] и др.).

Мы рассмотрим явление захватывания на примере маятника, возбуждаемого подталкивающей силой [13]. Для малых колебаний маятника уравнение движения будет иметь вид

$$ml^2\ddot{\phi} + mgl\dot{\phi} + \gamma'\phi = E(\phi) + A' \sin pt.$$

Здесь m — масса маятника, l — его длина, γ' — коэффициент вязкого трения, p — частота внешней силы, $E(\phi)$ — подталкивающая сила. Функцию $E(\phi)$ будем считать запаздывающей. Это значит, что изменение этой функции всегда опаздывает на постоянный отрезок времени Δt по отношению к соответствующему значению аргумента, при котором должно произойти изменение функции. Если бы запаздывания не было, то эта функция аппроксимировалась бы следующим образом:

$$E(\phi) = \begin{cases} E' & \text{при } \phi > 0, \\ -E' & \text{при } \phi < 0 \end{cases} \quad (E' > 0).$$

Вводя обозначения $\tau = pt$, $k^2 = g/l$, получим

$$\frac{d^2\phi}{d\tau^2} + \frac{k^2}{p^2}\phi = \frac{A'}{ml^2p^3} \sin \tau - \frac{\gamma'}{ml^2p} \frac{d\phi}{d\tau} + \frac{E\left(\frac{d\phi}{d\tau}, p\right)}{ml^2p^2}.$$

Рассмотрим систему, близкую к «резонансу», т. е. будем считать, что

$$\frac{|k^2 - p^2|}{p^2} \ll 1.$$

Предполагая, что безразмерные величины имеют значения

$$\frac{A'}{ml^2 p^2} \ll 1, \quad \frac{\gamma'}{ml^2 p} \ll 1, \quad \frac{|E|}{ml^2 p^2} \ll 1,$$

и вводя расстройку ζ при помощи соотношения

$$\frac{k^2}{p^2} = 1 + \mu \zeta,$$

перепишем уравнение движения в виде

$$\frac{d^2\varphi}{d\tau^2} + \varphi = \mu \left[A_0 \sin \tau - \frac{d\varphi}{d\tau} - \zeta \varphi + E^* \left(\frac{d\varphi}{d\tau} \right) \right], \quad (5.30)$$

где $\mu = \frac{\gamma'}{ml^2 p}$ — малый параметр, характеризующий близость рассматриваемой системы к линейной консервативной, $E^* = \frac{E}{\gamma' p}$, $A_0 = \frac{A'}{\gamma' p}$. Уравнение (5.30) имеет вид (5.26), и, следовательно, в соответствии с уравнениями (5.29) получим

$$\frac{da}{d\tau} = \frac{\mu}{2} \left(-a + \zeta b - A_0 + \frac{4E_0}{\pi} \frac{a \cos \Delta - b \sin \Delta}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right),$$

$$\frac{db}{d\tau} = \frac{\mu}{2} \left(-b - \zeta a + \frac{4E_0}{\pi} \frac{a \sin \Delta + b \cos \Delta}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right),$$

где $\Delta = p\Delta t$, $E_0 = \frac{E'}{\gamma' p}$. После введения обозначений

$$B = \frac{4E_0}{\pi}, \quad x = \frac{a}{B}, \quad y = \frac{b}{B}, \quad A = \frac{A_0}{B}, \quad \tau_1 = \tau \frac{2}{\mu}$$

получим

$$\begin{aligned} \frac{dx}{d\tau_1} &= -x + \zeta y - A + \frac{x \cos \Delta - y \sin \Delta}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \\ \frac{dy}{d\tau_1} &= -y - \zeta x + \frac{x \sin \Delta + y \cos \Delta}{\sqrt{x^2 + y^2}}. \end{aligned} \quad (5.31)$$

Так как решение уравнения (5.30) мы искали в виде $\varphi = a \cos \tau + b \sin \tau$, то особая точка на плоскости xy соответствует предельному циклу для исходной динамической системы. Предельные циклы на плоскости xy соответствуют для исходной системы режимам биений. Для удобства исследования системы (5.31) перейдем к полярным координатам

$$x = \rho \cos \vartheta, \quad y = \rho \sin \vartheta.$$

Вычисляя производные

$$\frac{dx}{d\tau_1} = \frac{d\rho}{d\tau_1} \cos \vartheta - \rho \sin \vartheta \frac{d\vartheta}{d\tau_1},$$

$$\frac{dy}{d\tau_1} = \frac{d\rho}{d\tau_1} \sin \vartheta + \rho \cos \vartheta \frac{d\vartheta}{d\tau_1},$$

и подставляя их в уравнения (5.31), получим

$$\frac{d\rho}{d\tau_1} \cos \vartheta - \rho \sin \vartheta \frac{d\vartheta}{d\tau_1} =$$

$$= -\rho \cos \vartheta + \zeta \rho \sin \vartheta - A + \cos \vartheta \cos \Delta - \sin \vartheta \sin \Delta,$$

$$\frac{d\rho}{d\tau_1} \sin \vartheta + \rho \cos \vartheta \frac{d\vartheta}{d\tau_1} =$$

$$= -\rho \sin \vartheta - \zeta \rho \cos \vartheta + \cos \vartheta \sin \Delta + \sin \vartheta \cos \Delta,$$

откуда

$$\frac{d\rho}{d\tau_1} = -\rho - A \cos \vartheta + \cos \Delta = P(\rho, \vartheta), \quad (5.32)$$

$$\rho \frac{d\vartheta}{d\tau_1} = -\zeta \rho + A \sin \vartheta + \sin \Delta = \rho Q(\rho, \vartheta).$$

Особые точки (состояния равновесия) этой системы находятся из уравнений

$$-\rho - A \cos \vartheta + \cos \Delta = 0,$$

$$-\zeta \rho + A \sin \vartheta + \sin \Delta = 0.$$

Исключая из этих уравнений ϑ , получим уравнение для ρ , соответствующих особым точкам

$$\rho^2(1 + \zeta^2) - 2\rho(\cos \Delta + \zeta \sin \Delta) + 1 = A^2. \quad (5.33)$$

Кривая (5.33) называется резонансной кривой. Характеристическое уравнение для уравнений первого приближения системы уравнений (5.32) имеет вид (§ 4 гл. 1)

$$s^2 + ps + q = 0,$$

где

$$p = -[P'_\rho(\rho, \vartheta) + Q'_\vartheta(\rho, \vartheta)] = 2 - \frac{\cos \Delta}{\rho},$$

$$q = P'_\rho(\rho, \vartheta)Q'_\vartheta(\rho, \vartheta) - P'_\vartheta(\rho, \vartheta)Q'_\rho(\rho, \vartheta) =$$

$$= 1 + \zeta^2 - \frac{1}{\rho}(\cos \Delta + \zeta \sin \Delta),$$

а ρ , ϑ — корни уравнений $P(\rho, \vartheta) = 0$, $Q(\rho, \vartheta) = 0$.
Знаки величин p , q и

$$\delta = p^2 - 4q = \frac{1}{\rho^2} - \left(2\zeta - \frac{\sin \Delta}{\rho}\right)^2$$

определяют характер состояний равновесия.

При $q < 0$ состояния равновесия неустойчивы (седла). При $q > 0$, $p > 0$ состояния равновесия устойчивы, при $q > 0$, $p < 0$ состояния равновесия неустойчивы. При $\delta > 0$ состояния равновесия — узлы, при $\delta < 0$ — фокусы.

Рассмотрим плоскость $\zeta\rho$. На этой плоскости кривая $q = 0$ определяет область неустойчивых состояний равновесия (седел). При $q > 0$ линия $p = 0$ отделяет устойчивые состояния равновесия от неустойчивых. Граница между фокусами и узлами определяется уравнением $\delta = 0$, т. е.

$$\left[\frac{1}{\rho} - \left(2\zeta - \frac{\sin \Delta}{\rho}\right)\right] \left[\frac{1}{\rho} + \left(2\zeta - \frac{\sin \Delta}{\rho}\right)\right] = 0. \quad (5.34)$$

Линия $p = 0$ представляет собой прямую

$$\rho = \frac{1}{2} \cos \Delta. \quad (5.35)$$

Уравнение кривой $q = 0$ имеет вид

$$\rho = \frac{\cos \Delta + \zeta \sin \Delta}{1 + \zeta^2}. \quad (5.36)$$

Эта кривая пересекает ось ζ при $\zeta = -\operatorname{ctg} \Delta$, при $\zeta \rightarrow \infty$ $\rho \rightarrow 0$. При $\zeta = \operatorname{tg} \frac{\Delta}{2}$ $\rho_{\max} = \cos^2 \frac{\Delta}{2}$. Кривая $q = 0$ пересекает прямую $p = 0$ при

$$\zeta = \frac{1 + \sin \Delta}{\cos \Delta}, \quad \zeta = -\frac{1 - \sin \Delta}{\cos \Delta}.$$

Кривая $\delta = 0$ пересекает линию $p = 0$ в точках ее пересечения с линией $q = 0$. На рис. 5.7 и 5.8 показаны диаграммы характера особых точек, построенные на плоскости $\zeta\rho$ соответственно для $\Delta = 0$ и $\Delta = 0,5$.

Перейдем к построению резонансных кривых, определяемых уравнением (5.33) при различных значениях A . Из уравнения (5.33) следует

$$\rho_{12} = \frac{\cos \Delta + \zeta \sin \Delta \pm \sqrt{A^2(1 + \zeta^2) - (\sin \Delta - \zeta \cos \Delta)^2}}{1 + \zeta^2}. \quad (5.37)$$

При $A = 0$ резонансная кривая стягивается в точку с координатами $\zeta = \operatorname{tg} \Delta$, $\rho = \cos \Delta$. Из выражения (5.37)

следует, что ρ при $A > 1$ имеет одно положительное значение, а при $A < 1$ — два положительных значения. На основании соотношения (5.33) получим

$$\frac{d\rho}{d\xi} = \frac{\rho(\sin \Delta - \zeta \rho)}{\rho(1 + \zeta^2) - (\cos \Delta + \zeta \sin \Delta)},$$

т. е. резонансные кривые пересекают кривую $q = 0$, имея вертикальные касательные. Геометрическим местом горизонтальных касательных резонансных кривых является

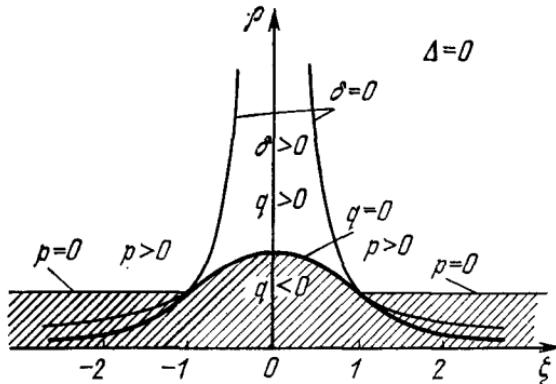


Рис. 5.7

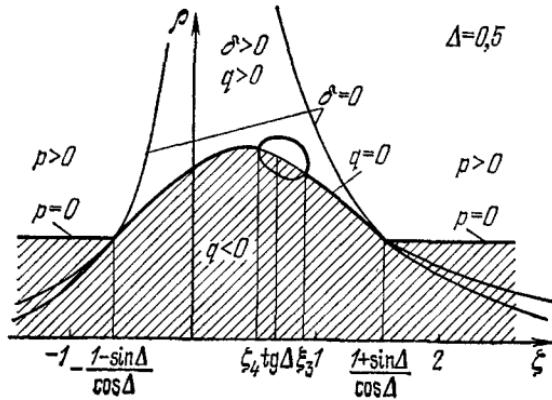


Рис. 5.8

гипербола $\zeta\rho = \sin \Delta$. Пересечение резонансных кривых с прямой $p = 0$ происходит при

$$\xi_{1,2} = \frac{2 \sin \Delta \pm \sqrt{4A^2 - \cos^2 \Delta}}{\cos \Delta}. \quad (5.38)$$

Это значит, что резонансная кривая пересекает прямую $p = 0$ только при $A > \frac{\cos \Delta}{2}$.

Резонансные кривые пересекают кривую $q = 0$ при

$$\zeta_{3,4} = \frac{\cos \Delta \sin \Delta \pm \sqrt{A^2(1 - A^2)}}{\cos \Delta}, \quad (5.39)$$

т. е. резонансная кривая пересекает кривую $q = 0$ только при $A^2 < 1$. Через точку пересечения кривой $q = 0$ и прямой $p = 0$ с координатами $\rho = \frac{\cos \Delta}{2}$, $\zeta = \frac{1 + \sin \Delta}{\cos \Delta}$ проходит резонансная кривая, для которой $A_1^2 = \frac{1}{2}(1 - \sin \Delta)$, а через точку с координатами $\rho = \frac{\cos \Delta}{2}$, $\zeta = -\frac{1 - \sin \Delta}{\cos \Delta}$ — резонансная кривая, для которой $A_2^2 = \frac{1}{2}(1 + \sin \Delta)$. На рис. 5.9 и 5.10 построены в плоскости ξ - ρ резонансные кривые при различных фиксированных A соответственно для $\Delta = 0$ и $\Delta = 0,5$.

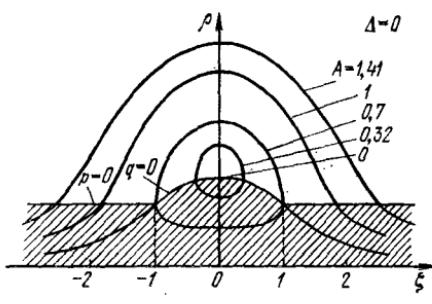


Рис. 5.9

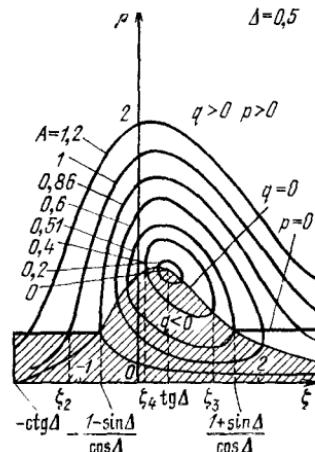


Рис. 5.10

Из рассмотрения этих рисунков следует, что при $\Delta = 0$ резонансные кривые симметричны относительно оси ρ . При $\Delta \neq 0$ эта симметрия нарушается, т. е. запаздывание вызывает сдвиг резонансных кривых. Как видно из рис. 5.10, при $A^2 > A_1^2$ часть резонансной кривой, соответствующая устойчивым состояниям равновесия и, следова-

тельно, периодическим колебаниям с частотой внешней силы, расположена над кривой $q = 0$ и прямой $p = 0$. Следовательно, захватывание имеет место для ζ , удовлетворяющих неравенству

$$\frac{2 \sin \Delta - \sqrt{4A^2 - \cos^2 \Delta}}{\cos \Delta} < \zeta < \frac{2 \sin \Delta + \sqrt{4A^2 - \cos^2 \Delta}}{\cos \Delta}.$$

При $A_1^2 < A^2 < A_2^2$ захватывание имеет место для

$$\frac{\cos \Delta \sin \Delta - \sqrt{A^2(1 - A^2)}}{\cos^2 \Delta - A^2} < \zeta < \frac{2 \sin \Delta + \sqrt{4A^2 - \cos^2 \Delta}}{\cos \Delta}.$$

Наконец, при $0 < A^2 < A_1^2$ захватывание произойдет при

$$\frac{\cos \Delta \sin \Delta - \sqrt{A^2(1 - A^2)}}{\cos^2 \Delta - A^2} < \zeta < \frac{\cos \Delta \sin \Delta + \sqrt{A^2(1 - A^2)}}{\cos^2 \Delta - A^2}.$$

Перейдем теперь к выяснению механизма захватывания. Ограничимся рассмотрением случая слабых сигналов ($A < (\cos \Delta)/2$).

Из первого уравнения системы (5.32) следует, что при достаточно больших ρ производная $d\rho/d\tau_1 < 0$, т. е. бесконечность неустойчива.

Особые точки системы на плоскости xy в соответствии с уравнениями (5.32) определяются пересечением кривых

$$\begin{aligned} -\rho^2 - Ax + \rho \cos \Delta &= 0, \\ -\zeta \rho^2 + Ay + \rho \sin \Delta &= 0. \end{aligned}$$

Так как $x = \rho \cos \vartheta$, $y = \rho \sin \vartheta$, то уравнение первой кривой, не зависящее от ζ , имеет вид

$$\rho = \cos \Delta - A \cos \vartheta. \quad (5.40)$$

Уравнение второй кривой

$$\rho = \frac{\sin \Delta}{\zeta} + \frac{A}{\zeta} \sin \vartheta. \quad (5.41)$$

На рис. 5.11 даны кривые (5.40) и (5.41) для $A = 0,2$ и различных ζ . В соответствии с рис. 5.12, построенным для тех же значений A и Δ , можно сказать, что при $\zeta = \operatorname{tg} \Delta$ имеются три особые точки: одна — устойчивый узел, вторая — седло и третья ($x = 0$, $y = 0$) — существенно особая точка.

При $\operatorname{tg} \Delta < \zeta < \zeta_3$ и $\zeta_4 < \zeta < \operatorname{tg} \Delta$ имеются также три особые точки. При $\zeta = \zeta_3$ и $\zeta = \zeta_4$ устойчивый узел

и седло сливаются в одно состояние равновесия. Точка $x = 0, y = 0$ остается.

При $\zeta > \zeta_3$ и $\zeta < \zeta_4$ имеется только одна особая точка $x = 0, y = 0$. Для выяснения характера этой особой точки рассмотрим первое уравнение системы (5.32)

$$\frac{d\rho}{dt_1} = -\rho - A \cos \vartheta + \cos \Delta.$$

Если $A < \cos \Delta$, то можно подобрать такое ρ_1 , при котором

$$\rho_1 < \cos \Delta - A \cos \vartheta;$$

тогда для всех $\rho < \rho_1$ будет $d\rho_1/dt_1 > 0$. Это означает, что окружности $\rho = c$ ($c < \rho_1$) образуют вокруг точки $x = 0, y = 0$ систему циклов без соприкосновений, т. е. систему

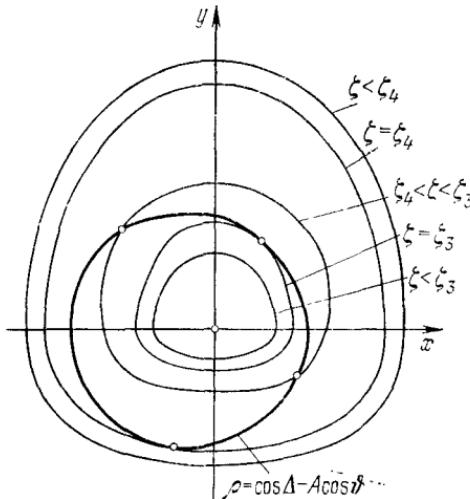


Рис. 5.11

замкнутых кривых, в каждой точке которых вектор фазовой скорости направлен наружу. Следовательно, из точки $x = 0, y = 0$ все траектории выходят при возрастании t_1 . Так как это происходит при $A < \cos \Delta$ и любых ζ , то можно утверждать, что характер точки $x = 0, y = 0$ не меняется при слиянии двух других особых точек.

Для доказательства существования и единственности предельного цикла на плоскости xy , а также для установ-

ления границ его расположения воспользуемся методом кривой контактов и теоремой Пуанкаре — Дюлака.

Вначале кратко изложим сущность метода кривой контактов [4]. Пусть дано семейство замкнутых непересекающихся кривых, сплошь заполняющих плоскость

$$F(x, y) = C. \quad (5.42)$$

Назовем эту систему кривых топографической системой. Назовем кривой контактов кривую, являющуюся геометрическим местом точек соприкосновения кривых топографической системы с интегральными кривыми. Выберем топографическую систему таким образом, чтобы кривая контактов была замкнутой; проведем наибольшую и наименьшую

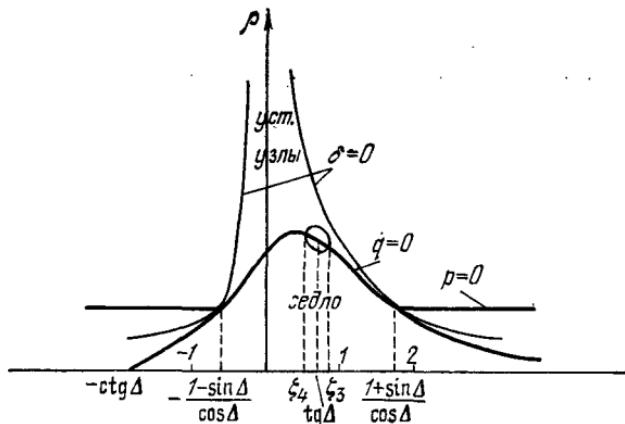


Рис. 5.12

кривые топографической системы, касающиеся кривой контактов. Очевидно, что все кривые топографической системы, лежащие вне такой наибольшей кривой и внутри наименьшей кривой, будут циклами без соприкосновений. Таким образом, если предельные циклы существуют, то они расположены в кольцеобразной области, ограниченной двумя выбранными кривыми топографической системы. Достаточным условием существования по крайней мере одного цикла будет условие, чтобы вектор фазовой скорости на выбранных кривых топографической системы был направлен или везде наружу, или везде внутрь соответствующей кольцеобразной области.

Пусть динамическая система описывается уравнениями

$$\frac{dx}{dt} = P(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = Q(x, y).$$

В силу уравнения (5.42) имеем

$$\frac{\partial F}{\partial x} \frac{dx}{dy} + \frac{\partial F}{\partial y} = 0$$

и, следовательно, уравнение кривой контактов будет иметь вид

$$\frac{P}{Q} = - \frac{\partial F / \partial y}{\partial F / \partial x}.$$

Если топографическая система представляет собой семейство окружностей $x^2 + y^2 = c$, то уравнение кривой контактов будет

$$\frac{P}{Q} = - \frac{y}{x}.$$

Для рассматриваемой нами задачи в качестве топографической системы возьмем семейство окружностей

$$x^2 + y^2 = R^2.$$

Кривая контактов в соответствии с уравнениями (5.31) будет определяться уравнением

$$-\frac{x}{y} = \frac{-y - \zeta x + (x \sin \Delta + y \cos \Delta) / \sqrt{x^2 + y^2}}{-x + \zeta y - A + (x \cos \Delta - y \sin \Delta) / \sqrt{x^2 + y^2}}$$

или

$$x^2 + y^2 + Ax - \sqrt{x^2 + y^2} \cos \Delta = 0.$$

В полярных координатах это уравнение имеет вид

$$\rho = \cos \Delta - A \cos \vartheta.$$

Таким образом, радиусы крайних кругов топографической системы, касающихся кривой контактов, равны

$$R_1 = \cos \Delta - A, \quad R_2 = \cos \Delta + A.$$

Следовательно, если предельные циклы существуют, то они лежат внутри кольцеобразной области, образуемой окружностями радиусов R_1 и R_2 . Докажем с помощью теоремы Пуанкаре — Дюлака, что в рассматриваемом случае в кольцевой области между крайними кругами топографической системы при $\zeta > \zeta_3$ и $\zeta < \zeta_4$ имеется самое большое один устойчивый предельный цикл.

Теорему Пуанкаре — Дюлака можно сформулировать следующим образом. Пусть дана система

$$\frac{dx}{dt} = P(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = Q(x, y),$$

где $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ предполагаются однозначными и имеющими производные, и пусть $F(x, y)$ — некоторая однозначная и дифференцируемая функция. Тогда, если

$$B(x, y) = \frac{\partial}{\partial x}(PF) + \frac{\partial}{\partial y}(QF)$$

не меняет знака в некоторой кольцевой области D , то имеется самое большое один предельный цикл внутри D . В нашем случае функция

$$B(x, y) = \frac{\partial}{\partial x}(PF) + \frac{\partial}{\partial y}(QF) = \frac{1}{\rho} \cos \Delta - 2$$

(где выбрано $F = 1$) внутри кольца между крайними кругами топографической системы при $A < (\cos \Delta)/2$ знака не меняет, так как кривая $(\cos \Delta)/\rho - 2 = 0$ в этом случае лежит внутри меньшего круга топографической системы

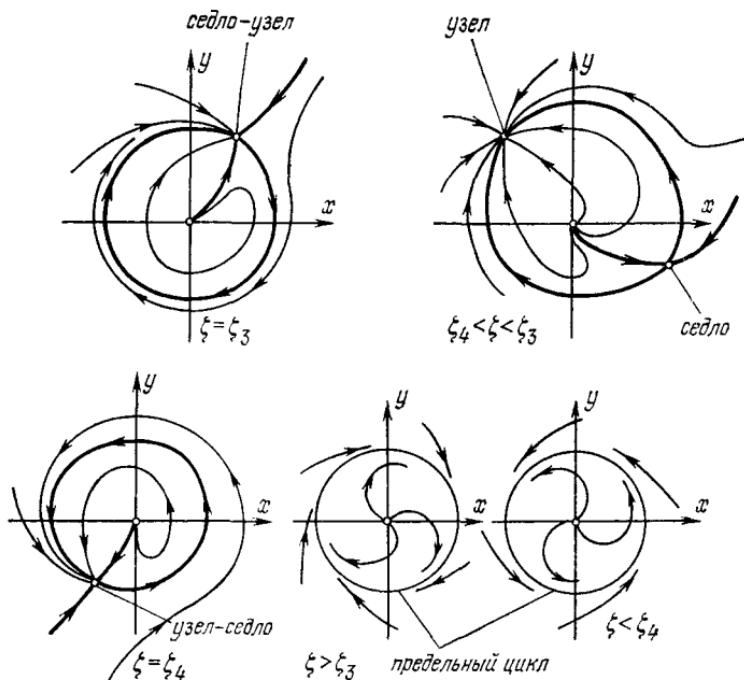


Рис. 5.13

и, следовательно, между крайними кругами топографической системы при $\xi > \xi_3$ и $\xi < \xi_4$ имеется один предельный цикл.

При

$$\frac{\cos \Delta}{2} < A < \sqrt{\frac{1 - \sin \Delta}{2}}$$

также будет существовать предельный цикл, так как все траектории выходят из точки $x = 0, y = 0$, бесконечность неустойчива и при $\zeta > \zeta_3$ и $\zeta < \zeta_4$ особых точек, кроме $x = 0, y = 0$, нет. На рис. 5.13 показаны качественные картины плоскости xy при различных значениях ζ для $A < (\cos \Delta)/2$.

В заключение отметим, что, как видно из рассмотрения рис. 5.9 и 5.10, запаздывание Δ делает полосу захватывания не симметричной по отношению к расстройке ζ .

Рассмотрим теперь задачу о действии внешней синусоидальной силы на нелинейную неавтоколебательную систему.

Пусть тело массы m совершает движение по горизонтальной направляющей под действием силы пружины и внешней синусоидальной силы $A' \sin pt$. Пренебрегая силой сухого трения, уравнение движения тела можно написать в виде

$$m\ddot{x} + \gamma'\dot{x} + \varphi(x) = A' \sin pt,$$

где γ' — коэффициент вязкого трения; $\varphi(x)$ — функция, определяющая восстанавливающую силу пружины. Рассмотрим случай, когда $\varphi(x)$ может быть представлена в виде

$$\varphi(x) = cx - \beta'x^3 \quad (c > 0, \beta' > 0).$$

Уравнение движения в этом случае примет вид

$$m\ddot{x} + \gamma'\dot{x} + cx - \beta'x^3 = A' \sin pt.$$

Вводя новую безразмерную переменную $q = x/l$, где l — постоянная величина, имеющая размерность длины, и $\tau = pt$, получим

$$\frac{d^2q}{d\tau^2} + \frac{k^2}{p^2}q = -\frac{\gamma'}{mp}\frac{dq}{d\tau} + \frac{\beta'l^2}{mp^2}q^3 + \frac{A'}{mp^2l} \sin \tau.$$

Предположим, что рассматриваемая система близка к линейной консервативной, т. е. предположим, что безразмерные величины

$$\frac{\gamma'}{mp} \ll 1, \quad \frac{\beta'l^2}{mp^2} \ll 1, \quad \frac{A'}{mp^2l} \ll 1.$$

Будем также предполагать, что система близка к резонансу, т. е. $|k^2 - p^2|/p^2 \ll 1$. Тогда, вводя безразмерный малый

параметр $\mu = \frac{\gamma'}{m_p}$ и расстройку ζ при помощи соотношения

$$\frac{k^2}{p^2} = 1 + \mu \zeta,$$

получим окончательный вид уравнения движения

$$\frac{d^2q}{d\tau^2} + q = \mu \left(-\zeta q - \frac{dq}{d\tau} + \beta_0 q^3 + A_0 \sin \tau \right),$$

где

$$\beta_0 = \frac{\beta' l^2}{\gamma' p}, \quad A_0 = \frac{A'}{\gamma' pl}.$$

Если искать решение этого уравнения в виде

$$q = a \cos \tau + b \sin \tau, \quad (5.43)$$

где a и b — медленно меняющиеся функции времени, то согласно выражениям (5.29) получим

$$\frac{da}{d\tau_1} = -A_0 - a + \zeta b - \frac{3}{4} \beta_0 b (a^2 + b^2),$$

$$\frac{db}{d\tau_1} = -b - \zeta a + \frac{3}{4} \beta_0 a (a^2 + b^2),$$

где $\tau_1 = \frac{2}{\mu} \tau$. Вводя $x = a \sqrt{\frac{3}{4} \beta_0}$, $y = b \sqrt{\frac{3}{4} \beta_0}$ и $A = A_0 \sqrt{\frac{3}{4} \beta_0}$, можем написать

$$\frac{dx}{d\tau_1} = -A - x + \zeta y - y(x^2 + y^2),$$

$$\frac{dy}{d\tau_1} = -y - \zeta x + x(x^2 + y^2).$$

Перейдем к полярным координатам. Так как

$$x = \rho \cos \vartheta, \quad y = \rho \sin \vartheta,$$

то

$$\begin{aligned} \frac{d\rho}{d\tau_1} &= -A \cos \vartheta - \rho = P(\rho, \vartheta), \\ \rho \frac{d\vartheta}{d\tau_1} &= A \sin \vartheta - \zeta \rho + \rho^3 = \rho Q(\rho, \vartheta). \end{aligned} \quad (5.44)$$

Особые точки этой системы уравнений (состояния равновесия), согласно выражению (5.43), соответствуют периодическому движению с частотой внешней силы. Уравнения

для определения особых точек будут

$$\begin{aligned} A \cos \vartheta + \rho &= 0, \\ A \sin \vartheta - \zeta \rho + \rho^3 &= 0. \end{aligned}$$

Исключая из этих уравнений ϑ , получаем уравнение резонансной кривой

$$\rho^2 [1 + (\rho^2 - \zeta)^2] = A^2. \quad (5.45)$$

Определенные этим уравнением ρ^2 соответствуют состояниям равновесия системы (5.44). Величины, определяющие характер состояния равновесия, определяются формулами (§ 4 гл. 1)

$$\begin{aligned} p &= -(P'_\rho + Q'_\vartheta) = 2 > 0, \\ q &= P'_\rho Q'_\vartheta - P'_\vartheta Q'_\rho = 1 + 3\rho^4 - 4\rho^2\zeta + \zeta^2. \end{aligned}$$

Так как $p > 0$, то состояния равновесия будут устойчивы при $q > 0$ и неустойчивы при $q < 0$.

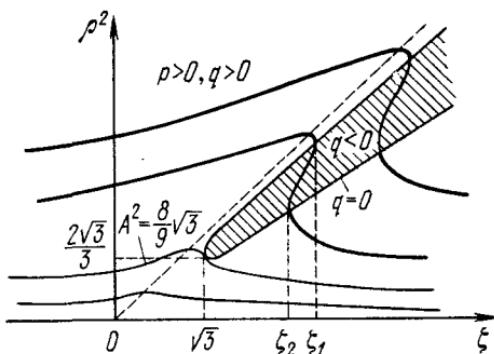


Рис. 5.14

Перейдем к построению на плоскости (ζ, ρ^2) резонансных кривых при фиксированных A . В соответствии с (5.45) получим

$$\frac{d\rho^2}{d\zeta} = \frac{2\rho^2(\rho^2 - \zeta)}{1 + 3\rho^4 - 4\rho^2\zeta + \zeta^2}.$$

Это значит, что резонансные кривые пересекают прямую $\rho^2 = \zeta$, имея горизонтальную касательную. Кривую же $q = 0$ резонансные кривые пересекают, имея вертикальную касательную. На рис. 5.14 показаны расположения кривой $q = 0$ и резонансных кривых для различных A . Из рас-

смотриения этого рисунка следует, что при $A^2 < \frac{8}{9} \sqrt{3}$ и любых значениях расстройки резонансная кривая соответствует устойчивым состояниям равновесия и, следовательно, исходная динамическая система совершает движение с частотой внешней силы при любом ζ . При $A^2 > \frac{8}{9} \sqrt{3}$ часть резонансной кривой расположена внутри области $q < 0$, т. е. соответствует неустойчивому состоянию равновесия системы (5.44); части резонансной кривой, расположенные вне области $q < 0$, соответствуют устойчивому состоянию равновесия.

Таким образом, при изменении ζ от отрицательных значений до $\zeta = \zeta_1$ система совершает периодическое движение с частотой внешней силы и амплитудой, соответствующей верхней части резонансной кривой. При $\zeta = \zeta_1$ происходит скачкообразное изменение амплитуды, и система при дальнейшем увеличении ζ совершает движение с амплитудой, соответствующей нижней части резонансной кривой. При обратном изменении ζ скачкообразное изменение происходит уже при $\zeta = \zeta_2$, и при дальнейшем уменьшении ζ движение происходит с амплитудой, соответствующей верхней части резонансной кривой.

Итак, при $\zeta < \zeta_2$ и $\zeta > \zeta_1$ в исходной динамической системе при любых начальных условиях устанавливают периодические движения с частотой внешней силы и соответственно с амплитудой, соответствующей верхней части и нижней части резонансной кривой. При $\zeta_2 < \zeta < \zeta_1$ в системе в зависимости от начальных условий устанавливаются периодические движения с амплитудами, соответствующими нижней или верхней части резонансной кривой.

§ 3. Автономные динамические системы с двумя степенями свободы [13]

Рассмотрим сначала автономную динамическую систему, не содержащую гироскопических сил. Уравнения движения такой системы имеют вид

$$a_{11}\ddot{q}_1 + a_{12}\ddot{q}_2 + c_{11}q_1 + c_{12}q_2 = \mu f_1(q_1, \dot{q}_1, q_2, \dot{q}_2),$$

$$a_{21}\ddot{q}_1 + a_{22}\ddot{q}_2 + c_{21}q_1 + c_{22}q_2 = \mu g_1(q_1, \dot{q}_1, q_2, \dot{q}_2),$$

где a_{ik} и c_{ik} ($i, k = 1, 2$) — постоянные коэффициенты, μ — малый параметр, f_1 и g_1 — нелинейные функции.