

смотриения этого рисунка следует, что при  $A^2 < \frac{8}{9} \sqrt{3}$  и любых значениях расстройки резонансная кривая соответствует устойчивым состояниям равновесия и, следовательно, исходная динамическая система совершает движение с частотой внешней силы при любом  $\zeta$ . При  $A^2 > \frac{8}{9} \sqrt{3}$  часть резонансной кривой расположена внутри области  $q < 0$ , т. е. соответствует неустойчивому состоянию равновесия системы (5.44); части резонансной кривой, расположенные вне области  $q < 0$ , соответствуют устойчивому состоянию равновесия.

Таким образом, при изменении  $\zeta$  от отрицательных значений до  $\zeta = \zeta_1$  система совершает периодическое движение с частотой внешней силы и амплитудой, соответствующей верхней части резонансной кривой. При  $\zeta = \zeta_1$  происходит скачкообразное изменение амплитуды, и система при дальнейшем увеличении  $\zeta$  совершает движение с амплитудой, соответствующей нижней части резонансной кривой. При обратном изменении  $\zeta$  скачкообразное изменение происходит уже при  $\zeta = \zeta_2$ , и при дальнейшем уменьшении  $\zeta$  движение происходит с амплитудой, соответствующей верхней части резонансной кривой.

Итак, при  $\zeta < \zeta_2$  и  $\zeta > \zeta_1$  в исходной динамической системе при любых начальных условиях устанавливают периодические движения с частотой внешней силы и соответственно с амплитудой, соответствующей верхней части и нижней части резонансной кривой. При  $\zeta_2 < \zeta < \zeta_1$  в системе в зависимости от начальных условий устанавливаются периодические движения с амплитудами, соответствующими нижней или верхней части резонансной кривой.

### § 3. Автономные динамические системы с двумя степенями свободы [13]

Рассмотрим сначала автономную динамическую систему, не содержащую гироскопических сил. Уравнения движения такой системы имеют вид

$$a_{11}\ddot{q}_1 + a_{12}\ddot{q}_2 + c_{11}q_1 + c_{12}q_2 = \mu f_1(q_1, \dot{q}_1, q_2, \dot{q}_2),$$

$$a_{21}\ddot{q}_1 + a_{22}\ddot{q}_2 + c_{21}q_1 + c_{22}q_2 = \mu g_1(q_1, \dot{q}_1, q_2, \dot{q}_2),$$

где  $a_{ik}$  и  $c_{ik}$  ( $i, k = 1, 2$ ) — постоянные коэффициенты,  $\mu$  — малый параметр,  $f_1$  и  $g_1$  — нелинейные функции.

Введя обозначения

$$A_1 = \frac{c_{12}}{a_{11}}, \quad B_1 = \frac{c_{12}}{a_{11}}, \quad n_1^2 = \frac{c_{11}}{a_{11}}, \quad A_2 = \frac{a_{12}}{a_{22}},$$

$$B_2 = \frac{c_{12}}{a_{22}}, \quad n_2^2 = \frac{c_{22}}{a_{22}}, \quad f = \frac{f_1}{a_{11}}, \quad g = \frac{g_1}{a_{22}},$$

перепишем уравнения движения в виде

$$\ddot{q}_1 + A_1 \ddot{q}_2 + B_1 q_2 + n_1^2 q_1 = \mu f (q_1, \dot{q}_1, q_2, \dot{q}_2), \quad (5.46)$$

$$\ddot{q}_2 + A_2 \ddot{q}_1 + B_2 q_1 + n_2^2 q_2 = \mu g (q_1, \dot{q}_1, q_2, \dot{q}_2).$$

При  $\mu = 0$  система уравнений (5.46) имеет решение

$$q_1 = a \sin (k_1 t + \beta_1) + b \sin (k_2 t + \beta_2), \quad (5.47)$$

$$q_2 = \alpha_1 a \sin (k_1 t + \beta_1) + \alpha_2 b \sin (k_2 t + \beta_2),$$

где  $a, b, \beta_1, \beta_2$  — постоянные интегрирования,  $k_1$  и  $k_2$  ( $k_2 > k_1$ ) — главные частоты, являющиеся корнями уравнения

$$\sigma k^4 - (n_1^2 + n_2^2 - A_1 B_2 - A_2 B_1) k^2 + n_1^2 n_2^2 - B_1 B_2 = 0 \quad (5.48)$$

( $\sigma = 1 - A_1 A_2$ ), а  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  — коэффициенты распределения, определяемые по формулам

$$\alpha_1 = \frac{A_2 k_1^2 - B_2}{n_2^2 - k_1^2} = \frac{n_1^2 - k_1^2}{A_1 k_1^2 - B_1}, \quad (5.49)$$

$$\alpha_2 = \frac{A_2 k_2^2 - B_2}{n_2^2 - k_2^2} = \frac{n_1^2 - k_2^2}{A_1 k_2^2 - B_1}.$$

Будем предполагать, что корни уравнения (5.48) некратные и ни один из них не равен нулю. Решение системы уравнений (5.46) при  $\mu \neq 0$  будем искать в форме (5.47), считая, что  $a, b, \beta_1$  и  $\beta_2$  — медленно меняющиеся функции времени. Дополнительные условия, которые мы наложим на функции  $a, b, \beta_1$  и  $\beta_2$  для их определенности, заключаются в предположении, что первые производные от  $q_1$  и  $q_2$  по времени имеют такой же вид, как и при  $a, b, \beta_1$  и  $\beta_2$  постоянных. Принимая это во внимание после дифференцирования  $q_1$  и  $q_2$ , получим

$$\dot{q}_1 = a k_1 \cos (k_1 t + \beta_1) + b k_2 \cos (k_2 t + \beta_2), \quad (5.50)$$

$$\dot{q}_2 = \alpha_1 a k_1 \cos (k_1 t + \beta_1) + \alpha_2 b k_2 \cos (k_2 t + \beta_2)$$

и

$$\dot{a} \sin(k_1 t + \beta_1) + \dot{b} \sin(k_2 t + \beta_2) + a\dot{\beta}_1 \cos(k_1 t + \beta_1) + b\dot{\beta}_2 \cos(k_2 t + \beta_2) = 0, \quad (5.51)$$

$$\alpha_1 \dot{a} \sin(k_1 t + \beta_1) + \alpha_2 \dot{b} \sin(k_2 t + \beta_2) + \alpha_1 a \dot{\beta}_1 \cos(k_1 t + \beta_1) + \alpha_2 b \dot{\beta}_2 \cos(k_2 t + \beta_2) = 0. \quad (5.52)$$

Если теперь продифференцировать по времени  $\dot{q}_1$  и  $\dot{q}_2$  и подставить полученные выражения для  $\ddot{q}_1$  и  $\ddot{q}_2$  в уравнение (5.46), приняв при этом во внимание соотношения (5.49), то будем иметь

$$\begin{aligned} \dot{a}k_1(1 + \alpha_1 A_1) \cos(k_1 t + \beta_1) + \dot{b}k_2(1 + \alpha_2 A_1) \cos(k_2 t + \beta_2) - \\ - k_1 a \dot{\beta}_1 (1 + \alpha_1 A_1) \sin(k_1 t + \beta_1) - \\ - k_2 b \dot{\beta}_2 (1 + \alpha_2 A_1) \sin(k_2 t + \beta_2) = \mu f^*, \end{aligned} \quad (5.53)$$

$$\begin{aligned} \dot{a}k_1(\alpha_1 + A_2) \cos(k_1 t + \beta_1) + \\ + \dot{b}k_2(\alpha_2 + A_2) \cos(k_2 t + \beta_2) - k_1 a \dot{\beta}_1 (\alpha_1 + A_2) \sin(k_1 t + \beta_1) - \\ - k_2 b \dot{\beta}_2 (\alpha_2 + A_2) \sin(k_2 t + \beta_2) = \mu g^*, \end{aligned} \quad (5.54)$$

где

$$\begin{aligned} f^* = f [a \sin(k_1 t + \beta_1) + b \sin(k_2 t + \beta_2), \\ ak_1 \cos(k_1 t + \beta_1) + bk_2 \cos(k_2 t + \beta_2), \\ \alpha_1 a \sin(k_1 t + \beta_1) + \alpha_2 b \sin(k_2 t + \beta_2), \\ \alpha_1 k_1 a \cos(k_1 t + \beta_1) + \alpha_2 k_2 b \cos(k_2 t + \beta_2)], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g^* = g [a \sin(k_1 t + \beta_1) + b \sin(k_2 t + \beta_2), \\ ak_1 \cos(k_1 t + \beta_1) + bk_2 \cos(k_2 t + \beta_2), \\ \alpha_1 a \sin(k_1 t + \beta_1) + \alpha_2 b \sin(k_2 t + \beta_2), \\ \alpha_1 k_1 a \cos(k_1 t + \beta_1) + \alpha_2 k_2 b \cos(k_2 t + \beta_2)]. \end{aligned} \quad (5.55)$$

Уравнения (5.51)–(5.54) являются системой уравнений для определения  $\dot{a}$ ,  $\dot{b}$ ,  $a\dot{\beta}_1$  и  $b\dot{\beta}_2$ . Решая эти уравнения относительно  $\dot{a}$ , найдем

$$\frac{da}{dt} = \frac{\Delta_1}{\Delta},$$

где определитель системы

$$\begin{aligned} \Delta = & \begin{vmatrix} \sin \xi & \sin \eta & \cos \xi & \cos \eta \\ \alpha_1 \sin \xi & \alpha_2 \sin \eta & \alpha_1 \cos \xi & \alpha_2 \cos \eta \\ k_1 D_1 \cos \xi & k_2 D_2 \cos \eta & -k_1 D_1 \sin \xi & -k_2 D_2 \sin \eta \\ k_1 D_3 \cos \xi & k_2 D_4 \cos \eta & -k_1 D_3 \sin \xi & -k_2 D_4 \sin \eta \end{vmatrix} = \\ & = k_1 k_2 \sigma (\alpha_2 - \alpha_1)^2, \end{aligned}$$

$$D_1 = 1 + \alpha_1 A_1, \quad D_2 = 1 + \alpha_2 A_2, \quad D_3 = \alpha_1 + A_2, \\ D_4 = \alpha_2 + A_2, \quad \xi = k_1 t + \beta_1, \quad \eta = k_2 t + \beta_2;$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & \sin \eta & \cos \xi & \cos \eta \\ 0 & \alpha_2 \sin \eta & \alpha_1 \cos \xi & \alpha_2 \cos \eta \\ \mu f^* & k_2 D_2 \cos \eta & -k_1 D_1 \sin \xi & -k_2 D_2 \sin \eta \\ \mu g^* & k_2 D_4 \cos \eta & -k_1 D_3 \sin \xi & -k_2 D_4 \sin \eta \end{vmatrix} = \\ = \mu (\alpha_2 - \alpha_1) k_2 [(\alpha_2 + A_2) f^* - (1 + \alpha_2 A_1) g^*] \cos \xi.$$

Следовательно,

$$\frac{da}{dt} = \frac{\mu}{k_1 \sigma (\alpha_2 - \alpha_1)} [(\alpha_2 + A_2) f^* - (1 + \alpha_2 A_1) g^*] \cos \xi. \quad (5.56)$$

Используя выражения (5.49), получаем

$$\alpha_2 - \alpha_1 = \frac{(k_2^2 - k_1^2)(A_2 n_2^2 - B_2)}{(n_2^2 - k_1^2)(n_2^2 - k_2^2)},$$

$$\alpha_2 + A_2 = \frac{A_2 n_2^2 - B_2}{n_2^2 - k_2^2}, \quad 1 + \alpha_2 A_1 = \frac{n_2^2 - A_1 B_1 - \sigma k_2^2}{n_2^2 - k_2^2}.$$

Из выражения (5.48) следует, что

$$\sigma (k_1^2 + k_2^2) = n_1^2 + n_2^2 - A_1 B_2 - A_2 B_1;$$

тогда

$$1 + \alpha_2 A_1 = - \frac{n_1^2 - k_1^2}{n_2^2 - k_2^2} \left( 1 + \frac{A_2}{\alpha_1} \right) = - \frac{n_1^2 - k_1^2 A_2 k_2^2 - B_2}{n_2^2 - k_2^2 A_2 k_1^2 - B_2}.$$

Подставляя полученные выражения для  $\alpha_2 - \alpha_1$ ,  $\alpha_2 + A_2$ ,  $1 + \alpha_2 A_1$  в выражение (5.56) и учитывая (5.49), имеем

$$\frac{da}{dt} = \frac{\mu}{k_1 \sigma (k_2^2 - k_1^2)} \left[ \frac{A_2 k_1^2 - B_2}{\alpha_1} f^* + (A_1 k_2^2 - B_1) g^* \right] \cos \xi.$$

Аналогично получим

$$\frac{db}{dt} = - \frac{\mu}{k_2 \sigma (k_2^2 - k_1^2)} \left[ \frac{A_2 k_2^2 - B_2}{\alpha_2} f^* + (A_1 k_1^2 - B_1) g^* \right] \cos \eta,$$

$$a \frac{d\beta_1}{dt} = - \frac{\mu}{k_1 \sigma (k_2^2 - k_1^2)} \left[ \frac{A_2 k_1^2 - B_2}{\alpha_1} f^* + (A_1 k_2^2 - B_1) g^* \right] \sin \xi,$$

$$b \frac{d\beta_2}{dt} = \frac{\mu}{k_2 \sigma (k_2^2 - k_1^2)} \left[ \frac{A_2 k_2^2 - B_2}{\alpha_2} f^* + (A_1 k_1^2 - B_1) g^* \right] \sin \eta.$$

Полученные уравнения представляют собой преобразованную к другим переменным систему уравнений (5.46). Предположим, что изменение  $a$ ,  $b$ ,  $\beta_1$  и  $\beta_2$  происходит значительно медленнее по сравнению с колебаниями, происходящими в исходной динамической системе. Усредняя правые части полученных уравнений за периоды  $2\pi/k_1$  и  $2\pi/k_2$ , получим для определения  $a$ ,  $b$ ,  $\beta_1$  и  $\beta_2$  следующие укороченные уравнения \*):

$$\frac{da}{dt} = \frac{\mu}{2k_1\sigma(k_2^2 - k_1^2)} \left[ \frac{A_2 k_1^2 - B_2}{\alpha_1} F_1 + (A_1 k_1^2 - B_1) G_1 \right], \quad (5.57)$$

$$\frac{db}{dt} = -\frac{\mu}{2k_2\sigma(k_2^2 - k_1^2)} \left[ \frac{A_2 k_2^2 - B_2}{\alpha_2} F_2 + (A_1 k_2^2 - B_1) G_2 \right],$$

$$\frac{d\beta_1}{dt} = -\frac{\mu}{2ak_1\sigma(k_2^2 - k_1^2)} \left[ \frac{A_2 k_1^2 - B_2}{\alpha_1} F_3 + (A_1 k_1^2 - B_1) G_3 \right], \quad (5.58)$$

$$\frac{d\beta_2}{dt} = \frac{\mu}{2\sigma k_2 b (k_2^2 - k_1^2)} \left[ \frac{A_2 k_2^2 - B_2}{\alpha_2} F_4 + (A_1 k_2^2 - B_1) G_4 \right],$$

где

$$F_1 = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} f^* \cos \xi d\xi d\eta, \quad G_1 = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} g^* \cos \xi d\xi d\eta,$$

$$F_2 = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} f^* \cos \eta d\xi d\eta, \quad G_2 = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} g^* \cos \eta d\xi d\eta,$$

$$(5.59)$$

$$F_3 = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} f^* \sin \xi d\xi d\eta, \quad G_3 = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} g^* \sin \xi d\xi d\eta,$$

$$F_4 = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} f^* \sin \eta d\xi d\eta, \quad G_4 = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} g^* \sin \eta d\xi d\eta.$$

Здесь  $\xi = k_1 t + \beta_1$ ,  $\eta = k_2 t + \beta_2$ , а  $f^*$  и  $g^*$  определяются выражениями (5.55).

Правые части уравнений (5.57) и (5.58) не зависят от  $\beta_1$  и  $\beta_2$ . Поэтому уравнения (5.57) служат для исследования  $a$  и  $b$  (амплитуд). Значения  $a$  и  $b$ , соответствующие стацио-

\*.) Прием усреднения по нескольким периодам, по-видимому, впервые применен в работах [8, 9, 7].

нарным движениям, находятся из уравнений, получаемых после приравнивания нулю правых частей уравнений (5.57). Находя из этих уравнений  $a$  и  $b$  и подставляя их в уравнения (5.58), получаем поправки на частоты в соответствующих стационарных режимах.

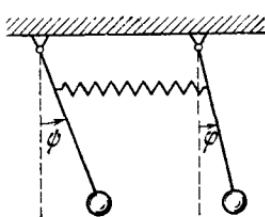


Рис. 5.15

В качестве примера рассмотрим задачу об автоколебаниях связанных маятников.

Рассмотрим схему двух связанных маятников (рис. 5.15). Пусть  $\varphi$  — угол отклонения первого маятника,  $\psi$  — угол отклонения второго маятника,  $m_1$  и  $m_2$  — массы соответственно первого и второго маятников,  $c$  — жесткость пружины,  $\gamma'$  и  $\gamma''$  — коэффициенты вязкого трения,  $l$  — длина маятников,  $a$  — расстояние до точек крепления пружины.

Уравнения движения такой системы при малых  $\varphi$  и  $\psi$  будут [14]

$$m_1 l^2 \ddot{\varphi} + m_1 g l \varphi + c a^2 \varphi - c a^2 \psi = -\gamma' l \dot{\varphi} + \bar{M}(\varphi),$$

$$m_2 l^2 \ddot{\psi} + m_2 g l \psi + c a^2 \psi - c a^2 \varphi = -\gamma'' l \dot{\psi},$$

где нелинейная функция

$$\bar{M}(\varphi) = E' \operatorname{sign} \varphi \quad (E' > 0).$$

Вводя обозначения

$$q_1 = l\varphi, \quad q_2 = l\psi, \quad n_1^2 = \frac{g}{l} + \frac{c}{m_1} \frac{a^2}{l^2}, \quad n_2^2 = \frac{g}{l} + \frac{c}{m_2} \frac{a^2}{l^2},$$

$$B_1 = -\frac{c}{m_1} \frac{a^2}{l^2}, \quad B_2 = -\frac{c}{m_2} \frac{a^2}{l^2}, \quad E = \frac{E'}{m_1 l},$$

перепишем уравнения движения в виде

$$\ddot{q}_1 + B_1 q_2 + n_1^2 q_1 = -\frac{\gamma'}{m_1 l} \dot{q}_1 + E \operatorname{sign} \dot{q}_1,$$

$$\ddot{q}_2 + B_2 q_1 + n_2^2 q_2 = -\frac{\gamma''}{m_2 l} \dot{q}_2.$$

Предположим теперь, что затухание обеих парциальных систем мало, т. е. пусть безразмерные величины

$$\frac{\gamma'}{m_1 l n_1} \ll 1, \quad \frac{\gamma''}{m_2 l n_1} \ll 1.$$

Предположим также, что возбуждающий момент «мал», т. е.

$$\frac{E}{n_1^2} \ll 1.$$

Тогда уравнения движения системы можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned}\ddot{q}_1 + B_1 q_2 + n_1^2 q_1 &= \mu n_1 (-\dot{\zeta}_1 + E_0 \operatorname{sign} \dot{\zeta}_1), \\ \ddot{q}_2 + B_2 q_1 + n_2^2 q_2 &= \mu n_1 (-\lambda \dot{\zeta}_2),\end{aligned}\quad (5.60)$$

где

$$\mu = \frac{\gamma'}{m_1 \ln n_1}, \quad E_0 = \frac{E'}{\gamma'}, \quad \lambda = \frac{m_1 \gamma''}{m_2 \gamma'}.$$

Будем считать  $\mu$  тем малым параметром, который характеризует близость системы (5.60) к линейной консервативной. Система (5.60) имеет вид (5.46), но  $A_1 = A_2 = 0$ . Следовательно, уравнение частот (5.48) примет вид

$$k^4 - (n_1^2 + n_2^2)k^2 + n_1^2 n_2^2 - B_1 B_2 = 0,$$

а коэффициенты распределения определяются по формулам

$$\alpha_1 = -\frac{B_2}{n_2^2 - k_1^2} = -\frac{n_1^2 - k_1^2}{B_1}, \quad \alpha_2 = -\frac{B_2}{n_2^2 - k_2^2} = -\frac{n_1^2 - k_2^2}{B_1}.$$

Уравнения (5.57) и (5.58) при этом будут иметь вид

$$\frac{da}{d\tau} = -\frac{1}{k_1 n_1^3} \left[ \frac{B_2}{\alpha_1} F_1 + B_1 G_1 \right], \quad (5.61)$$

$$\frac{db}{d\tau} = \frac{1}{k_2 n_1^3} \left[ \frac{B_2}{\alpha_2} F_2 + B_1 G_2 \right];$$

$$\frac{d\beta_1}{d\tau} = \frac{1}{k_1 a n_1^3} \left[ \frac{B_2}{\alpha_1} F_3 + B_1 G_3 \right], \quad (5.62)$$

$$\frac{d\beta_2}{d\tau} = -\frac{1}{k_2 b n_1^3} \left[ \frac{B_2}{\alpha_2} F_4 + B_1 G_4 \right],$$

где  $\tau = \frac{\mu n_1^3 t}{2(k_2^2 - k_1^2)}$ , а  $F_1, F_2, F_3, F_4, G_1, G_2, G_3, G_4$  определяются по формулам (5.59).

Так как в рассматриваемом случае

$$f(q_1, \dot{q}_1, q_2, \dot{q}_2) = n_1 (-\dot{q}_1 + E_0 \operatorname{sign} \dot{\zeta}_1),$$

$$g(q_1, \dot{q}_1, q_2, \dot{q}_2) = -n_1 \lambda \dot{\zeta}_2,$$

то

$$\begin{aligned} F_1 &= \frac{n_1}{2\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} [-ak_1 \cos \xi - bk_2 \cos \eta + \\ &\quad + E_0 \operatorname{sign}(ak_1 \cos \xi + bk_2 \cos \eta)] \cos \xi d\xi d\eta = \\ &= -n_1 k_1 a + \frac{n_1 E_0}{2\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{sign}(ak_1 \cos \xi + bk_2 \cos \eta) \cos \xi d\xi d\eta. \end{aligned}$$

На рис. 5.16 и 5.17 построены на плоскости  $\xi\eta$  области, где  $\dot{q}_1 = ak_1 \cos \xi + bk_2 \cos \eta$  имеет положительное и отри-

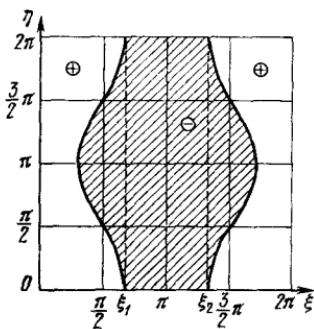


Рис. 5.16

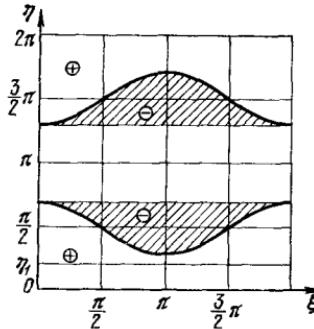


Рис. 5.17

цательные значения соответственно для  $ak_1 > bk_2$  и  $ak_1 < bk_2$ . Для случая  $ak_1 > bk_2$  имеем

$F_1 =$

$$\begin{aligned} &= -n_1 k_1 a + \frac{n_1 E_0}{2\pi^2} \int_0^{2\pi} d\eta \left[ \int_0^{\xi_1} \cos \xi d\xi - \int_{\xi_1}^{\xi_2} \cos \xi d\xi + \int_{\xi_2}^{2\pi} \cos \xi d\xi \right] = \\ &= -n_1 k_1 a + \frac{4E_0 n_1}{\pi^2} \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - \left(\frac{bk_2}{ak_1}\right)^2 \cos^2 \eta} d\eta, \quad (5.63) \end{aligned}$$

так как

$$\begin{aligned} \sin \xi_1 &= \sqrt{1 - \left(\frac{bk_2}{ak_1}\right)^2 \cos^2 \eta}, \\ \sin \xi_2 &= -\sqrt{1 - \left(\frac{bk_2}{ak_1}\right)^2 \cos^2 \eta}. \end{aligned}$$

Если  $ak_1 < bk_2$ , то

$$F_1 = -n_1 k_1 a + \frac{8E_0 n_1}{\pi^2} \int_{\pi/2}^{\pi} \sqrt{1 - \left(\frac{bk_2}{ak_1}\right)^2 \cos^2 \eta} d\eta, \quad (5.64)$$

где  $\eta_1 = \arccos \frac{ak_1}{bk_2}$ . Преобразуем интеграл

$$\Phi = \int_{\eta_1}^{\pi/2} \sqrt{1 - \left(\frac{bk_2}{ak_1}\right)^2 \cos^2 \eta} d\eta.$$

Введем замену  $\frac{bk_2}{ak_1} \cos \eta = \cos \psi$ . Тогда

$$\begin{aligned} \Phi &= \frac{ak_1}{bk_2} \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 \psi d\psi}{\sqrt{1 - \left(\frac{ak_1}{bk_2}\right)^2 \cos^2 \psi}} = \\ &= \frac{ak_1}{bk_2} \int_0^{\pi/2} \frac{d\psi}{\sqrt{1 - \left(\frac{ak_1}{bk_2}\right)^2 \cos^2 \psi}} + \frac{bk_2}{ak_1} \int_0^{\pi/2} \frac{-\left(\frac{ak_1}{bk_2}\right)^2 \cos^2 \psi d\psi}{\sqrt{1 - \left(\frac{ak_1}{bk_2}\right)^2 \cos^2 \psi}} = \\ &= \frac{ak_1}{bk_2} \int_0^{\pi/2} \frac{d\psi}{\sqrt{1 - \left(\frac{ak_1}{bk_2}\right)^2 \cos^2 \psi}} + \\ &\quad + \frac{bk_2}{ak_1} \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - \left(\frac{ak_1}{bk_2}\right)^2 \cos^2 \psi} d\psi - \\ &- \frac{bk_2}{ak_1} \int_0^{\pi/2} \frac{d\psi}{\sqrt{1 - \left(\frac{ak_1}{bk_2}\right)^2 \cos^2 \psi}} = \left[ \left( \frac{ak_1}{bk_2} \right) - \left( \frac{bk_2}{ak_1} \right) \right] \times \\ &\times \int_0^{\pi/2} \frac{d\psi}{\sqrt{1 - \left(\frac{ak_1}{bk_2}\right)^2 \cos^2 \psi}} + \frac{bk_2}{ak_1} \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - \left(\frac{ak_1}{bk_2}\right)^2 \cos^2 \psi} d\psi. \end{aligned}$$

Так как

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - \left(\frac{ak_1}{bk_2}\right)^2 \cos^2 \psi} d\psi &= \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - \left(\frac{ak_1}{bk_2}\right)^2 \sin^2 \psi} d\psi, \\ \int_0^{\pi/2} \frac{d\psi}{\sqrt{1 - \left(\frac{ak_1}{bk_2}\right)^2 \cos^2 \psi}} &= \int_0^{\pi/2} \frac{d\psi}{\sqrt{1 - \left(\frac{ak_1}{bk_2}\right)^2 \sin^2 \psi}}, \end{aligned}$$

то выражения (5.63) и (5.64) примут соответственно вид

$$\begin{aligned} F_1 &= -n_1 k_1 a + \frac{8E_0 n_1}{\pi^2} E\left(\frac{bk_2}{ak_1}\right), \\ F_1 &= -n_1 k_1 a + \frac{8E_0 n_1}{\pi^2} \left\{ \left[ \left( \frac{ak_1}{bk_2} \right) - \left( \frac{bk_2}{ak_1} \right) \right] K\left(\frac{ak_1}{bk_2}\right) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{bk_2}{ak_1} E\left(\frac{ak_1}{bk_2}\right) \right\}, \end{aligned}$$

где

$$K(m) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\psi}{\sqrt{1-m^2 \sin^2 \psi}}, \quad E(m) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-m^2 \sin^2 \psi} d\psi$$

— полные эллиптические интегралы соответственно первого и второго ряда.

Для  $G_1$  имеем

$$G_1 = -\frac{n_1 \lambda}{2\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} (\alpha_1 k_1 a \cos \xi + \alpha_2 k_2 b \cos \eta) \cos \xi d\xi d\eta = \\ = -n_1 \lambda \alpha_1 a k_1.$$

Аналогично вычисляются  $F_2$ ,  $G_2$ ,  $F_3$ ,  $F_4$ ,  $G_3$ ,  $G_4$ . Для  $ak_1 > bk_2$

$$F_2 = -n_1 k_2 b + \frac{8E_0 n_1}{\pi^2} \left\{ \left[ \left( \frac{bk_2}{ak_1} \right) - \left( \frac{ak_1}{bk_2} \right) \right] K \left( \frac{bk_2}{ak_1} \right) + \right. \\ \left. + \left( \frac{ak_1}{bk_2} \right) E \left( \frac{bk_2}{ak_1} \right) \right\}.$$

Для  $ak_1 < bk_2$

$$F_2 = -n_1 b k_2 + \frac{8E_0 n_1}{\pi^2} E \left( \frac{ak_1}{bk_2} \right), \quad G_2 = -n_1 \lambda \alpha_2 b k_2.$$

Вычисления показывают, что  $F_3 = F_4 = G_3 = G_4 = 0$ . Подставляя вычисленные значения интегралов (5.59) в уравнения (5.61) и (5.62), получим \*)

$$\left. \begin{aligned} \frac{du}{d\tau} &= A \left[ E \left( \frac{v}{u} \right) - \alpha u \right] = P_1(u, v), \\ \frac{dv}{d\tau} &= B \frac{v}{u} \left[ \left( 1 - \frac{u^2}{v^2} \right) K \left( \frac{v}{u} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{u^2}{v^2} E \left( \frac{v}{u} \right) - \beta u \right] = Q_1(u, v), \\ \frac{du}{d\tau} &= A \frac{u}{v} \left[ \left( 1 - \frac{v^2}{u^2} \right) K \left( \frac{u}{v} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{v^2}{u^2} E \left( \frac{u}{v} \right) - \alpha v \right] = P_2(u, v), \\ \frac{dv}{d\tau} &= B \left[ E \left( \frac{u}{v} \right) - \beta v \right] = Q_2(u, v), \\ \beta_1 &= \text{const}, \quad \beta_2 = \text{const}, \end{aligned} \right\}, \quad u > v, \quad (5.65)$$

\*) Достаточно изучить поведение системы при  $a > 0$ ,  $b > 0$ , так как поведение в остальных трех квадрантах получается при помощи зеркального отображения.

где

$$\begin{aligned} u &= \frac{ak_1\pi^2}{8E_0}, \quad v = \frac{bk_2\pi^2}{8E_0}, \quad A = -\frac{B_2}{n_1^2\alpha_1} > 0, \\ B &= \frac{B_2}{n_1^2\alpha_2} > 0, \quad \alpha = 1 + \lambda \frac{B_1}{B_2} \alpha_1^2, \quad \beta = 1 + \lambda \frac{B_1}{B_2} \alpha_2^2. \end{aligned} \quad (5.66)$$

Система уравнений (5.65) на плоскости  $uv$  создает непрерывное поле направлений, так как правые части этих уравнений являются непрерывными функциями  $u$ ,  $v$  и направления интегральных кривых по прямой  $u = v$ , определяемые из первой пары уравнений (5.65), совпадают с направлениями, которые получаются из второй пары. Прямые  $u = 0$  ( $v > 0$ ),  $v = 0$  ( $u > 0$ ) являются интегральными кривыми.

Рассмотрим часть плоскости  $uv$ , удовлетворяющую условию  $u > v$ . Обозначая  $v/u = \xi$  ( $0 < \xi < 1$ ), имеем для определения координат состояния равновесия уравнения:

$$E(\xi) - \alpha u = 0, \quad (5.67)$$

$$\xi \left[ \left( 1 - \frac{1}{\xi^2} \right) K(\xi) + \frac{1}{\xi^2} E(\xi) - \beta \frac{E(\xi)}{\alpha} \right] = 0. \quad (5.68)$$

Второе уравнение распадается на два:

$$\xi = 0, \quad (5.69)$$

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{E(\xi)\xi^2}{E(\xi) - (1 - \xi^2)K(\xi)}. \quad (5.70)$$

Уравнения (5.67) и (5.69) дают состояние равновесия на оси  $u$  с координатами  $v = 0$ ,  $u = E(0)/\alpha$ . Для определения корней уравнения (5.70) построим на плоскости  $y\xi^2$  кривую \*)

$$y = \frac{E(\xi)\xi^2}{E(\xi) - (1 - \xi^2)K(\xi)}.$$

Из рассмотрения рис. 5.18 следует, что при  $y = \alpha/\beta = 1$  уравнение (5.70) имеет один корень  $\xi = 1$ , при  $y = \alpha/\beta = 2$  уравнение имеет корень  $\xi = 0$ . При  $1 < \alpha/\beta <$

\*) При построении кривой использованы формулы

$$\frac{dK}{d\xi^2} = \frac{1}{2} \frac{B(\xi)}{1 - \xi^2}, \quad \frac{dE}{d\xi^2} = -\frac{1}{2} D(\xi),$$

где

$$B(\xi) = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos^2 \psi d\psi}{\sqrt{1 - \xi^2 \sin^2 \psi}}, \quad D(\xi) = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 \psi d\psi}{\sqrt{1 - \xi^2 \sin^2 \psi}}.$$

$< 2$  уравнение имеет один положительный корень  $\xi = \xi_1$ . Для остальных значений  $\alpha/\beta$  это уравнение не имеет интересующих нас корней. Зная корень  $\xi_1$ , определим координаты состояния равновесия по (5.67).

Совершенно аналогично проводится рассмотрение части плоскости, где  $v > u$ . Обозначая  $\eta = u/v$ , имеем для определения координат состояния равновесия уравнения

$$E(\eta) - \beta v = 0, \quad (5.71)$$

$$\eta \left[ \left( 1 - \frac{1}{\eta^2} \right) K(\eta) + \frac{1}{\eta^2} E(\eta) - \frac{\alpha E(\eta)}{\beta} \right] = 0. \quad (5.72)$$

Второе уравнение распадается на два:

$$\eta = 0, \quad (5.73)$$

$$\frac{\beta}{\alpha} = \frac{E(\eta)\eta^2}{E(\eta) - (1 - \eta^2)K(\eta)}. \quad (5.74)$$

Уравнения (5.71) и (5.73) дают состояние равновесия на оси  $v$  с координатами  $u = 0$ ,  $v = E(0)/\beta$ . Уравнение (5.74), для исследования которого воспользуемся

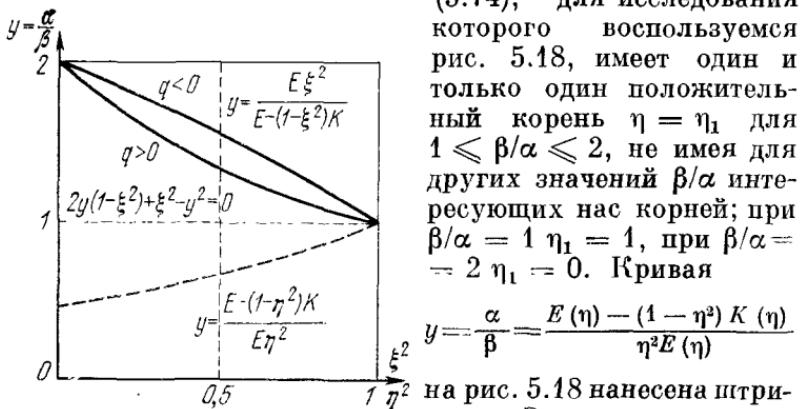


Рис. 5.18

уравнению (5.71). Таким образом, в рассматриваемом квадранте, включая оси (точку  $u = 0$ ,  $v = 0$  мы исключаем из рассмотрения), могут быть:

1) два состояния равновесия, расположенные на осях, когда  $0 < \alpha/\beta < 1/2$  и  $2 < \alpha/\beta < \infty$ ;

2) три состояния равновесия — два на осях и одно вне осей, когда  $1/2 < \alpha/\beta < 2$ . Координаты третьего состояния равновесия  $u_3$ ,  $v_3$  удовлетворяют условию  $u_3 > v_3$  для

на рис. 5.18 нанесена штрихами. Зная корень  $\eta_1$ , определим координаты состояния равновесия

1) два состояния равновесия, расположенные на осях, когда  $0 < \alpha/\beta < 1/2$  и  $2 < \alpha/\beta < \infty$ ;

2) три состояния равновесия — два на осях и одно вне осей, когда  $1/2 < \alpha/\beta < 2$ . Координаты третьего состояния равновесия  $u_3$ ,  $v_3$  удовлетворяют условию  $u_3 > v_3$  для

$1 < \alpha/\beta < 2$  и условию  $u_3 < v_3$  для  $1/2 < \alpha/\beta < 1$ . Для  $\alpha/\beta = 1$   $u_3 = v_3$ .

Перейдем к исследованию характера состояний равновесия. Как было показано в § 4 гл. 1, характер состояний равновесия для уравнений

$$\frac{du}{d\tau} = P(u, v), \quad \frac{dv}{d\tau} = Q(u, v)$$

в тех простейших случаях, которые нас интересуют, определяется знаками величин

$$p = -[P'_u(u_0, v_0) + Q'_v(u_0, v_0)],$$

$$q = P'_u(u_0, v_0)Q'_v(u_0, v_0) - P'_v(u_0, v_0)Q'_u(u_0, v_0),$$

где  $u_0, v_0$  — координаты состояния равновесия. Для состояния равновесия, расположенного на оси  $u$  ( $u_1 = E(0)/\alpha = \pi/(2\alpha)$ ,  $v_1 = 0$ ),

$$p = A\alpha - B\left(\frac{\pi}{4u_1} - \beta\right), \quad q = -AB\alpha\left(\frac{\pi}{4u_1} - \beta\right).$$

Для  $4u_1/\pi < 1/\beta$  (т. е. для  $\alpha/\beta > 2$ )  $q < 0$  и, следовательно, рассматриваемое состояние равновесия является седлом. Для  $4u_1/\pi > 1/\beta$  (т. е. для  $\alpha/\beta < 2$ )  $q > 0$ , а также и  $p > 0$ , состояние равновесия будет устойчивым узлом, так как фокуса быть не может, ибо ось  $u$  является интегральной кривой и проходит через это состояние равновесия. Рассуждая аналогичным образом, для состояния равновесия  $u_2 = 0$ ,  $v_2 = E_0/\beta = \pi/2\beta$  найдем, что для  $4v_2/\pi < 1/\alpha$  (т. е.  $\alpha/\beta < 1/2$ ) это состояние равновесия — седло, а для  $\alpha/\beta > 1/2$  — устойчивый узел.

Рассмотрим характер равновесия, расположенного вне координатных осей. Для случая  $u_3 > v_3$  получаем

$$p = A\left(\frac{E-K}{u} + \alpha\right) + B\left[\frac{u(E-K)}{v^2} + \beta\right],$$

$$q = AB\left[\frac{(E-K)}{u}(\beta + \alpha)\frac{u^2}{v^2} + \alpha\beta\right].$$

Пользуясь равенствами (5.67) и (5.70), представим уравнение для  $q$  в виде

$$q = AB\left[\frac{2y(1-\xi^2) + \xi^2 - y^2}{1-\xi^2}\right]\beta^2 \quad \left(y = \frac{\alpha}{\beta}\right).$$

В этом выражении  $\xi$  удовлетворяют уравнению (5.70). На рис. 5.18 построена кривая  $q = 0$ , т. е.

$$2y(1-\xi^2) + \xi^2 - y^2 = 0,$$

которая на плоскости  $\xi^2y$  отделяет область, где  $q > 0$ , от области, где  $q < 0$ . Из рассмотрения рисунка следует, что для  $1 < \alpha/\beta < 2$   $q < 0$ , т. е. состояние равновесия между осями  $u$  и  $v$  является седлом. Аналогично показывается, что состояние равновесия  $u_3, v_3$ , когда  $v_3 > u_3$ , также является седлом.

Таким образом, число и характер состояний равновесия однозначно определяются отношением  $\alpha/\beta$  (табл. 1).

Таблица 1

$\frac{\alpha}{\beta}$	Состояние равновесия на оси $u$	Состояние равновесия на оси $v$	Состояние равновесия вне осей
$0 < \frac{\alpha}{\beta} < \frac{1}{2}$	Устойчивый узел	Седло	Нет
$\frac{1}{2} < \frac{\alpha}{\beta} < 2$	Устойчивый узел	Устойчивый узел	Седло
$2 < \frac{\alpha}{\beta} < \infty$	Седло	Устойчивый узел	Нет

Рассмотрим теперь точку  $u = 0, v = 0$ . В этой точке уравнения (5.65) теряют смысл, так как значения  $u$  и  $v$  не определены, а следовательно, не имеют смысла и правые части этих уравнений. Так как исходные уравнения движения динамической системы удовлетворяются решениями  $a = 0, b = 0$ , или, что то же,  $u = 0, v = 0$ , то целесообразно доопределить правые части системы (5.65) таким образом, чтобы точка  $u = 0, v = 0$  была состоянием равновесия. Однако следует иметь в виду, что в окрестности точки  $u = 0, v = 0$  становится сомнительной возможность использования уравнений (5.65) для приближенного анализа системы (5.60), так как для колебаний с достаточно малой амплитудой момент  $\bar{M}(\phi)$ , удовлетворяющий условию  $E/n_1^2 \ll 1$ , уже не может считаться малым. Можно считать, что в окрестности состояния равновесия  $u = 0, v = 0$  характер фазовых траекторий подобен характеру фазовых траекторий в окрестности неустойчивого узла.

Перейдем к рассмотрению поведения интегральных кривых системы (5.65) во всем квадранте. Во-первых, в рассматриваемом квадранте не может быть предельных циклов, так как внутри предельного цикла должно быть по крайней мере одно состояние равновесия и это состояние равновесия не может быть седлом или такой точкой, через которую проходят интегральные кривые, идущие в бесконечность. Во-вторых, при достаточно больших  $u$  и  $v$  для всех интересующих нас значений  $\alpha$  и  $\beta$   $du/dt < 0$ ,  $dv/dt < 0$ , т. е. движение по интегральным кривым для достаточно больших  $u$  и  $v$  направлено внутрь.

Рассмотрим теперь поведение сепаратрис.

1. Для  $0 < \alpha/\beta < 1/2$  сепаратрисы порождаются лишь состоянием равновесия, расположенным на оси  $v$ . Интересующий нас ус седла, выходя из этого состояния равновесия, не может идти в бесконечность и не может накручиваться на цикл, так как циклов не существует, следовательно, он стремится к устойчивому состоянию равновесия, расположенному на оси  $u$ . Весь квадрант в данном случае является областью «устойчивости в большом» для устойчивого состояния равновесия, расположенного на оси  $u$ . Качественная картина плоскости  $uv$  для рассматриваемого случая показана на рис. 5.19.

2. Для случая  $1/2 < \alpha/\beta < 2$  сепаратрисы порождаются лишь состоянием равновесия, расположенным вне осей. Из неустойчивых усов один идет в устойчивое состояние равновесия на оси  $u$ , другой — в устойчивое состояние равновесия на оси  $v$ . Один устойчивый ус идет из бесконечности, другой — из начала координат. Квадрант разбивается на две области «устойчивости в большом», являющиеся областями притяжения для двух устойчивых состояний равновесия, расположенных на осях (рис. 5.20).

3. Для  $2 < \alpha/\beta < \infty$  сепаратриса седла, расположенного на оси  $u$ , идет в устойчивый узел, расположенный на оси  $v$ . Весь квадрант является областью «устойчивости в большом» для этого состояния равновесия (рис. 5.21).

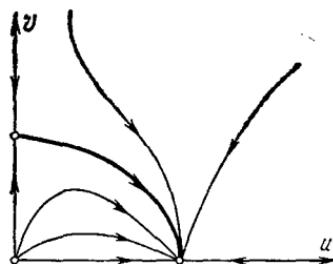


Рис. 5.19

Пользуясь проведенными исследованиями плоскости переменных  $uv$ , можно утверждать, что основными интересующими нас движениями являются периодические движения, близкие к нормальным колебаниям, имеющим частоты  $k_1$  и  $k_2$ . Эти движения соответствуют на плоскости

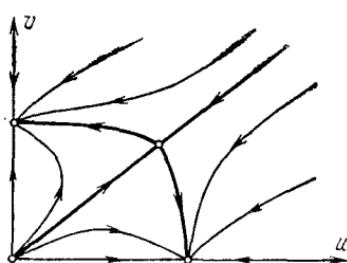


Рис. 5.20

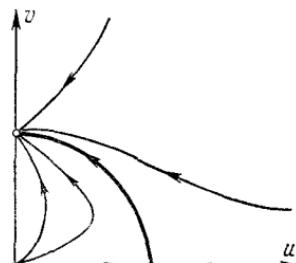


Рис. 5.21

$uv$  состояниям равновесия, расположенным на осях. Седло, расположенное вне осей, отвечает неустойчивому бигармоническому движению, которое представляет физический интерес только в связи с теми сепаратрисами, которые отделяют на фазовой плоскости области «устойчивости в большом», принадлежащие движениям, близким к гармоническим.

Для исследования наглядной картины явлений, которые могут происходить в рассматриваемой системе, будем менять массу  $m_2$  второго маятника, оставляя все другие параметры системы постоянными. В качестве параметра, характеризующего изменение массы  $m_2$ , возьмем отношение парциальных частот  $\zeta = n_2^2/n_1^2$ . При постепенном изменении  $\zeta$  в прямом и обратном направлениях мы получим наглядную картину явлений, происходящих в системе, если мы построим в зависимости от  $\zeta$  кривые амплитуд маятников и кривые частот и укажем на этих графиках части кривых, соответствующие устойчивым движениям. Амплитуды колебаний первого маятника  $z_1 = \frac{2}{\pi} u_1$  и  $z_2 = \frac{2}{\pi} v_2 \left( \frac{z_2}{z_1} = \frac{\alpha}{\beta} \right)$  являются функциями  $\zeta$  и выражаются формулами

$$z_1 = \frac{1}{1 + \lambda_0 (\zeta - a_0) \frac{1 - \zeta + \sqrt{(1 - \zeta)^2 + 4\zeta_0(\zeta - a_0)}}{\zeta - 1 + \sqrt{(1 - \zeta)^2 + 4\zeta_0(\zeta - a_0)}}},$$

$$z_2 = \frac{1}{1 + \lambda_0(\zeta - a_0) \frac{1 - \zeta - \sqrt{(1 - \zeta)^2 + 4\sigma_0(\zeta - a_0)}}{\zeta - 1 - \sqrt{(1 - \zeta)^2 + 4\sigma_0(\zeta - a_0)}}},$$

где

$$\lambda_0 = \frac{m_1 n_1^2 \gamma''}{c \gamma'}, \quad \sigma_0 = \frac{c}{m_1 n_1^2}, \quad a_0 = \frac{g}{n_1^2 l}.$$

На рис. 5.22 показаны расположения кривых  $z_1$  и  $z_2$  на плоскости  $\zeta z$ . Стрелками указаны перескоки с одной амплитуды на другую при прямом и обратном изменениях  $\zeta$ . На рис. 5.23 показаны амплитуды второго маятника  $\eta_1 = \alpha_1 z_1$  и  $\eta_2 = \alpha_2 z_2$ . На рисунках хорошо видно явление затягивания при прямом и обратном изменениях  $\zeta$ . На рис. 5.24 изображены кривые частот, определяемые уравнением

$$\Omega^4 - (1 + \zeta) \Omega^2 + \zeta - \sigma_0(\zeta - a_0) = 0,$$

где  $\Omega^2 = k^2/n_1^2$ .

Части кривых, соответствующие устойчивым режимам, представлены жирными линиями. При изменении  $\zeta$  от

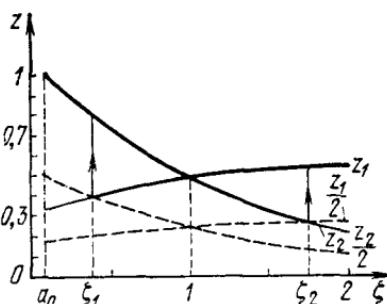


Рис. 5.22

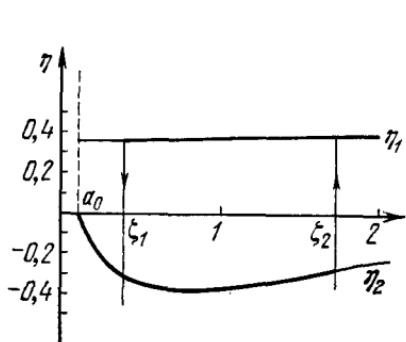


Рис. 5.23

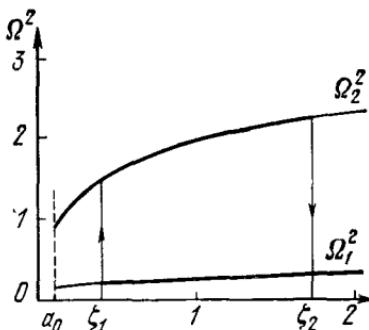


Рис. 5.24

нуля до  $\zeta = \xi_2$  система совершает устойчивое гармоническое движение с частотой, близкой к нормальной частоте  $k_2$ . Далее система изменяет частоту скачком, и при дальнейшем увеличении  $\zeta$  в системе происходят колеба-

ния с частотой, близкой к нормальной частоте  $k_1$ . При обратном изменении  $\zeta$  скачок с частоты  $k_1$  к частоте  $k_2$  произойдет уже при  $\zeta = \zeta_1$ . Это явление носит название затягивания по частоте. При  $\zeta_1 < \zeta < \zeta_2$  в системе в зависимости от начальных условий могут установиться устойчивые колебания и с частотой, близкой к  $k_1$  или  $k_2$ . Кривые на рис. 5.22, 5.23 и 5.24 построены при  $a_0 = 0,16$ ;  $\sigma_0 = 0,8$ ;  $\lambda_0 = 2$ . При других значениях этих величин получаются аналогичные кривые.

#### § 4. Автономные системы с гироскопическими силами [9]

В этом параграфе рассматриваются квазилинейные динамические системы с двумя степенями свободы при наличии гироскопических сил. Уравнения движения такой системы в общем случае имеют вид

$$\begin{aligned} a_{11}\ddot{q}_1 + a_{12}\dot{q}_2 + c_{12}q_2 \pm c_{11}q_1 + d_{12}\zeta_2 &= \mu f_1(q_1, \zeta_1, q_2, \zeta_2), \\ a_{12}\ddot{q}_1 + a_{22}\dot{q}_2 + c_{12}q_1 \pm c_{22}q_2 + d_{21}\zeta_1 &= \mu g_1(q_1, \zeta_1, q_2, \zeta_2), \end{aligned}$$

где  $d_{12} = -d_{21}$ .

Если координаты  $q_1$  и  $q_2$  будут нормальными координатами, то уравнения движения запишутся в более простой форме

$$\begin{aligned} a_{11}\ddot{q}_1 - d_{21}\zeta_2 \pm c_{11}q_1 &= \mu f_1(q_1, \zeta_1, q_2, \zeta_2), \\ a_{22}\ddot{q}_2 + d_{21}\zeta_1 \pm c_{22}q_2 &= \mu g_1(q_1, \zeta_1, q_2, \zeta_2). \end{aligned}$$

Поделив первое уравнение на  $a_{11}$ , а второе на  $a_{22}$ , получим

$$\begin{aligned} \ddot{q}_1 - \kappa_1\zeta_2 + (\pm n_1^2)q_1 &= \mu f(q_1, \zeta_1, q_2, \zeta_2), \\ \ddot{q}_2 + \kappa_2\zeta_1 + (\pm n_2^2)q_2 &= \mu g(q_1, \zeta_1, q_2, \zeta_2), \end{aligned} \quad (5.75)$$

где

$$\begin{aligned} \kappa_1 &= \frac{d_{21}}{a_{11}}, & \kappa_2 &= \frac{d_{21}}{a_{22}}, & n_1^2 &= \frac{c_{11}}{a_{11}}, \\ n_2^2 &= \frac{c_{22}}{a_{22}}, & f &= \frac{f_1}{a_{11}}, & g &= \frac{g_1}{a_{22}}. \end{aligned}$$

При  $\mu = 0$  система (5.75) имеет решение

$$\begin{aligned} q_1 &= a \sin(k_1 t + \beta_1) + b \sin(k_2 t + \beta_2), \\ q_2 &= \alpha_1 a \cos(k_1 t + \beta_1) + \alpha_2 b \cos(k_2 t + \beta_2), \end{aligned} \quad (5.76)$$

где частоты  $k_1$  и  $k_2$  являются корнями уравнения

$$k^4 + [(\mp n_1^2) + (\mp n_2^2) - \kappa_1\kappa_2]k^2 + n_1^2n_2^2 = 0. \quad (5.77)$$