

ния с частотой, близкой к нормальной частоте  $k_1$ . При обратном изменении  $\zeta$  скачок с частоты  $k_1$  к частоте  $k_2$  произойдет уже при  $\zeta = \zeta_1$ . Это явление носит название затягивания по частоте. При  $\zeta_1 < \zeta < \zeta_2$  в системе в зависимости от начальных условий могут установиться устойчивые колебания и с частотой, близкой к  $k_1$  или  $k_2$ . Кривые на рис. 5.22, 5.23 и 5.24 построены при  $a_0 = 0,16$ ;  $\sigma_0 = 0,8$ ;  $\lambda_0 = 2$ . При других значениях этих величин получаются аналогичные кривые.

#### § 4. Автономные системы с гироскопическими силами [9]

В этом параграфе рассматриваются квазилинейные динамические системы с двумя степенями свободы при наличии гироскопических сил. Уравнения движения такой системы в общем случае имеют вид

$$\begin{aligned} a_{11}\ddot{q}_1 + a_{12}\dot{q}_2 + c_{12}q_2 \pm c_{11}q_1 + d_{12}\zeta_2 &= \mu f_1(q_1, \zeta_1, q_2, \zeta_2), \\ a_{12}\ddot{q}_1 + a_{22}\dot{q}_2 + c_{12}q_1 \pm c_{22}q_2 + d_{21}\zeta_1 &= \mu g_1(q_1, \zeta_1, q_2, \zeta_2), \end{aligned}$$

где  $d_{12} = -d_{21}$ .

Если координаты  $q_1$  и  $q_2$  будут нормальными координатами, то уравнения движения запишутся в более простой форме

$$\begin{aligned} a_{11}\ddot{q}_1 - d_{21}\zeta_2 \pm c_{11}q_1 &= \mu f_1(q_1, \zeta_1, q_2, \zeta_2), \\ a_{22}\ddot{q}_2 + d_{21}\zeta_1 \pm c_{22}q_2 &= \mu g_1(q_1, \zeta_1, q_2, \zeta_2). \end{aligned}$$

Поделив первое уравнение на  $a_{11}$ , а второе на  $a_{22}$ , получим

$$\begin{aligned} \ddot{q}_1 - \kappa_1\zeta_2 + (\pm n_1^2)q_1 &= \mu f(q_1, \zeta_1, q_2, \zeta_2), \\ \ddot{q}_2 + \kappa_2\zeta_1 + (\pm n_2^2)q_2 &= \mu g(q_1, \zeta_1, q_2, \zeta_2), \end{aligned} \quad (5.75)$$

где

$$\begin{aligned} \kappa_1 &= \frac{d_{21}}{a_{11}}, & \kappa_2 &= \frac{d_{21}}{a_{22}}, & n_1^2 &= \frac{c_{11}}{a_{11}}, \\ n_2^2 &= \frac{c_{22}}{a_{22}}, & f &= \frac{f_1}{a_{11}}, & g &= \frac{g_1}{a_{22}}. \end{aligned}$$

При  $\mu = 0$  система (5.75) имеет решение

$$\begin{aligned} q_1 &= a \sin(k_1 t + \beta_1) + b \sin(k_2 t + \beta_2), \\ q_2 &= \alpha_1 a \cos(k_1 t + \beta_1) + \alpha_2 b \cos(k_2 t + \beta_2), \end{aligned} \quad (5.76)$$

где частоты  $k_1$  и  $k_2$  являются корнями уравнения

$$k^4 + [(\mp n_1^2) + (\mp n_2^2) - \kappa_1\kappa_2]k^2 + n_1^2n_2^2 = 0. \quad (5.77)$$

Коэффициенты распределения  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  определяются формулами

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= \frac{(\mp n_1^2) + k_1^2}{\kappa_1 k_1} = \frac{\kappa_2 k_1}{(\mp n_2^2) + k_1^2}, \\ \alpha_2 &= \frac{(\mp n_1^2) + k_2^2}{\kappa_1 k_2} = \frac{\kappa_2 k_2}{(\mp n_2^2) + k_2^2}.\end{aligned}\quad (5.78)$$

Решение системы (5.75) при  $\mu \neq 0$  будем искать в виде (5.76), считая  $a$ ,  $b$ ,  $\beta_1$  и  $\beta_2$  медленно меняющимися функциями времени. Проделав выкладки, аналогичные проделанным в предыдущем параграфе, получим для определения  $a$ ,  $b$ ,  $\beta_1$  и  $\beta_2$  следующие приближенные уравнения \*):

$$\begin{aligned}\frac{da}{d\tau} &= \frac{1}{n_1^3} \left( \kappa_1 G_1 - \frac{\kappa_2}{\alpha_1} F_1 \right), \\ \frac{db}{d\tau} &= -\frac{1}{n_1^3} \left( \kappa_1 G_2 - \frac{\kappa_2}{\alpha_2} F_2 \right), \\ \frac{d\beta_1}{d\tau} &= \frac{1}{a n_1^3} \left( \kappa_1 G_3 + \frac{\kappa_2}{\alpha_1} F_3 \right), \\ \frac{d\beta_2}{d\tau} &= -\frac{1}{b n_1^3} \left( \kappa_1 G_4 + \frac{\kappa_2}{\alpha_2} F_4 \right),\end{aligned}\quad (5.79)$$

где  $\tau = \frac{\mu n_1^3 t}{2(k_2^2 - k_1^2)}$       ( $k_2^2 > k_1^2$ ),

$$\begin{aligned}F_1 &= \frac{1}{2\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} f^* \cos \xi d\xi d\eta, \quad G_1 = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} g^* \sin \xi d\xi d\eta, \\ F_2 &= \frac{1}{2\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} f^* \cos \eta d\xi d\eta, \quad G_2 = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} g^* \sin \eta d\xi d\eta,\end{aligned}\quad (5.80)$$

$$\begin{aligned}F_3 &= \frac{1}{2\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} f^* \sin \xi d\xi d\eta, \quad G_3 = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} g^* \cos \xi d\xi d\eta, \\ F_4 &= \frac{1}{2\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} f^* \sin \eta d\xi d\eta, \quad G_4 = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} g^* \cos \eta d\xi d\eta,\end{aligned}$$

\*). При выводе уравнений (5.79) использованы соотношения

$$\alpha_2 k_2 - \alpha_1 k_1 = \frac{k_2^2 - k_1^2}{\kappa_1} \quad \text{и} \quad \alpha_2 k_1 - \alpha_1 k_2 = \frac{(k_1^2 - k_2^2) \alpha_1 \alpha_2}{\kappa_2}.$$

$$\begin{aligned} f^* &= f(a \sin \xi + b \sin \eta, ak_1 \cos \xi + bk_2 \cos \eta, \\ &\quad \alpha_1 a \cos \xi + \alpha_2 b \cos \eta, -\alpha_1 ak_1 \sin \xi - \alpha_2 bk_2 \sin \eta), \\ g^* &= g(a \sin \xi + b \sin \eta, ak_1 \cos \xi + bk_2 \cos \eta, \\ &\quad \alpha_1 a \cos \xi + \alpha_2 b \cos \eta, -\alpha_1 ak_1 \sin \xi - \alpha_2 bk_2 \sin \eta), \\ \xi &= k_1 t + \beta_1, \quad \eta = k_2 t + \beta_2. \end{aligned}$$

Рассмотрим колебания плоского гироскопического маятника, изображенного на рис. 5.25, предполагая, что на кожух гироскопа действует специальный момент, создаваемый с помощью асинхронного мотора [16].

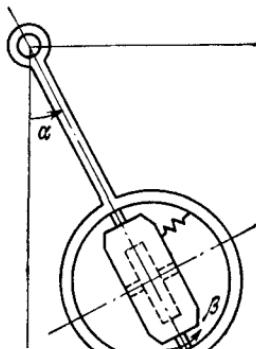


Рис. 5.25

Пусть  $\alpha$  — угол отклонения маятника от вертикального положения,  $\beta$  — угол поворота кожуха,  $\omega$  — собственная угловая скорость гироскопа. Будем рассматривать малые колебания системы. Тогда кинетическая энергия может быть представлена в виде \*)

$$T = \frac{1}{2} I_0 \dot{\alpha}^2 + \frac{1}{2} I_1 \dot{\beta}^2 - I \omega \beta \dot{\alpha},$$

где величины

$$I_0 = I_m + \frac{Q + Q_1}{g} l^2 + A + A_1,$$

$$I_1 = A + A_1,$$

входящие в формулу, представляют собой:  $I_m$  — момент инерции маятника относительно оси вращения,  $A$  — экваториальный момент инерции гироскопа,  $I$  — полярный момент инерции гироскопа,  $A_1$  — экваториальный момент инерции кожуха,  $Q$  — вес кожуха гироскопа,  $Q_1$  — вес гироскопа,  $l$  — расстояние от оси вращения до центра масс гироскопа и кожуха. Выражения для обобщенных сил при тех же предположениях имеют вид

$$Q_\alpha = -Pl_1 \alpha - \gamma' \dot{\alpha},$$

$$Q_\beta = -c\beta + M_\beta (\dot{\beta}) - \gamma'' \dot{\beta},$$

где  $P$  — вес всей системы,  $l_1$  — расстояние от оси вращения до центра масс всей системы,  $c$  — коэффициент, характеризующий жесткость пружины, которой соединены

\*) Постоянные члены в этом выражении отброшены.

коужух и маятник,  $\gamma'$  и  $\gamma''$  — коэффициенты вязкого трения. Уравнения движения системы будут

$$\begin{aligned} I_0\ddot{\alpha} - I_0\dot{\beta} &= -Pl_1\alpha - \gamma'\dot{\alpha}, \\ I_1\ddot{\beta} + I_0\dot{\alpha} &= -c\beta + M_\beta(\dot{\beta}) - \gamma''\dot{\beta}. \end{aligned}$$

Вводя обозначения

$$\kappa_1 = \frac{I_0}{I_0}, \quad \kappa_2 = \frac{I_0}{I_1}, \quad n_1^2 = \frac{Pl_1}{I_0}, \quad n_2^2 = \frac{c}{I_1},$$

получим

$$\begin{aligned} \ddot{\alpha} - \kappa_1\dot{\beta} + n_1^2\alpha &= -\frac{\gamma'}{I_0}\dot{\alpha}, \\ \ddot{\beta} + \kappa_2\dot{\alpha} + n_2^2\beta &= -\frac{\gamma''}{I_1} + \frac{M_\beta(\dot{\beta})}{I_1}. \end{aligned}$$

Аппроксимируем момент  $M_\beta(\dot{\beta})$  кубической параболой [16]:

$$M_\beta(\dot{\beta}) = c_1\dot{\beta} - c_2\dot{\beta}^3 \quad (c_1 > 0, \quad c_2 > 0).$$

Предположим, что рассматриваемая система близка к линейной, т. е. момент  $M_\beta(\dot{\beta})$  мал и мало вязкое трение.

Будем считать, что безразмерные величины удовлетворяют условиям

$$\frac{c_1 - \gamma''}{I_1 n_1} \ll 1, \quad \frac{\gamma'}{I_0 n_1} \ll 1, \quad \frac{c_2}{I_1} n_1 \ll 1.$$

Тогда, введя  $\mu = \frac{c_1 - \gamma''}{I_1 n_1} > 0$ , перепишем уравнения движения в виде

$$\begin{aligned} \ddot{\alpha} - \kappa_1\dot{\beta} + n_1^2\alpha &= \mu n_1(-\lambda_1\dot{\alpha}), \\ \ddot{\beta} + \kappa_2\dot{\alpha} + n_2^2\beta &= \mu n_1(\dot{\beta} - \lambda_2\dot{\beta}^3), \end{aligned} \tag{5.81}$$

где

$$\lambda_1 = \frac{\gamma' I_1}{I_0(c_1 - \gamma'')}, \quad \lambda_2 = \frac{c_2}{c_1 - \gamma''}.$$

Уравнения (5.81) имеют вид уравнений (5.75). Решение уравнений (5.81) будем искать в виде (5.76). Тогда уравнения для  $a$ ,  $b$ ,  $\beta_1$  и  $\beta_2$  (5.79) будут

$$\frac{du}{d\tau} = A(a_0 - u - 2v)u = P(u, v), \tag{5.82}$$

$$\frac{dv}{d\tau} = B(b_0 - v - 2u)v = Q(u, v),$$

$$\frac{d\beta_1}{d\tau} = 0, \quad \frac{d\beta_2}{d\tau} = 0, \tag{5.83}$$

где

$$\begin{aligned} u &= \alpha_1^2 k_1^2 a^2 > 0, \quad v = \alpha_2^2 k_2^2 b^2 > 0, \\ A &= \frac{3}{4} \lambda_2 \frac{n_1^2 - k_1^2}{n_1^2} > 0, \quad B = \frac{3}{4} \lambda_2 \frac{k_2^2 - n_1^2}{n_1^2} > 0, \\ a_0 &= \frac{4}{3\lambda_2} \left( 1 - \lambda_1 \frac{k_1^2 - n_2^2}{k_1^2 - n_1^2} \right), \quad b_0 = \frac{4}{3\lambda_2} \left( 1 - \lambda_1 \frac{k_2^2 - n_2^2}{k_2^2 - n_1^2} \right). \end{aligned}$$

Из уравнений (5.83) следует, что  $\beta_1 = \text{const}$  и  $\beta_2 = \text{const}$ .

Перейдем к исследованию уравнений (5.82). Особыми точками (состояниями равновесия) системы (5.82) являются:  $P_1$  с координатами  $u_1 = 0, v_1 = 0$ , соответствующая состоянию равновесия исходной динамической системы;  $P_2$  с координатами  $u_2 = 0, v_2 = b_0$ , соответствующая периодическому движению исходной динамической системы с частотой  $k_2$ ;  $P_3$  с координатами  $u_3 = a_0, v_3 = 0$ , соответствующая периодическому движению исходной системы с частотой  $k_1$ ;  $P_4$  с координатами  $u_4 = \frac{1}{3}(2b_0 - a_0), v_4 = \frac{1}{3}(2a_0 - b_0)$ . Эта точка соответствует бигармоническому движению исходной системы с частотами  $k_1$  и  $k_2$ .

Характер состояний равновесия определим по знакам величин ( $\S$  4 гл. 1)

$$\begin{aligned} p &= -[P_u'(u_0, v_0) + Q_v'(u_0, v_0)], \\ q &= P_u'(u_0, v_0) Q_v'(u_0, v_0) - P_v'(u_0, v_0) Q_u'(u_0, v_0). \end{aligned}$$

Для рассматриваемого случая

$$\begin{aligned} p &= 2(u + v)(A + B) - (Aa_0 + Bb_0), \\ q &= AB[a_0 - 2(u + v)][b_0 - 2(u + v)] - 4ABuv. \end{aligned}$$

Для состояния равновесия  $P_1 (u_1 = 0, v_1 = 0)$

$$p = -(Aa_0 + Bb_0), \quad q = ABa_0b_0.$$

Для состояния равновесия  $P_2 (u_2 = 0, v_2 = b_0)$

$$p = Bb_0 + A(2b_0 - a_0), \quad q = ABb_0(2b_0 - a_0).$$

Для состояния равновесия  $P_3 (u_3 = a_0, v_3 = 0)$

$$p = Aa_0 + B(2a_0 - b_0), \quad q = ABa_0(2a_0 - b_0).$$

Для состояния равновесия

$$\begin{aligned} P_4 \left( u_4 = \frac{2b_0 - a_0}{3}, v_4 = \frac{2a_0 - b_0}{3} \right) \\ q = -3ABu_4v_4. \end{aligned}$$

Это значит, что если точка  $P_4$  существует, то  $q < 0$ , так как  $u_4 > 0$ ,  $v_4 > 0$ . Следовательно, состояние равновесия вне осей  $u$  и  $v$  является седлом. Таким образом, существование и характер состояний равновесия системы (5.82) определяется величинами  $a_0$  и  $b_0$ .

В табл. 2 приведены возможные случаи.

Т а б л и ц а 2

|   | Случай                                    | Состояние равновесия |                 |                 |       |
|---|---|----------------------|-----------------|-----------------|-------|
|   |   | $P_1$                | $P_2$           | $P_3$           | $P_4$ |
| 1 | $a_0 < 0, b_0 < 0$                        | Устойчивый узел      | Нет             | Нет             | Нет   |
| 2 | $a_0 > 0, b_0 < 0$                        | Седло                | Нет             | Устойчивый узел | Нет   |
| 3 | $a_0 < 0, b_0 > 0$                        | Седло                | Устойчивый узел | Нет             | Нет   |
| 4 | $a_0 > 0, b_0 > 0, a_0 > 2b_0$            | Неустойчивый узел    | Седло           | Устойчивый узел | Нет   |
| 5 | $a_0 > 0, b_0 > 0, a_0 < 2b_0, a_0 > b_0$ | Неустойчивый узел    | Устойчивый узел | Устойчивый узел | Седло |
| 6 | $a_0 > 0, b_0 > 0, 2a_0 > b_0, b_0 > a_0$ | Неустойчивый узел    | Устойчивый узел | Устойчивый узел | Седло |
| 7 | $a_0 > 0, b_0 > 0, b_0 > 2a_0$            | Неустойчивый узел    | Устойчивый узел | Седло           | Нет   |

Так как  $u = 0$ ,  $v = 0$  — интегральные кривые и, кроме седла, вне осей других особых точек нет, то система (5.82) предельных циклов не имеет. Для больших  $u$  и  $v$   $du/dt < 0$ ,  $dv/dt < 0$ , т. е. бесконечность неустойчива.

На рис. 5.26 показаны картины фазовой плоскости для случаев 1, 2, 3, 4, 5 и 7. Итак, если  $a_0 < 0, b_0 < 0$ , то исходная динамическая система при любых начальных условиях стремится к состоянию покоя. При  $a_0 > 0, b_0 < 0$  в системе устанавливаются периодические колебания с частотой  $k_1$ , при  $a_0 < 0, b_0 > 0$  — периодические колебания с частотой  $k_2$ .

При  $a_0 > 0$ ,  $b_0 > 0$  и  $a_0 > 2b_0$  устанавливаются периодические колебания с частотой  $k_1$ , а при  $b_0 < 2a_0$  — с частотой  $k_2$ .

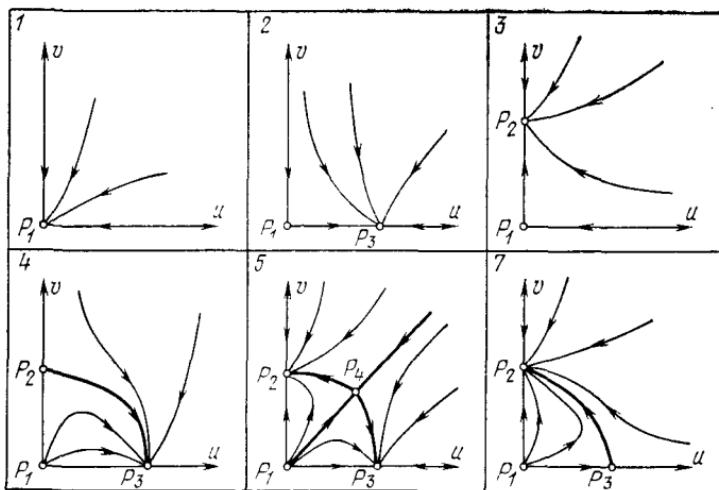


Рис. 5.26

При  $a_0 > b_0 > 0$ ,  $a_0 < 2b_0$  и при  $b_0 > a_0 > 0$ ,  $b_0 < 2a_0$  в системе в зависимости от начальных условий могут установиться или периодические движения с частотой  $k_1$ , или с частотой  $k_2$ .

### § 5. Неавтономные динамические системы с двумя степенями свободы [13]

В этом параграфе мы рассмотрим динамические системы, уравнения которых могут быть представлены в виде

$$\ddot{q}_1 + A_1 \dot{q}_2 + B_1 q_2 + n_1^2 q_1 =$$

$$\begin{aligned} &= \mu f(q_1, \dot{q}_1, q_2, \dot{q}_2) + D_1 \sin t + E_1 \cos t, \\ \ddot{q}_2 + A_2 \dot{q}_1 + B_2 q_1 + n_2^2 q_2 = \\ &= \mu g(q_1, \dot{q}_1, q_2, \dot{q}_2) + D_2 \sin t + E_2 \cos t, \end{aligned} \quad (5.84)$$

где  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $B_1$ ,  $B_2$ ,  $n_1^2$ ,  $n_2^2$ ,  $D_1$ ,  $E_1$ ,  $D_2$ ,  $E_2$  — постоянные величины,  $f$ ,  $g$  — нелинейные функции,  $\mu$  — малый параметр, характеризующий близость рассматриваемой системы к линейной.