

При $a_0 > 0$, $b_0 > 0$ и $a_0 > 2b_0$ устанавливаются периодические колебания с частотой k_1 , а при $b_0 < 2a_0$ — с частотой k_2 .

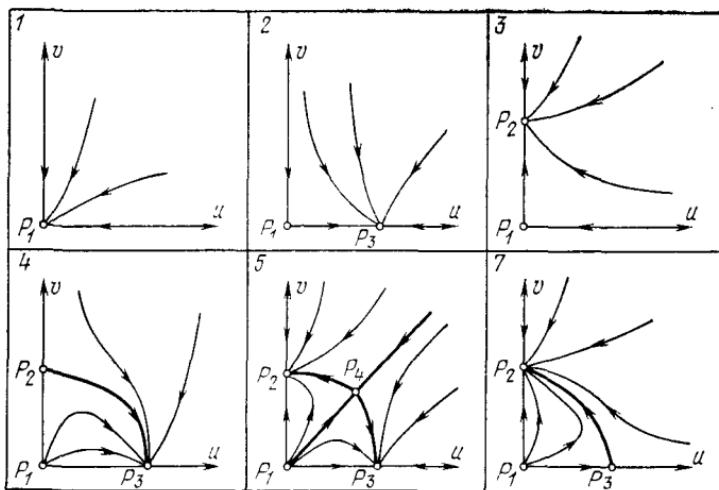


Рис. 5.26

При $a_0 > b_0 > 0$, $a_0 < 2b_0$ и при $b_0 > a_0 > 0$, $b_0 < 2a_0$ в системе в зависимости от начальных условий могут установиться или периодические движения с частотой k_1 , или с частотой k_2 .

§ 5. Неавтономные динамические системы с двумя степенями свободы [13]

В этом параграфе мы рассмотрим динамические системы, уравнения которых могут быть представлены в виде

$$\ddot{q}_1 + A_1 \dot{q}_2 + B_1 q_2 + n_1^2 q_1 =$$

$$\begin{aligned} &= \mu f(q_1, \dot{q}_1, q_2, \dot{q}_2) + D_1 \sin t + E_1 \cos t, \\ \ddot{q}_2 + A_2 \dot{q}_1 + B_2 q_1 + n_2^2 q_2 = \\ &= \mu g(q_1, \dot{q}_1, q_2, \dot{q}_2) + D_2 \sin t + E_2 \cos t, \end{aligned} \quad (5.84)$$

где A_1 , A_2 , B_1 , B_2 , n_1^2 , n_2^2 , D_1 , E_1 , D_2 , E_2 — постоянные величины, f , g — нелинейные функции, μ — малый параметр, характеризующий близость рассматриваемой системы к линейной.

Мы ограничимся рассмотрением случаев — когда нормальные частоты линейной системы далеки от частоты внешней силы и когда одна из нормальных частот линейной системы равна частоте внешней синусоидальной силы. Рассмотрим сначала случай, когда частоты линейной системы далеки от частоты внешней силы. При $\mu = 0$ решение системы (5.84) имеет вид

$$\begin{aligned} q_1 &= a \sin(k_1 t + \beta_1) + b \sin(k_2 t + \beta_2) + \\ &\quad + d_1 \sin t + e_1 \cos t, \\ q_2 &= \alpha_1 a \sin(k_1 t + \beta_1) + \alpha_2 b \sin(k_2 t + \beta_2) + \\ &\quad + d_2 \sin t + e_2 \cos t, \end{aligned} \quad (5.85)$$

где a, b, β_1 и β_2 — постоянные интегрирования, k_1 и k_2 — нормальные частоты линейной однородной системы, определяющиеся из уравнения *)

$$\sigma k^4 - (n_1^2 + n_2^2 - A_1 B_2 - A_2 B_1) k^2 + n_1^2 n_2^2 - B_1 B_2 = 0 \\ (\sigma = 1 - A_1 A_2), \quad (5.86)$$

α_1 и α_2 — коэффициенты распределения, определяемые выражениями

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{A_2 k_1^2 - B_2}{n_2^2 - k_1^2} = \frac{n_1^2 - k_1^2}{A_1 k_1^2 - B_1}, \\ \alpha_2 &= \frac{A_2 k_2^2 - B_2}{n_2^2 - k_2^2} = \frac{n_1^2 - k_2^2}{A_1 k_2^2 - B_1}, \end{aligned} \quad (5.87)$$

$$\begin{aligned} d_1 &= \frac{D_1(n_2^2 - 1) - D_2(B_1 - A_1)}{\Delta}, \quad e_1 = \frac{E_1(n_2^2 - 1) - E_2(B_1 - A_1)}{\Delta}, \\ d_2 &= \frac{D_2(n_1^2 - 1) - D_1(B_2 - A_2)}{\Delta}, \quad e_2 = \frac{E_2(n_1^2 - 1) - E_1(B_2 - A_2)}{\Delta}, \\ \Delta &= \sigma - (n_1^2 + n_2^2 - A_1 B_2 - A_2 B_1) + n_1^2 n_2^2 - B_1 B_2, \\ \sigma &= 1 - A_1 A_2. \end{aligned}$$

При $\mu \neq 0$ можно было бы искать решение уравнений (5.84) в виде (5.85), считая a, b, β_1 и β_2 медленно меняющимися функциями времени. Тогда, поступая так же, как и в § 5 гл. 3, получили бы для определения a, b, β_1 и β_2

*) Как и в § 5 гл. 4, предполагаем, что k_1 и k_2 не равны друг другу и ни один из них не равен нулю.

укороченные уравнения (5.57) и (5.58). Но так как в этом случае осреднение уже проводится по трем периодам $2\pi/k_1$, $2\pi/k_2$ и 2π , то имеющиеся в этих уравнениях $F_1, \dots, F_4, G_1, \dots, G_4$ вычисляются по формулам

$$\begin{aligned} F_1 &= \frac{1}{4\pi^3} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} f^* \cos \xi d\xi d\eta dt, \\ F_2 &= \frac{1}{4\pi^3} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} f^* \cos \eta d\xi d\eta dt, \\ F_3 &= \frac{1}{4\pi^3} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} f^* \sin \xi d\xi d\eta dt, \\ F_4 &= \frac{1}{4\pi^3} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} f^* \sin \eta d\xi d\eta dt, \\ G_1 &= \frac{1}{4\pi^3} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} g^* \cos \xi d\xi d\eta dt, \\ G_2 &= \frac{1}{4\pi^3} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} g^* \cos \eta d\xi d\eta dt, \\ G_3 &= \frac{1}{4\pi^3} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} g^* \sin \xi d\xi d\eta dt, \\ G_4 &= \frac{1}{4\pi^3} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} g^* \sin \eta d\xi d\eta dt, \end{aligned} \tag{5.88}$$

где

$$\begin{aligned} f^* &= f(a \sin \xi + b \sin \eta + d_1 \sin t + e_1 \cos t, \\ &\quad ak_1 \cos \xi + bk_2 \cos \eta + d_1 \cos t - e_1 \sin t, \\ &\quad \alpha_1 a \sin \xi + \alpha_2 b \sin \eta + d_2 \sin t + e_2 \cos t, \\ &\quad \alpha_1 ak_1 \cos \xi + \alpha_2 bk_2 \cos \eta + d_2 \cos t - e_2 \sin t), \\ g^* &= g(a \sin \xi + b \sin \eta + d_1 \sin t + e_1 \cos t, \\ &\quad ak_1 \cos \xi + bk_2 \cos \eta + d_1 \cos t - e_1 \sin t, \\ &\quad \alpha_1 a \sin \xi + \alpha_2 b \sin \eta + d_2 \sin t + e_2 \cos t, \\ &\quad \alpha_1 ak_1 \cos \xi + \alpha_2 bk_2 \cos \eta + d_2 \cos t - e_2 \sin t), \\ \xi &= k_1 t + \beta_1, \quad \eta = k_2 t + \beta_2. \end{aligned} \tag{5.89}$$

Покажем, как уравнения (5.57) и (5.58) можно получить несколько другим способом. Будем искать решение уравнений (5.84) в виде

$$\begin{aligned} q_1 &= a \sin(k_1 t + \beta_1) + b \sin(k_2 t + \beta_2) + \\ &\quad + d_1 \sin t + e_1 \cos t, \\ q_2 &= (\alpha_1 a + a_2) \sin(k_1 t + \beta_1 + \gamma_1) + \\ &\quad + (\alpha_2 b + b_2) \sin(k_2 t + \beta_2 + \gamma_2) + d_2 \sin t + e_2 \cos t, \end{aligned} \quad (5.90)$$

где $k_1, k_2, \alpha_1, \alpha_2, d_1, d_2, e_1, e_2$ — те же, что и в решении (5.85). Будем считать, что a, b, β_1 и β_2 — медленно меняющиеся функции времени, производные от которых по времени имеют порядок μ , а «поправки» на амплитуды a_2 и b_2 и частоты γ_1 и γ_2 — медленно меняющиеся функции времени порядка μ , производные от которых по времени имеют порядок μ^2 . Для удобства вычислений перепишем решение (5.90) в виде (пренебрегая членами порядка μ^2):

$$\begin{aligned} q_1 &= a \sin(k_1 t + \beta_1) + b \sin(k_2 t + \beta_2) + d_1 \sin t + \\ &\quad + e_1 \cos t, \\ q_2 &= (\alpha_1 a + a_2) \sin(k_1 t + \beta_1) + (\alpha_2 b + b_2) \sin(k_2 t + \beta_2) + \\ &\quad + a_1 \cos(k_1 t + \beta_1) + b_1 \cos(k_2 t + \beta_2) + d_2 \sin t + \\ &\quad + e_2 \cos t, \end{aligned} \quad (5.91)$$

где a_1 и b_1 — медленно меняющиеся функции порядка μ . Подставляя решение (5.91) в систему уравнений (5.84), получим, сохраняя только члены порядка μ ,

$$\begin{aligned} [2\dot{a}k_1(1 + \alpha_1 A_1) + a_1(B_1 - A_1 k_1^2)] \cos \xi &+ \\ + [2\dot{b}k_2(1 + \alpha_2 A_1) + b_1(B_1 - A_1 k_2^2)] \cos \eta &+ \\ + [-2ak_1\dot{\beta}_1(1 + \alpha_1 A_1) + a_2(B_1 - A_1 k_1^2)] \sin \xi &+ \\ + [-2bk_2\dot{\beta}_2(1 + \alpha_2 A_1) + b_2(B_1 - A_1 k_2^2)] \sin \eta &= \mu f^*, \\ [2\dot{a}k_1(\alpha_1 + A_2) + (n_2^2 - k_1^2)a_1] \cos \xi &+ \\ + [2\dot{b}k_2(\alpha_2 + A_2) + (n_2^2 - k_2^2)b_1] \cos \eta &+ \\ + [-2ak_1\dot{\beta}_1(\alpha_1 + A_2) + (n_2^2 - k_1^2)a_2] \sin \xi &+ \\ + [-2bk_2\dot{\beta}_2(\alpha_2 + A_2) + (n_2^2 - k_2^2)b_2] \sin \eta &= \mu g*. \end{aligned}$$

Умножим теперь последовательно полученные уравнения на $\cos \xi, \cos \eta, \sin \xi, \sin \eta$ и возьмем их средние значения

за периоды $2\pi/k_1$, $2\pi/k_2$ и 2π . В результате этого получим

$$\begin{aligned} 2\dot{a}k_1(1 + \alpha_1 A_1) + a_1(B_1 - A_1 k_1^2) &= \mu F_1, \\ 2\dot{a}k_1(\alpha_1 + A_2) + a_1(n_2^2 - k_1^2) &= \mu G_1, \\ 2\dot{b}k_2(1 + \alpha_2 A_1) + b_1(B_1 - A_1 k_2^2) &= \mu F_2, \\ 2\dot{b}k_2(\alpha_1 + A_2) + b_1(n_2^2 - k_2^2) &= \mu G_2, \\ -2ak_1\dot{\beta}_1(1 + \alpha_1 A_1) + a_2(B_1 - A_1 k_1^2) &= \mu F_3, \\ -2ak_1\dot{\beta}_1(\alpha_1 + A_1) + a_2(n_2^2 - k_1^2) &= \mu G_3, \\ -2bk_2\dot{\beta}_2(1 + \alpha_2 A_1) + b_2(B_1 - A_1 k_2^2) &= \mu F_4, \\ -2bk_2\dot{\beta}_2(\alpha_2 + A_2) + b_2(n_2^2 - k_2^2) &= \mu G_4. \end{aligned}$$

Исключая из этих уравнений a_1 , a_2 , b_1 и b_2 , получаем уравнения (5.57) и (5.58), но F_1, \dots, F_4 , G_1, \dots, G_4 определяются уже формулами (5.88). Отметим, что рассмотренный метод получения укороченных уравнений более прост, чем рассмотренный в § 5 гл. 3, и может быть использован достаточно просто и для систем более высокого порядка *).

Рассмотрим второй случай, когда одна из главных частот линейной системы равна частоте внешнего воздействия. Предположим при этом, что амплитуда внешнего воздействия имеет порядок μ . Пусть уравнения движения будут

$$\begin{aligned} \ddot{q}_1 + A_1\dot{q}_2 + B_1q_2 + n_1^2q_1 &= \mu f(q_1, \dot{q}_1, q_2, \dot{q}_2, t), \\ \ddot{q}_2 + A_2\dot{q}_1 + B_2q_1 + n_2^2q_2 &= \mu g(q_1, \dot{q}_1, q_2, \dot{q}_2, t), \end{aligned} \quad (5.92)$$

где нелинейные функции f и g обладают свойством

$$f(q_1, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dot{q}_2, t + 2\pi) = f(q_1, \dot{q}_1, q_2, \dot{q}_2, t),$$

$$g(q_1, \dot{q}_1, q_2, \dot{q}_2, t + 2\pi) = g(q_1, \dot{q}_1, q_2, \dot{q}_2, t).$$

Предполагая, что $k_2^2 > k_1^2 = 1$, решение системы (5.92) ищем в виде

$$\begin{aligned} q_1 &= a_1 \sin t + a_2 \cos t + b \sin(k_2 t + \psi), \\ q_2 &= \alpha_1 a_1 \sin t + \alpha_1 a_2 \cos t + \alpha_2 b \sin(k_2 t + \psi), \end{aligned} \quad (5.93)$$

где a_1 , a_2 , b и ψ будем считать медленно меняющимися функциями времени. Аналогично предыдущим случаям получим для определения a_1 , a_2 , b и ψ приближенные

*.) При анализе движения системы в решении (5.91) членами порядка μ следует пренебречь.

уравнения:

$$\begin{aligned} \frac{da_1}{dt} &= \frac{\mu}{2\zeta(k_2^2 - 1)} \left[\frac{A_2 - B_2}{\alpha_1} F_1^* + (A_1 - B_1) G_1^* \right], \\ \frac{da_2}{dt} &= -\frac{\mu}{2\zeta(k_2^2 - 1)} \left[\frac{A_2 - B_2}{\alpha_1} F_2^* + (A_1 - B_1) G_2^* \right], \\ \frac{db}{dt} &= -\frac{\mu}{2k_2\zeta(k_2^2 - 1)} \left[\frac{A_2 k_2^2 - B_2}{\alpha_2} F_3^* + (A_1 k_2^2 - B_1) G_3^* \right], \\ b \frac{d\psi}{dt} &= \frac{\mu}{2k_2\zeta(k_2^2 - 1)} \left[\frac{A_2 k_2^2 - B_2}{\alpha_2} F_4^* + (A_1 k_2^2 - B_1) G_4^* \right], \end{aligned} \quad (5.94)$$

где ($\xi = k_2 t + \psi$)

$$\begin{aligned} F_1^* &= \frac{1}{2\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} f^* \cos t d\xi dt, \quad G_1^* = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} g^* \cos t d\xi dt, \\ F_2^* &= \frac{1}{2\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} f^* \sin t d\xi dt, \quad G_2^* = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} g^* \sin t d\xi dt, \end{aligned} \quad (5.95)$$

$$\begin{aligned} F_3^* &= \frac{1}{2\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} f^* \cos \xi d\xi dt, \quad G_3^* = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} g^* \cos \xi d\xi dt, \\ F_4^* &= \frac{1}{2\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} f^* \sin \xi d\xi dt, \quad G_4^* = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} g^* \sin \xi d\xi dt, \end{aligned}$$

$$f^* = f(a_1 \sin t + a_2 \cos t + b \sin \xi),$$

$$a_1 \cos t - a_2 \sin t + b k_2 \cos \xi,$$

$$\alpha_1 a_1 \sin t + \alpha_1 a_2 \cos t + \alpha_2 b \sin \xi,$$

$$\alpha_1 a_1 \cos t - \alpha_1 a_2 \sin t + \alpha_2 b k_2 \cos \xi, \quad t),$$

$$g^* = g(a_1 \sin t + a_2 \cos t + b \sin \xi),$$

$$a_1 \cos t - a_2 \sin t + b k_2 \cos \xi,$$

$$\alpha_1 a_1 \sin t + \alpha_1 a_2 \cos t + \alpha_2 b \sin \xi,$$

$$\alpha_1 a_1 \cos t - \alpha_1 a_2 \sin t + \alpha_2 b k_2 \cos \xi, \quad t).$$

В качестве примера рассмотрим теорию «вынужденных» колебаний в сложном генераторе, разработанную А. Г. Маейром [21]. Пренебрегая сеточным током, можем

написать для двух контуров, схема которых представлена на рис. 5.27, уравнения Кирхгофа в виде

$$L_1 \frac{di_1}{dt} + r_1 i_1 + \frac{1}{C_1} \int_0^t i_1 dt = M \frac{di_a}{dt} + N \frac{di_2}{dt} + P_0 \sin pt, \quad (5.96)$$

$$L_2 \frac{di_2}{dt} + r_2 i_2 + \frac{1}{C_2} \int_0^t i_2 dt = N \frac{di_1}{dt}.$$

Вводя обозначения

$$v_1 = \frac{1}{C_1} \int_0^t i_1 dt, \quad v_2 = \frac{1}{C_2} \int_0^t i_2 dt$$

и принимая в качестве характеристики лампы кубическую параболу

$$i_a = S v_1 \left(1 - \frac{v_1^2}{3k^2} \right),$$

где S — так называемая крутизна характеристики лампы, k — напряжение насыщения, перепишем уравнения (5.96) в виде

$$\ddot{v}_1 + n_1^2 v_1 - NC_2 n_1^2 \ddot{v}_2 = P_0 n_1^2 \sin pt + \\ + n_1^2 \left(MS - r_1 C_1 - MS \frac{v_1^2}{k^2} \right) \dot{v}_1, \quad (5.97)$$

$$\ddot{v}_2 + n_2^2 v_2 - NC_1 n_2^2 \ddot{v}_1 = -r_2 C_2 n_2^2 \dot{v}_2,$$

где $n_1^2 = 1/(L_1 C_1)$, $n_2^2 = 1/(L_2 C_2)$. Вводя безразмерное время $\tau = pt$, безразмерные переменные

$$q_1 = \frac{v_1}{k} \sqrt{\frac{MS}{MS - r_1 C_1}}, \quad q_2 = \frac{v_2}{k} \sqrt{\frac{MS}{MS - r_2 C_2}},$$

и безразмерные параметры

$$\mu = (MS - r_1 C_1) \frac{n_1^2}{p}, \quad r = \frac{r_2}{L_2 (MS - r_1 C_1) n_1^2},$$

$$\lambda = \frac{P_0 n_1^2}{kp^2} \sqrt{\frac{MS}{MS - r_1 C_1}}, \quad \kappa_1 = NC_2 n_1^2, \quad \kappa_2 = NC_1 n_2^2,$$

приведем уравнения (5.97) к виду

$$\begin{aligned} \frac{d^2q_1}{d\tau^2} - \kappa_1 \frac{d^2q_2}{d\tau^2} + \bar{n}_1^2 q_1 &= \lambda \sin \tau + \mu (1 - q_1^2) \frac{dq_1}{d\tau}, \\ \frac{d^2q_2}{d\tau^2} - \kappa_2 \frac{d^2q_1}{d\tau^2} + \bar{n}_2^2 q_2 &= -\mu r \frac{dq_2}{d\tau}, \end{aligned} \quad (5.98)$$

где $\bar{n}_1^2 = n_1^2/p^2$, $\bar{n}_2^2 = n_2^2/p^2$. Примем, что μ есть тот малый параметр, который характеризует близость рассматриваемой системы к линейной

(так как $\mu = (MS - r_1 C_1) \frac{n_1^2}{p}$, то рассматриваемая здесь теория теряет смысл, если r достаточно мало).

Рассмотрим сначала случай, когда частота внешней силы далека от обеих нормальных частот однородной системы. Будем искать решение системы (5.98) при $\mu \neq 0$ в виде

$$\left. \begin{aligned} q_1 &= a \sin (\bar{k}_1 \tau + \beta_1) + b \sin (\bar{k}_2 \tau + \beta_2) + d_1 \sin \tau, \\ q_2 &= \alpha_1 a \sin (\bar{k}_1 \tau + \beta_1) + \alpha_2 b \sin (\bar{k}_2 \tau + \beta_2) + d_2 \sin \tau, \end{aligned} \right\} \quad (5.99)$$

где

$$\begin{aligned} \bar{k}_1 &= \frac{k_1}{p}, \quad \bar{k}_2 = \frac{k_2}{p}, \quad d_1 = \frac{\lambda (\bar{n}_2^2 - 1)}{\sigma - (\bar{n}_1^2 + \bar{n}_2^2) + \bar{n}_1^2 \bar{n}_2^2}, \\ d_2 &= \frac{\lambda \kappa_2}{\sigma - (\bar{n}_1^2 + \bar{n}_2^2) + \bar{n}_1^2 \bar{n}_2^2} \quad (\sigma = 1 - \kappa_1 \kappa_2), \end{aligned}$$

k_1 , k_2 ($k_2 > k_1$) — корни уравнения для определения нормальных частот линейной системы

$$\sigma k^4 - (n_1^2 + n_2^2) k^2 + n_1^2 n_2^2 = 0,$$

из которого следует, что $k_2^2 > n_1^2$, $k_2^2 > n_2^2$, $k_1^2 < n_1^2$, $k_1^2 < n_2^2$. Уравнения (5.57) при этом будут иметь вид

$$\begin{aligned} \frac{du}{d\tau} &= Au (a_0 - u - 2v - 2d_1^2), \\ \frac{dv}{d\tau} &= Bv (b_0 - 2u - v - 2d_1^2), \end{aligned} \quad (5.100)$$

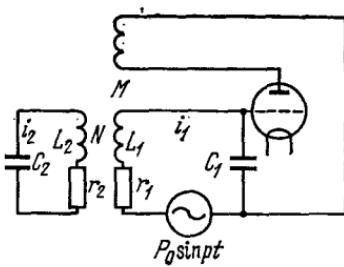


Рис. 5.27

где

$$u = a^2, \quad v = b^2, \quad A = \frac{1}{4} \frac{\mu}{\sigma} \frac{n_2^2 - k_1^2}{k_2^2 - k_1^2} > 0,$$

$$B = \frac{1}{4} \frac{\mu}{\sigma} \frac{k_2^2 - n_2^2}{k_2^2 - k_1^2} > 0,$$

$$a_0 = 4 - 4r \frac{n_1^2 - k_1^2}{n_2^2 - k_1^2}, \quad b_0 = 4 - 4r \frac{k_2^2 - n_1^2}{k_2^2 - n_2^2}.$$

Из уравнений (5.58) следует, что $\beta_1 = \text{const}$, $\beta_2 = \text{const}$. Введем обозначения:

$$\alpha_0 = a_0 - 2d_1^2, \quad \beta_0 = b_0 - 2d_1^2. \quad (5.101)$$

В соответствии с уравнениями (5.100) особые точки находятся из уравнений

$$u(\alpha_0 - u - 2v) = 0, \quad v(\beta_0 - 2u - v) = 0.$$

Так как $u = a^2$ и $v = b^2$, то мы будем рассматривать только первый квадрант плоскости uv . Особые точки будут

$$P_1: u_1 = 0, \quad v_1 = 0;$$

$$P_2: u_2 = 0, \quad v_2 = \beta_0;$$

$$P_3: u_3 = \alpha_0, \quad v_3 = 0;$$

$$P_4: u_4 = \frac{1}{3}(2\beta_0 - \alpha_0), \quad v_4 = \frac{1}{3}(2\alpha_0 - \beta_0).$$

Уравнения (5.100) при обозначениях (5.101) имеют вид уравнений (5.82), поэтому приведенные исследования характера особых точек для уравнений (5.82) справедливы и для уравнений (5.100). Из выражений (5.99) следует, что точка P_1 соответствует для исходной системы движению с частотой внешней силы, точка P_2 — движению с двумя частотами k_2 и p , точка P_3 — движению с двумя частотами k_1 и p , точка P_4 — движению с тремя частотами p , k_1 и k_2 . Но, как ранее было показано (с. 173), эта особая точка неустойчива, следовательно, движение с тремя частотами неустойчиво.

Характер особых точек при различных значениях d_1^2 показан в табл. 3. На рис. 5.26 показана картина фазовой плоскости.

Из рассмотрения этой табл. 3 легко получить как бифуркационные значения параметров, так и характер из-

менения стационарных движений генератора при увеличении амплитуды внешнего воздействия.

В случае 1 генератор из состояния покоя при $d_1 = 0$ переходит при $d_1 > 0$ к периодическому движению с частотой внешней силы.

В случаях 2 и 3 при отсутствии внешней силы ($d_1 = 0$) генератор совершает периодическое движение с частотой k_1 ; под действием внешней силы получается бигармоническое движение с частотами k_1 и p , а затем при $d_1^2 > a_0/2$ периодическое движение с частотой p .

В случае 4 при $d_1 = 0$ система может совершать любое из двух периодических движений с частотой k_1 или k_2 в зависимости от начальных условий. При малой амплитуде внешнего воздействия $d_1^2 < (2b_0 - a_0)/2$ система может совершать любое из двух бигармонических движений с частотами p и k_1 или p и k_2 ; при дальнейшем увеличении амплитуды внешнего воздействия, пока $b_0/2 > d_1^2 > (2b_0 - a_0)/2$, становится возможным лишь одно бигармоническое движение с частотами k_1 и p , а при $d_1^2 > a_0/2$ будет лишь одно периодическое движение с частотой внешней силы.

Рассмотрим теперь случай, когда $k_1 = p$. Будем считать, что в уравнениях (5.98) $\lambda = \mu\lambda_1$, где

$$\lambda_1 = \frac{P_0}{K_p(MS - r_1 C_1)} \sqrt{\frac{MS}{MS - r_1 C_1}}.$$

Решение уравнений (5.98) ищем в этом случае в виде (5.93), т. е.

$$\begin{aligned} q_1 &= a_1 \sin \tau + a_2 \cos \tau + b \sin (\bar{k}_2 \tau + \psi), \\ q_2 &= \alpha_1 a \sin \tau + \alpha_1 a_2 \cos \tau + \alpha_2 b \sin (\bar{k}_2 \tau + \psi), \end{aligned} \quad (5.102)$$

где $\bar{k}_2 = k_2/p$ и $\bar{k}_1 = k_1/p$ являются корнями уравнения

$$\sigma \bar{k}^4 - (\bar{n}_1^2 + \bar{n}_2^2) \bar{k}^2 + \bar{n}_1^2 \bar{n}_2^2 = 0.$$

Уравнения (5.94) будут иметь вид

$$\begin{aligned} \frac{du}{d\tau_1} &= u [a_0 - (u^2 + v^2 + 2w)] - 4\lambda_1, \\ \frac{dv}{d\tau_1} &= v [a_0 - (u^2 + v^2 + 2w)], \\ \frac{dw}{d\tau_1} &= Ew [b_0 - (2u^2 + 2v^2 + w)], \\ \frac{d\psi}{d\tau_1} &= 0, \text{ т. е. } \psi = \text{const}, \end{aligned} \quad (5.103)$$

Таблица 3

Случай	d_1	P_1	P_2	P_3	P_4
1 $a_0 < 0$ $b_0 < 0$	$d_1 = 0$	Устойчи- вый узел	Нет	Нет	Нет
	$d_1^2 > 0$	Устойчи- вый узел	Нет	Нет	Нет
2 $a_0 > 0$ $b_0 < 0$	$d_1 = 0$	Седло	Нет	Устойчи- вый узел	Нет
	$\frac{a_0}{2} > d_1^2 > 0$	Седло	Нет	Устойчи- вый узел	Нет
	$d_1^2 > \frac{a_0}{2}$	Устойчи- вый узел	Нет	Нет	Нет
3 $a_0 > 2b_0$ $b_0 > 0$	$d_1 = 0$	Неустой- чивый узел	Седло	Устойчи- вый узел	Нет
	$\frac{b_0}{2} > d_1^2 > 0$	Неустой- чивый узел	Седло	Устойчи- вый узел	Нет
	$\frac{a_0}{2} > d_1^2 > \frac{b_0}{2}$	Седло	Нет	Устойчи- вый узел	Нет
4 $a_0 > b_0$ $b_0 > 0$ $2b_0 > a_0$	$d_1 = 0$	Неустой- чивый узел	Устойчи- вый узел	Устойчи- вый узел	Седло
	$\frac{2b_0 - a_0}{2} > d_1^2 > 0$	Неустой- чивый узел	Устойчи- вый узел	Устойчи- вый узел	Седло
	$\frac{b_0}{2} > d_1^2 > \frac{2b_0 - a_0}{2}$	Неустой- чивый узел	Седло	Устойчи- вый узел	Нет
	$\frac{a_0}{2} > d_1^2 > \frac{b_0}{2}$	Седло	Нет	Устойчи- вый узел	Нет
	$d_1^2 > \frac{a_0}{2}$	Устойчи- вый узел	Нет	Нет	Нет
Случаи, когда $b_0 > a_0$, $2a_0 > b_0$; $b_0 > 2a_0$, $a_0 > 0$; $a_0 < 0$, $b_0 > 0$, аналогичны.					

где

$$u = a_2, v = a_1, w = b^2 > 0,$$

$$\tau_1 = \frac{\mu}{8\sigma} \frac{p^2 - n_2^2}{p^2 - k_2^2} \tau, \quad E = \frac{1}{2} \frac{n_2^2 - k_2^2}{p^2 - n_2^2} > 0,$$

$$a_0 = 4 \left(1 - r \frac{p^2 - n_1^2}{p^2 - n_2^2} \right), \quad b_0 = 4 \left(1 - r \frac{n_1^2 - k_2^2}{n_2^2 - k_2^2} \right).$$

В соответствии с выражением (5.102) можно сказать, что особые точки системы (5.103), расположенные на плоскости uv пространства uvw , соответствуют периодическим движениям генератора с частотой $p = k_1$. Особые точки, расположенные на оси w , соответствуют периодическим движениям с частотой k_2 . Особые точки, расположенные вне осей u , v и w , соответствуют бигармоническим движениям с частотами $k_1 = p$ и k_2 . Обозначив $\rho = u^2 + v^2$, получим уравнения для определения особых точек в виде

$$u^2 = \rho, \quad v = 0, \quad (5.104)$$

$$\rho [a_0 - (\rho + 2w)]^2 = 16\lambda_1^2, \quad (5.105)$$

$$w(b_0 - 2\rho - w) = 0. \quad (5.106)$$

Из этих уравнений следует, что особые точки плоскости uv расположены на оси u и определяются уравнением

$$\rho(a_0 - \rho)^2 = 16\lambda_1^2, \quad (5.107)$$

которое одновременно определяет амплитудную кривую соответствующих периодических движений частоты $k_1 = p$.

Напомним, что устойчивость состояния равновесия $x = x_0, y = y_0, z = z_0$ системы уравнений

$$\frac{dx}{dt} = P_1(x, y, z), \quad \frac{dy}{dt} = P_2(x, y, z), \quad \frac{dz}{dt} = P_3(x, y, z)$$

определяется корнями характеристического уравнения

$$\begin{vmatrix} P'_{1x}(x_0, y_0, z_0) - S & P'_{1y}(x_0, y_0, z_0) & P'_{1z}(x_0, y_0, z_0) \\ P'_{2x}(x_0, y_0, z_0) & P'_{2y}(x_0, y_0, z_0) - S & P'_{2z}(x_0, y_0, z_0) \\ P'_{3x}(x_0, y_0, z_0) & P'_{3y}(x_0, y_0, z_0) & P'_{3z}(x_0, y_0, z_0) - S \end{vmatrix} = 0.$$

В нашем случае это уравнение принимает вид

$$[E(b_0 - 2R^2) - S][(a_0 - 3R^2) - S][(a_0 - R^2) - S] = 0,$$

где $R^2 = \rho$. Корни этого уравнения равны

$$S_1 = E(b_0 - 2R^2), \quad S_2 = a_0 - 3R^2, \quad S_3 = a_0 - R^2.$$

Особая точка будет устойчивой, если корни S_1 , S_2 и S_3 будут отрицательными, следовательно, условиями устойчивости будут неравенства $R^2 > b_0/2$, $R^2 > a_0$. На оси w , как это видно из уравнения (5.105), особых точек нет. Это означает, что при действии на генератор внешней силы с частотой $p = k_1$ периодическое движение частоты k_2 невозможно. Особые точки, расположенные вне осей и соответствующие бигармоническим движениям, определяются уравнениями (5.105) и (5.106). Квадрат амплитуды этих движений равен

$$R^2 = w + \rho = b_0 - \rho.$$

Если это выражение подставить в уравнение (5.105), то получится уравнение резонансной кривой

$$(b_0 - R^2)(a_0 + b_0 - 3R^2)^2 = 16\lambda_1^2. \quad (5.108)$$

Так как $w = b_0 - 2\rho$, $R^2 = b_0 - \rho$, то уравнение (5.108) имеет смысл только для $b_0/2 < R^2 < b_0$.

Характеристическое уравнение для этих движений имеет вид

$$(S - a_0 - b_0 + 3R^2)\{S^2 + S[E(2R^2 - b_0) + \\ + b_0 - a_0 + R^2] + E(2R^2 - b_0)[9R^2 - (a_0 + 7b_0)]\} = 0.$$

Из этого уравнения следует, что для действительных движений ($R^2 > b_0/2$) при $R^2 > (a_0 + 7b_0)/9$ особые точки будут устойчивы.

Уравнение резонансной кривой периодических движений (5.107) может быть записано в виде

$$R^2(a_0 - R^2)^2 = 16\lambda_1^2$$

$$\text{или} \quad y(a_0 - y)^2 = x, \quad (5.109)$$

где $y = R^2 > 0$, $x = 16\lambda_1^2 > 0$. Рассмотрим плоскость xy . На основании формулы (5.109) получаем

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{(a_0 - y)(a_0 - 3y)}.$$

Отсюда следует, что кривая (5.109) имеет вертикальные касательные в точках $x = 0$, $y = a_0$, $x_1 = 4(a_0/3)^2$, $y_1 =$

$= a_0/3$, кроме того, при $x = 0$ $y = 0$ или $y = a_0$. При $a_0 < 0$ кривая (5.109) вертикальных касательных не имеет, так как всегда $x > 0$, $y > 0$.

Уравнение резонансной кривой бигармонических движений в тех же обозначениях имеет вид

$$(b_0 - y)(a_0 + b_0 - 3y)^2 = x. \quad (5.109')$$

При $x = 0$ $y = b_0$ или $y = (a_0 + b_0)/3$. Из выражения (5.109') следует, что

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{(a_0 + b_0 - 3y)(9y - a_0 - 7b_0)}.$$

Следовательно, кривая (5.109') имеет вертикальные касательные в точках

$$x = 0, y = \frac{a_0 + b_0}{3} \text{ и } x_2 = \frac{4}{81}(2b_0 - a_0)^3, \quad y_2 = \frac{a_0 + 7b_0}{9}.$$

При $y_3 = b_0/2$

$$x_3 = \frac{b_0}{8}(2a_0 - b_0)^2.$$

Рассмотрим теперь состояния генератора при изменении амплитуды внешнего воздействия. Так как $x = 16\lambda_1^2$,

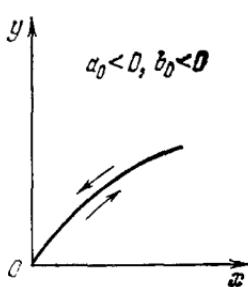


Рис. 5.28

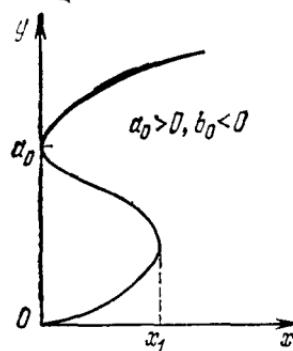


Рис. 5.29

то изменение x характеризует и изменение λ_1 . Приведем несколько характерных случаев.

1. $a_0 < 0, b_0 < 0$ или $a_0 > 0, b_0 < 0$. Генератор совершает периодическое движение с частотой $p = k_1$. Бигармонических движений нет. Эти случаи представлены соответственно на рис. 5.28 и 5.29.

2. $a_0 < 0, b_0 > 0$. Здесь возможны два варианта: $y_2 < y_3$, когда $2a_0 + 5b_0 < 0$, и $y_2 > y_3$, когда $2a_0 + 5b_0 > 0$;

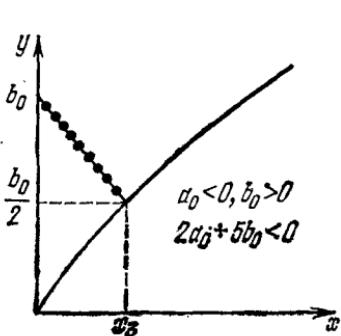


Рис. 5.30

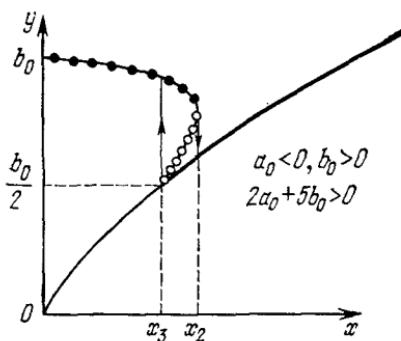


Рис. 5.31

а) $y_2 < y_3$ ($2a_0 + 5b_0 < 0$). Генератор при $x < x_3$ совершают бигармоническое движение с частотами $p = k_1$ и k_2 , при $x > x_3$ будет только гармоническое движение частоты $p = k_1$ (рис. 5.30).

б) $y_2 > y_3$ ($2a_0 + 5b_0 > 0$). Устойчивое бигармоническое движение возможно при $x < x_2$. Периодическое с

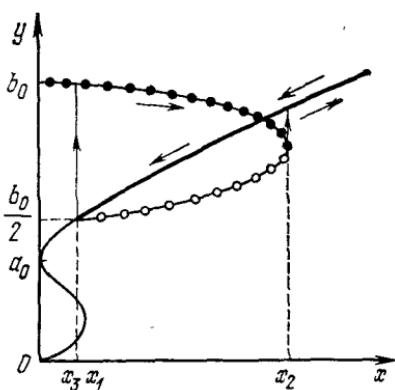


Рис. 5.32

частотой $p = k_1$ возможно при $x > x_3$. Таким образом, здесь возможно затягивание по x в промежутке $x_3 < x < x_2$ (рис. 5.31).

3. $0 < b_0 < a_0/2$. Этот случай в отношении устойчивых движений совпадает со случаем $a_0 > 0, b_0 < 0$.

4. $0 < a_0 < b_0/2$. Этот случай представлен на рис. 5.32. При $x < x_3$ возможно устойчивое бигармоническое движение с

частотами $p = k_1$ и k_2 ; при $x_3 < x < x_2$ возможны как бигармоническое движение с частотами $p = k_1$ и k_2 , так и периодическое движение с частотой $p = k_1$. При $x > x_2$ возможно только периодическое движение с частотой $p = k_1$.

5. $2a_0 > b_0 > 0$. Здесь при $x < x_2$ возможны устойчивое бигармоническое движение с частотами $p = k_1$ и

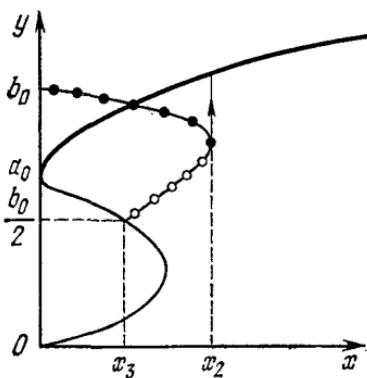


Рис. 5.33

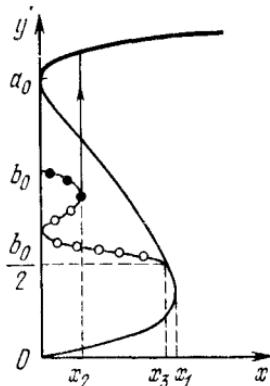


Рис. 5.34

k_2 и периодическое с частотой $p = k_1$; при $x > x_2$ — только периодическое с частотой $p = k_1$ (рис. 5.33).

6. $2b_0 > a_0 > 0$. При $x < x_2$ возможны устойчивое бигармоническое движение с частотами $p = k_1$ и k_2 и периодическое с частотой $p = k_1$; при $x > x_2$ возможно только периодическое движение с частотой $p = k_1$ (рис. 5.34).

§ 6. Неавтономные динамические системы с гироскопическими силами [10, 11, 7]

Пусть уравнения динамической системы имеют вид

$$\begin{aligned} \ddot{q}_1 - \kappa_1 \dot{q}_2 \pm n_1^2 q_1 &= \mu f(q_1, \dot{q}_1, q_2, \dot{q}_2) + \\ &\quad + D_1 \sin t + E_1 \cos t, \quad (5.110) \\ \ddot{q}_2 + \kappa_2 \dot{q}_1 \pm n_2^2 q_2 &= \mu g(q_1, \dot{q}_1, q_2, \dot{q}_2) + \\ &\quad + D_2 \sin t + E_2 \cos t. \end{aligned}$$

При $\mu = 0$ эта система уравнений имеет решение

$$\begin{aligned} q_1 &= a \sin(k_1 t + \beta_1) + b \sin(k_2 t + \beta_2) + \\ &\quad + d_1 \sin t + e_1 \cos t, \quad (5.111) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} q_2 &= \alpha_1 a \cos(k_1 t + \beta_1) + \alpha_2 b \cos(k_2 t + \beta_2) + \\ &\quad + d_2 \sin t + e_2 \cos t, \end{aligned}$$