

5. $2a_0 > b_0 > 0$. Здесь при $x < x_2$ возможны устойчивое бигармоническое движение с частотами $p = k_1$ и

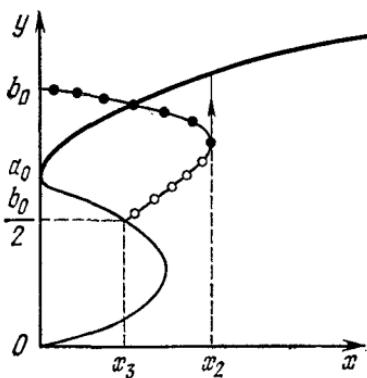


Рис. 5.33

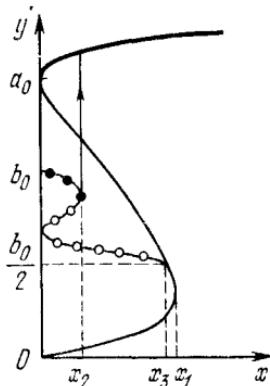


Рис. 5.34

k_2 и периодическое с частотой $p = k_1$; при $x > x_2$ — только периодическое с частотой $p = k_1$ (рис. 5.33).

6. $2b_0 > a_0 > 0$. При $x < x_2$ возможны устойчивое бигармоническое движение с частотами $p = k_1$ и k_2 и периодическое с частотой $p = k_1$; при $x > x_2$ возможно только периодическое движение с частотой $p = k_1$ (рис. 5.34).

§ 6. Неавтономные динамические системы с гироколическими силами [10, 11, 7]

Пусть уравнения динамической системы имеют вид

$$\begin{aligned} \ddot{q}_1 - \kappa_1 \dot{q}_2 \pm n_1^2 q_1 &= \mu f(q_1, \dot{q}_1, q_2, \dot{q}_2) + \\ &\quad + D_1 \sin t + E_1 \cos t, \quad (5.110) \\ \ddot{q}_2 + \kappa_2 \dot{q}_1 \pm n_2^2 q_2 &= \mu g(q_1, \dot{q}_1, q_2, \dot{q}_2) + \\ &\quad + D_2 \sin t + E_2 \cos t. \end{aligned}$$

При $\mu = 0$ эта система уравнений имеет решение

$$\begin{aligned} q_1 &= a \sin(k_1 t + \beta_1) + b \sin(k_2 t + \beta_2) + \\ &\quad + d_1 \sin t + e_1 \cos t, \quad (5.111) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} q_2 &= \alpha_1 a \cos(k_1 t + \beta_1) + \alpha_2 b \cos(k_2 t + \beta_2) + \\ &\quad + d_2 \sin t + e_2 \cos t, \end{aligned}$$

где k_1 и k_2 — частоты линейной однородной системы — корни уравнения (5.77), α_1 и α_2 определяются формулами (5.78),

$$d_1 = \frac{-(1 \mp n_2^2) D_1 - \kappa_1 E_2}{\Delta}, \quad e_1 = \frac{-E_1(1 \mp n_2^2) + \kappa_1 D_2}{\Delta},$$

$$d_2 = \frac{-D_2(1 \mp n_1^2) + \kappa_2 E_1}{\Delta}, \quad e_2 = \frac{-(1 \mp n_1^2) E_2 - \kappa_2 D_1}{\Delta},$$

$$\Delta = 1 + (\mp n_1^2 \mp n_2^2 - \kappa_1 \kappa_2) + n_1^2 n_2^2.$$

Если искать решение системы уравнений (5.110) при $\mu \neq 0$ в виде (5.111), считая a , b , β_1 и β_2 медленно меняющимися функциями времени, то приближенные уравнения для определения a , b , β_1 и β_2 будут

$$\begin{aligned} \frac{da}{d\tau} &= \frac{1}{n_1^3} \left(\kappa_1 G_1 - \frac{\kappa_2}{\alpha_1} F_1 \right), \\ \frac{db}{d\tau} &= -\frac{1}{n_1^3} \left(\kappa_1 G_2 - \frac{\kappa_2}{\alpha_2} F_2 \right), \\ \frac{d\beta_1}{d\tau} &= \frac{1}{an_1^3} \left(\kappa_1 G_3 + \frac{\kappa_2}{\alpha_1} F_3 \right), \\ \frac{d\beta_2}{d\tau} &= -\frac{1}{bn_1^3} \left(\kappa_1 G_4 + \frac{\kappa_2}{\alpha_2} F_4 \right), \end{aligned} \quad (5.112)$$

где $\tau = \frac{\mu n_1^3 t}{2(k_2^2 - k_1^2)}$ ($k_2 > k_1$),

$$F_1 = \frac{1}{4\pi^3} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} f^* \cos \xi d\xi d\eta dt,$$

$$F_2 = \frac{1}{4\pi^3} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} f^* \cos \eta d\xi d\eta dt,$$

$$F_3 = \frac{1}{4\pi^3} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} f^* \sin \xi d\xi d\eta dt,$$

$$F_4 = \frac{1}{4\pi^3} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} f^* \sin \eta d\xi d\eta dt,$$

$$G_1 = \frac{1}{4\pi^3} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} g^* \sin \xi d\xi d\eta dt,$$

$$G_2 = \frac{1}{4\pi^3} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} g^* \sin \eta d\xi d\eta dt, \quad (5.113)$$

$$G_3 = \frac{1}{4\pi^3} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} g^* \cos \xi d\xi d\eta dt,$$

$$G_4 = \frac{1}{4\pi^3} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} g^* \cos \eta d\xi d\eta dt,$$

$$f^* = f(a \sin \xi + b \sin \eta + d_1 \sin t + e_1 \cos t,$$

$$ak_1 \cos \xi + bk_2 \cos \eta + d_1 \cos t - e_1 \sin t,$$

$$\alpha_1 a \cos \xi + \alpha_2 b \cos \eta + d_2 \sin t + e_2 \cos t,$$

$$-\alpha_1 ak_1 \sin \xi - \alpha_2 bk_2 \sin \eta + d_2 \cos t - e_2 \sin t),$$

$$g^* = g(a \sin \xi + b \sin \eta + d_1 \sin t + e_1 \cos t,$$

$$ak_1 \cos \xi + bk_2 \cos \eta + d_1 \cos t - e_1 \sin t,$$

$$\alpha_1 a \cos \xi + \alpha_2 b \cos \eta + d_2 \sin t + e_2 \cos t,$$

$$-\alpha_1 ak_1 \sin \xi - \alpha_2 bk_2 \sin \eta + d_2 \cos t - e_2 \sin t),$$

$$\xi = k_1 t + \beta_1, \quad \eta = k_2 t + \beta_2.$$

Рассмотрим теперь случаи, когда одна из нормальных частот будет совпадать с частотой внешнего воздействия. При этом будем предполагать, что амплитуда внешнего воздействия имеет порядок μ . Уравнения движения при этом могут быть записаны в виде

$$\begin{aligned} \ddot{q}_1 - \kappa_1 \dot{\zeta}_2 \pm n_1^2 q_1 &= \mu f(q_1, \zeta_1, q_2, \dot{\zeta}_2, t), \\ \ddot{q}_2 + \kappa_2 \dot{\zeta}_1 \pm n_2^2 q_2 &= \mu g(q_1, \zeta_1, q_2, \dot{\zeta}_2, t), \end{aligned} \quad (5.114)$$

где нелинейные функции f и g обладают свойством

$$f(q_1, \zeta_1, q_2, \dot{\zeta}_2, t + 2\pi) = f(q_1, \zeta_1, q_2, \dot{\zeta}_2, t),$$

$$g(q_1, \zeta_1, q_2, \dot{\zeta}_2, t + 2\pi) = g(q_1, \zeta_1, q_2, \dot{\zeta}_2, t).$$

Полагая $k_2^2 > k_1^2 = 1$, будем искать решения уравнений (5.114) в виде

$$q_1 = a_1 \sin t + a_2 \cos t + b \sin(k_2 t + \psi), \quad (5.115)$$

$$q_2 = \alpha_1 a_1 \cos t - \alpha_1 a_2 \sin t + \alpha_2 b \cos(k_2 t + \psi),$$

где a_1, a_2, b и ψ — медленно меняющиеся функции времени. Приближенные уравнения для определения a_1, a_2 ,

b и ψ в этом случае будут

$$\begin{aligned}\frac{da_1}{d\tau} &= -\frac{1}{n_1^3} \left[\frac{\kappa_2}{\alpha_1} F_1 - \kappa_1 G_1 \right], \\ \frac{da_2}{d\tau} &= \frac{1}{n_1^3} \left[\frac{\kappa_2}{\alpha_1} F_2 + \kappa_1 G_2 \right], \\ \frac{db}{d\tau} &= \frac{1}{n_1^3} \left[\frac{\kappa_2}{\alpha_2} F_3 - \kappa_1 G_3 \right], \\ b \frac{d\psi}{d\tau} &= -\frac{1}{n_1^3} \left[\frac{\kappa_2}{\alpha_2} F_4 + \kappa_1 G_4 \right],\end{aligned}\tag{5.116}$$

где $\tau = \frac{\mu n_1^3 t}{2(k_2^2 - 1)}$,

$$\begin{aligned}F_1 &= \frac{1}{2\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} f^* \cos t d\eta dt, \quad G_1 = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} g^* \sin t d\eta dt, \\ F_2 &= \frac{1}{2\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} f^* \sin t d\eta dt, \quad G_2 = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} g^* \cos t d\eta dt,\end{aligned}\tag{5.117}$$

$$\begin{aligned}F_3 &= \frac{1}{2\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} f^* \cos \eta d\eta dt, \quad G_3 = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} g^* \sin \eta d\eta dt, \\ F_4 &= \frac{1}{2\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} f^* \sin \eta d\eta dt, \quad G_4 = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} g^* \cos \eta d\eta dt,\end{aligned}$$

$$\eta = k_2 t + \psi,$$

$$f^* = f(a_1 \sin t + a_2 \cos t + b \sin \eta),$$

$$\begin{aligned}a_1 \cos t - a_2 \sin t + b k_2 \cos \eta, \quad \alpha_1 a_1 \cos t - \alpha_1 a_2 \sin t + \\ + a_2 b \cos \eta, \quad -\alpha_1 a_1 \sin t - \alpha_1 a_2 \cos t - \alpha_2 b k_2 \sin \eta),\end{aligned}$$

$$g^* = g(a_1 \sin t + a_2 \cos t + b \sin \eta),$$

$$a_1 \cos t - a_2 \sin t + b k_2 \cos \eta,$$

$$\alpha_1 a_1 \cos t - \alpha_1 a_2 \sin t + a_2 b \cos \eta,$$

$$-\alpha_1 a_1 \sin t - \alpha_1 a_2 \cos t - \alpha_2 b k_2 \sin \eta).$$

Если $k_1^2 < k_2^2 = 1$, то решение следует искать в виде

$$q_1 = a \sin(k_1 t + \psi) + b_1 \sin t + b_2 \cos t, \tag{5.118}$$

$$q_2 = \alpha_1 a \cos(k_1 t + \psi) + \alpha_2 b_1 \cos t - \alpha_2 b_2 \sin t.$$

Приближенные уравнения для определения медленно ме-

няющихся функций времени a_1, b_1, b_2 и ψ будут

$$\begin{aligned}\frac{db_1}{d\tau} &= \frac{1}{n_1^3} \left(\frac{\kappa_2}{\alpha_2} F_1 - \kappa_1 G_1 \right), \\ \frac{db_2}{d\tau} &= -\frac{1}{n_1^3} \left(\frac{\kappa_2}{\alpha_2} F_2 + \kappa_1 G_2 \right), \\ \frac{da}{d\tau} &= -\frac{1}{n_1^3} \left(\frac{\kappa_2}{\alpha_1} F_3 - \kappa_1 G_3 \right), \\ a \frac{d\psi}{d\tau} &= \frac{1}{n_1^3} \left(\frac{\kappa_2}{\alpha_1} F_4 + \kappa_1 G_4 \right),\end{aligned}\tag{5.119}$$

где $\tau = \frac{\mu n_1^3 f}{2(1 - k_1^2)}$, величины $F_1, \dots, F_4, G_1, \dots, G_4$ определяются по формулам (5.117), в которых $\eta = k_1 t + \psi$, $f^* = f(a \sin \eta + b_1 \sin t + b_2 \cos t)$,

$$\begin{aligned}ak_1 \cos \eta + b_1 \cos t - b_2 \sin t, \\ \alpha_1 a \cos \eta + \alpha_2 b_1 \cos t - \alpha_2 b_2 \sin t, \\ -\alpha_1 a k_1 \sin \eta - \alpha_2 b_1 \sin t - \alpha_2 b_2 \cos t),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}g^* = g(a \sin \eta + b_1 \sin t + b_2 \cos t, \\ ak_1 \cos \eta + b_1 \cos t - b_2 \sin t, \\ \alpha_1 a \cos \eta + \alpha_2 b_1 \cos t - \alpha_2 b_2 \sin t, \\ -\alpha_1 a k_1 \sin \eta - \alpha_2 b_1 \sin t - \alpha_2 b_2 \cos t).\end{aligned}$$

В качестве примера рассмотрим поведение гироскопического маятника, рассмотренного в § 5 гл. 4, при действии на него внешней синусоидальной силы $Q' \sin pt^*$). Уравнения движения маятника в этом случае будут иметь вид

$$\begin{aligned}\ddot{\alpha} - \kappa_1 \dot{\beta} + n_1^2 \alpha &= \mu n_1 (-\lambda_1 \dot{\alpha}) + \frac{Q'}{I_0} \sin pt, \\ \ddot{\beta} + \kappa_2 \dot{\alpha} + n_2^2 \beta &= \mu n_1 (\dot{\beta} - \lambda_2 \dot{\beta}^3),\end{aligned}$$

где сохранены те же обозначения, что и в § 5 гл. 4.

Введя $\tau = pt$, получим

$$\begin{aligned}\frac{d^2\alpha}{d\tau^2} - \bar{\kappa}_1 \frac{d\beta}{d\tau} + \bar{n}_1^2 \alpha &= \mu \bar{n}_1 \left(-\lambda_1 \frac{d\alpha}{d\tau} \right) + Q \sin \tau, \\ \frac{d^2\beta}{d\tau^2} + \bar{\kappa}_2 \frac{d\alpha}{d\tau} + \bar{n}_2^2 \beta &= \mu \bar{n}_1 \left(\frac{d\beta}{d\tau} - \lambda'_2 \frac{d^3\beta}{d\tau^3} \right),\end{aligned}\tag{5.120}$$

*) Задача о вынужденных колебаниях системы двух колебательных контуров типа Ван-дер-Поля в условиях гироскопической связи с применением приведенного здесь метода решалась Дельшамбром [17].

где

$$Q = \frac{Q'}{I_0 p^2}, \quad \bar{\kappa}_1 = \frac{\kappa_1}{p}, \quad \bar{\kappa}_2 = \frac{\kappa_2}{p}, \quad \bar{n}_1^2 = \frac{n_1^2}{p^2}, \quad \bar{n}_2^2 = \frac{n_2^2}{p^2}, \quad \lambda'_2 = \lambda_2 p^2.$$

Уравнения (5.120) имеют вид уравнений (5.110). Поэтому, если искать решение этих уравнений в виде

$$\alpha = a \sin (\bar{k}_1 \tau + \beta_1) + b \sin (\bar{k}_2 \tau + \beta_2) + d_1 \sin \tau, \quad (5.121)$$

$$\beta = \alpha_1 a \cos (\bar{k}_1 \tau + \beta_1) + \alpha_2 b \cos (\bar{k}_2 \tau + \beta_2) + e_2 \cos \tau,$$

где

$$d_1 = \frac{(\bar{n}_2^2 - 1) Q}{\Delta}, \quad e_2 = \frac{-\bar{\kappa}_2 Q}{\Delta},$$

$$\Delta = 1 - (\bar{n}_1^2 + \bar{n}_2^2 + \bar{\kappa}_1 \bar{\kappa}_2) + \bar{n}_1^2 \bar{n}_2^2,$$

то получим для определения a , b , β_1 и β_2 следующие уравнения:

$$\frac{du}{d\tau_1} = Au [\alpha_0 - u - 2v], \quad \frac{dv}{d\tau_1} = Bv [\beta_0 - 2u - v], \quad (5.122)$$

$$\beta_1 = \text{const}, \quad \beta_2 = \text{const},$$

где

$$u = \alpha_1^2 a^2 k_1^2, \quad v = \alpha_2^2 b^2 k_2^2, \quad \alpha_0 = a_0 - 2e_2^2, \quad \beta_0 = b_0 - 2e_2^2,$$

$$a_0 = \frac{4}{3\lambda_2} \left(1 - \lambda_1 \frac{k_1^2 - n_2^2}{k_1^2 - n_1^2} \right), \quad b_0 = \frac{4}{3\lambda_2} \left(1 - \lambda_1 \frac{k_2^2 - n_1^2}{k_2^2 - n_1^2} \right),$$

$$A = \frac{3}{2} \lambda_2 \frac{n_1^2 - k_1^2}{n_1^2} > 0, \quad B = \frac{3}{2} \lambda_2 \frac{k_2^2 - n_1^2}{n_1^2} > 0,$$

$$\tau_1 = \frac{\mu n_1^3 \tau}{k_2^2 - k_1^2}.$$

Уравнения (5.122) совпадут с уравнениями (5.100), если там использовать обозначения (5.101) и заменить d_1^2 на e_2^2 . Следовательно, все выводы, сделанные при исследовании уравнений (5.100), справедливы и для уравнений (5.122), т. е. особые точки и их зависимость от a_0 , b_0 и e_2^2 (амплитуды внешнего воздействия) будут те же самые (см. табл. 3).

В случае 1 ($a_0 < 0$, $b_0 < 0$) исходная динамическая система при отсутствии внешней силы находится в равновесии. При включении внешней силы система переходит к периодическому движению с частотой внешней силы.

В случае 2 ($a_0 > 0$, $b_0 < 0$) или 3 ($a_0 > 2b_0$, $b_0 > 0$) система при отсутствии внешней силы совершает периодическое движение с частотой k_1 . При включении внешней силы система совершает устойчивое бигармоническое движение с частотами k_1 и p (частота внешней силы). При дальнейшем увеличении амплитуды внешней силы (при $e_2^2 > a_0/2$) система переходит к периодическому движению с частотой внешней силы.

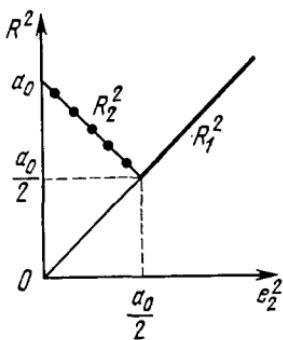


Рис. 5.35

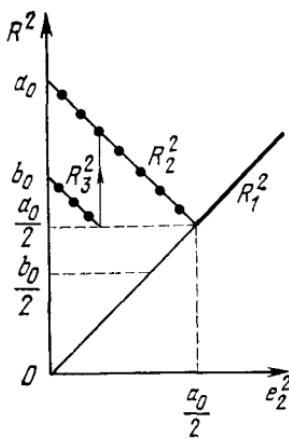


Рис. 5.36

На рис. 5.35 представлены суммы квадратов амплитуд бигармонического движения для случаев 2 и 3 ($R_2^2 = a_0 - 2e_2^2 + e_2^2 = a_0 - e_2^2$) и квадрат амплитуды периодического движения ($R_1^2 = e_2^2$); части рисунка, соответствующие устойчивым движениям, выделены жирно.

В случае 3 ($a_0 > b_0$, $b_0 > 0$, $2b_0 > a_0$), в отсутствие внешней силы, система может совершать любое из двух устойчивых периодических движений с частотами k_1 или k_2 в зависимости от начальных условий. При включении внешней силы возможны бигармонические движения с частотами k_1 и p или k_2 и p . При дальнейшем увеличении амплитуды внешней силы в системе возможно только бигармоническое движение с частотами k_1 и p . При $e_2^2 > a_0/2$ система совершает периодическое движение с частотой p .

На рис. 5.36 представлена сумма квадратов амплитуд бигармонических движений $R_2^2 = a_0 - e_2^2$, $R_3^2 = b_0 - e_2^2$

и квадрат амплитуды периодического движения $R_1^2 = e_2^2$ (устойчивые части выделены жирно).

Рассмотрим теперь случай, когда $\bar{k}_1^2 < \bar{k}_2^2 = 1$ *). Предполагая, что амплитуда Q' внешнего воздействия имеет порядок μ , перепишем уравнения движения (5.120) в виде

$$\begin{aligned} \frac{d^2\alpha}{d\tau^2} - \bar{\kappa}_1 \frac{d\beta}{d\tau} + \bar{n}_1^2 \alpha &= \mu \bar{n}_1 \left(-\lambda_1 \frac{d\alpha}{d\tau} + Q_1 \sin \tau \right), \\ \frac{d^2\beta}{d\tau^2} + \bar{\kappa}_2 \frac{d\alpha}{d\tau} + \bar{n}_2^2 \beta &= \mu \bar{n}_1 \left(\frac{d\beta}{d\tau} - \lambda'_2 \frac{d^3\beta}{d\tau^3} \right), \end{aligned} \quad (5.123)$$

где

$$Q_1 = \frac{Q' I_1 n_1}{I_0 p^3 (c_1 - \gamma'')}.$$

Решение уравнений (5.123) будем искать в виде (5.118), т. е.

$$\begin{aligned} \alpha &= a \sin (\bar{k}_1 \tau + \psi) + b_1 \sin \tau + b_2 \cos \tau, \\ \beta &= \alpha_1 a \cos (\bar{k}_1 \tau + \psi) + \alpha_2 b_1 \cos \tau - \alpha_2 b_2 \sin \tau. \end{aligned} \quad (5.124)$$

Уравнения (5.119) в этом случае будут

$$\begin{aligned} \frac{du}{d\tau_1} &= u [b_0 - (u^2 + v^2 + 2w)] - \lambda, \\ \frac{dv}{d\tau_1} &= v [b_0 - (u^2 + v^2 + 2w)], \\ \frac{dw}{d\tau_1} &= Ew [a_0 - (w + 2u^2 + 2v^2)], \\ \psi &= \text{const}, \end{aligned} \quad (5.125)$$

где

$$\begin{aligned} u &= \alpha_2 b, \quad v = \alpha_1 b_1, \quad w = \alpha_1^2 k_1^2 a^2, \quad \tau_1 = \frac{3\mu n_1}{4\lambda'_2} \cdot \frac{p^2 - n_1^2}{p^2 - k_1^2} \tau, \\ E &= 2 \frac{n_1^2 - k_1^2}{p^2 - n_1^2} > 0, \quad \lambda = \frac{4}{3\lambda'_2} Q_1, \\ a_0 &= \frac{4}{3\lambda'_2} \left(1 - \lambda_1 \frac{k_1^2 - n_2^2}{k_1^2 - n_1^2} \right), \quad b_0 = \frac{4}{3\lambda'_2} \left(1 - \lambda_1 \frac{p^2 - n_2^2}{p^2 - n_1^2} \right). \end{aligned}$$

Особые точки системы (5.125), расположенные на плоскости uv пространства uvw , соответствуют периодическим движениям маятника с частотой $p = k_2$. Особые точки на

*) Исследование случая $\bar{k}_2^2 > \bar{k}_1^2 = 1$ приведет к тем же результатам, что и при рассмотрении сложного генератора (§ 5 гл. 5).

оси w — периодическим движениям с частотой k_1 . Особые точки, расположенные вне осей, соответствуют бигармоническим движениям с частотами k_1 и $k_2 = p$. Введем обозначение $\rho = u^2 + v^2$. Тогда уравнения для определения особых точек можно записать в виде

$$u^2 = \rho, \quad v = 0, \quad \rho [b_0 - (\rho + 2w)]^2 = \lambda^2,$$

$$w [a_0 - 2\rho - w] = 0.$$

Эти уравнения по форме совпадают с уравнениями (5.104) — (5.106), поэтому для анализа движения системы мы воспользуемся результатами исследования уравнений (5.103).

Рассмотрим наиболее характерные случаи.

1. $a_0 < 0, b_0 < 0$ или $a_0 > 0, b_0 > 0$. Маятник совершает периодические движения с частотой $p = k_2$. Бигармонические движения отсутствуют.

2. $a_0 > 0, b_0 < 0$. Возможны два варианта:

а) $2b_0 + 5a_0 < 0$. Маятник при $\lambda^2 < \lambda_3^2$ ($\lambda_3^2 = \frac{a_0}{8} (2b_0 - a_0)^2$)

совершает бигармоническое движение с частотами k_1 и $p = k_2$; при $\lambda^2 > \lambda_3^2$ будет только гармоническое движение с частотой $p = k_2$.

б) $2b_0 + 5a_0 > 0$. Устойчивое бигармоническое движение возможно при $\lambda^2 < \lambda_2^2$ ($\lambda_2^2 = \frac{4}{81} (2a_0 - b_0)^3$). Периодическое движение с частотой $p = k_2$ возможно при $\lambda^2 > \lambda_3^2$. Здесь имеет место затягивание по λ^2 в промежутке $\lambda_3^2 < \lambda^2 < \lambda_2^2$.

3. $0 < a_0 < b_0/2$. В отношении устойчивости этот случай совпадает со случаем $a_0 < 0, b_0 > 0$.

4. $0 < b_0 < a_0/2$. При $\lambda^2 < \lambda_3^2$ возможно устойчивое бигармоническое движение с частотами k_1 и $p = k_2$; при $\lambda_3^2 < \lambda^2 < \lambda_2^2$ возможны как бигармоническое движение с частотами k_1 и $k_2 = p$, так и периодическое движение с частотой $p = k_2$. При $\lambda^2 > \lambda_2^2$ возможно только периодическое движение с частотой $p = k_2$.

5. $2b_0 > a_0 > 0$. При $\lambda^2 < \lambda_2^2$ возможно устойчивое бигармоническое движение с частотами k_1 и $p = k_2$; при $\lambda^2 > \lambda_2^2$ устойчиво только периодическое движение с частотой $p = k_2$.

6. $2a_0 > b_0 > 0$. При $\lambda^2 < \lambda_1^2$ возможно устойчивое бигармоническое движение с частотами k_1 и $p = k_2$ и при $\lambda^2 > \lambda_2^2$ — только периодическое движение с частотой $p = k_2$.

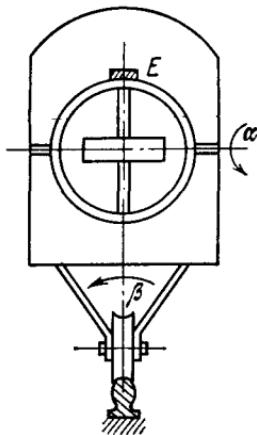


Рис. 5.37

Более подробно. Уравнения малых колебаний такой механической системы будут (рис. 5.37)

$$A_0 \frac{d^2\alpha}{dt^2} - I\omega \frac{d\beta}{dt} - ph_1\alpha = -\gamma'' \frac{d\alpha}{dt} + M_\alpha \left(\frac{d\alpha}{dt} \right),$$

$$I_0 \frac{d^2\beta}{dt^2} + I\omega \frac{d\alpha}{dt} - Ph_2\beta = -\gamma' \frac{d\beta}{dt} + Q' \sin qt,$$

где

$$A_0 = A' + B' + \frac{p}{g} h_1^2,$$

$$I_0 = I_v + \frac{Q_1 + Q_2}{g} h^2 + A' + C_1 + \frac{p}{g} (h + h_1)^2,$$

α — угол поворота кольца гироскопа, β — угол отклонения вагона от вертикали, ω — собственная угловая скорость гироскопа, I_v — момент инерции вагона относительно рельса, A' — экваториальный момент инерции гироскопа; B' — экваториальный момент инерции кольца, I — полярный момент инерции гироскопа, C_1 — полярный момент инерции кольца, Q_1 — вес гироскопа, Q_2 — вес рамы, p — вес груза E , P — вес системы (без груза), γ' , γ'' — коэффициенты вязкого трения, M_α — стабилизирующий момент, h — расстояние от оси вращения кольца гироскопа до рельса, h_1 — расстояние от оси вращения кольца до груза E , создающего неустойчивость изображенного на

рис. 5.37 положения кольца, h_2 — расстояние от центра тяжести системы (без груза) до рельса, $Q' \sin qt$ — внешняя сила, действующая на вагон.

Вводя обозначения

$$\kappa_1 = \frac{I\omega}{A_0}, \quad \kappa_2 = \frac{I\omega}{I_0}, \quad n_1^2 = \frac{ph_1}{A_0}, \quad n_2^2 = \frac{Ph_2}{I_0}, \quad \tau = qt$$

и принимая

$$M_\alpha = \left[\alpha' - \beta' \left(\frac{d\alpha}{dt} \right)^2 \right] \frac{d\alpha}{d\tau} = \left[\alpha' - \beta' q^2 \left(\frac{d\alpha}{d\tau} \right)^2 \right] q \frac{d\alpha}{d\tau}$$

$$(\alpha' > 0, \beta' > 0),$$

перепишем уравнения движения в виде

$$\frac{d^2\alpha}{d\tau^2} - \frac{\kappa_1}{q} \frac{d\beta}{d\tau} - \frac{n_1^2}{q^2} \alpha = - \frac{\gamma''}{A_0 q} \frac{d\alpha}{d\tau} +$$

$$+ \frac{1}{A_0 q} \left[\alpha' - \beta' q^2 \left(\frac{d\alpha}{d\tau} \right)^2 \right] \frac{d\alpha}{d\tau},$$

$$\frac{d^2\beta}{d\tau^2} + \frac{\kappa_2}{q} \frac{d\alpha}{d\tau} - \frac{n_2^2}{q^2} \beta = - \frac{\gamma'}{I_0 q} \frac{d\beta}{d\tau} + \frac{Q'}{I_0 q^2} \sin \tau.$$

Предположим, что вязкое трение, а также момент M_α малы по сравнению с моментами сил инерции при гармонических колебаниях, т. е. что безразмерные величины удовлетворяют условиям

$$\frac{\gamma''}{A_0 q} \ll 1, \quad \frac{\gamma'}{I_0 q} \ll 1, \quad \frac{\alpha'}{A_0 q} \ll 1, \quad \frac{\beta' q}{A_0} \ll 1.$$

Если ввести в рассмотрение малый параметр

$$\mu = \frac{\alpha' - \gamma''}{A_0 n_1} > 0,$$

характеризующий близость системы к линейной, и обозначения

$$\bar{\kappa}_1 = \frac{\kappa_1}{q}, \quad \bar{\kappa}_2 = \frac{\kappa_2}{q}, \quad \bar{n}_1^2 = \frac{n_1^2}{q^2}, \quad \bar{n}_2^2 = \frac{n_2^2}{q^2},$$

$$\beta'' = \frac{\beta'}{\alpha' - \gamma''} q, \quad \lambda = \frac{A_0 \gamma'}{I_0 (\alpha' - \gamma'')}, \quad Q = \frac{Q'}{I_0 q^2},$$

то уравнения движения окончательно примут вид

$$\frac{d^2\alpha}{d\tau^2} - \bar{\kappa}_1 \frac{d\beta}{d\tau} - \bar{n}_1^2 \alpha = \mu \bar{n}_1 \left[\frac{d\alpha}{d\tau} - \beta'' \left(\frac{d\alpha}{d\tau} \right)^3 \right], \quad (5.126)$$

$$\frac{d^2\beta}{d\tau^2} + \bar{\kappa}_2 \frac{d\alpha}{d\tau} - \bar{n}_2^2 \beta = \mu \bar{n}_1 \left(-\lambda \frac{d\beta}{d\tau} \right) + Q \sin \tau.$$

Уравнения (5.126) записаны в форме уравнений (5.110). Если решение этой системы искать в виде

$$\alpha = a \sin (\bar{k}_1 \tau + \beta_1) + b \sin (\bar{k}_2 \tau + \beta_2) + e \cos \tau, \quad (5.127)$$

$$\beta = \alpha_1 a \cos (\bar{k}_1 \tau + \beta_1) + \alpha_2 b \cos (\bar{k}_2 \tau + \beta_2) + d \sin \tau,$$

где

$$\alpha_1 = \frac{k_1^2 + n_1^2}{\kappa_1 k_2} = \frac{\kappa_2 k_1}{k_1^2 + n_2^2}, \quad \alpha_2 = \frac{k_2^2 + n_2^2}{\kappa_1 k_2} = \frac{\kappa_2 k_2}{k_2^2 + n_2^2},$$

\bar{k}_1^2 и \bar{k}_2^2 ($\bar{k}_2^2 > \bar{k}_1^2$) — корни уравнения

$$k^4 + (\bar{n}_1^2 + \bar{n}_2^2 - \kappa_1 \kappa_2) \bar{k}^2 + \bar{n}_1^2 \bar{n}_2^2 = 0 \quad (\bar{k}q = k),$$

$$c = \frac{\kappa_1 Q q^3}{q^4 + (n_1^2 + n_2^2 - \kappa_1 \kappa_2) q^2 + n_1^2 n_2^2},$$

$$d = - \frac{Q q^2 (q^2 + n_1^2)}{q^4 + (n_1^2 + n_2^2 - \kappa_1 \kappa_2) q^2 + n_1^2 n_2^2},$$

то уравнения (5.112) будут

$$\begin{aligned} \frac{du}{d\tau_1} &= Au (a_0 - u - 2v - 2e^2), \\ \frac{dv}{d\tau_1} &= Bv (b_0 + v + 2u + 2e^2), \\ \beta_1 &= \text{const}, \quad \beta_2 = \text{const}, \end{aligned} \quad (5.128)$$

где

$$u = \frac{k_2^2 b^2}{q^2} > 0, \quad v = \frac{k_1^2 a^2}{q^2} > 0,$$

$$A = \frac{3\beta (k_2^2 + n_2^2)}{2n_1^2}, \quad B = \frac{3\beta (k_1^2 + n_1^2)}{2n_1^2},$$

$$a_0 = -\frac{4}{3\beta} \left(1 - \lambda \frac{\kappa_1}{\kappa_2} \alpha_2^2 \right), \quad b_0 = -\frac{4}{3\beta} \left(1 - \lambda \frac{\kappa_1}{\kappa_2} \alpha_1^2 \right),$$

$$\tau_1 = \frac{\mu n_1^3 \tau}{2(k_2^2 - k_1^2)}.$$

Значения u и v , соответствующие особым точкам уравнений (5.128), найдем из уравнений

$$\begin{aligned} Au (a_0 - u - 2v - 2e^2) &= 0, \\ Bv (b_0 + v + 2u + 2e^2) &= 0. \end{aligned} \quad (5.129)$$

Особые точки будут P_1 : $u_1 = 0, v_1 = 0$. При $e = 0$ эта точка соответствует состоянию равновесия исходной системы; при $e \neq 0$ — движению с частотой q внешней силы.

Особая точка P_2 : $u_2 = 0, v_2 = -b_0 - 2e^2$. При $e = 0$ точка P_2 соответствует периодическому движению с частотой k_1 ; при $e \neq 0$ — бигармоническому движению с частотами k_1 и q .

Особая точка P_3 : $u_3 = a_0 - 2e^2, v_3 = 0$. При $e = 0$ точка P_3 соответствует периодическому движению с частотой k_2 ; при $e \neq 0$ — бигармоническому движению с частотами k_2 и q .

Особая точка P_4 : $u_4 = -\frac{1}{3}(a_0 + 2b_0 + 2e^2), v_4 = -\frac{1}{3}(2a_0 + b_0 - 2e^2)$. При $e = 0$ точка P_4 соответствует бигармоническому движению с частотами k_1 и k_2 ; при $e \neq 0$ — тригармоническому движению системы с частотами k_1, k_2 и q . Корни характеристического уравнения, определяющие характер особых точек, будут:

$$\text{для точки } P_1 S_1 = A(a_0 - 2e^2), S_2 = B(b_0 + 2e^2);$$

$$\text{для точки } P_2 S_1 = A(a_0 + 2b_0 + 2e^2), S_2 = -B(b_0 + 2e^2);$$

$$\text{для точки } P_3 S_1 = B(2a_0 + b_0 - 2e^2), S_2 = -A(a_0 - 2e^2);$$

для точки P_4 характеристическое уравнение будет иметь вид

$$S^2 + (Au_4 - Bv_4)S + 3ABu_4v_4 = 0.$$

Если точка P_4 существует, то $u_4 > 0$ и $v_4 > 0$ и, следовательно, $3ABu_4v_4 > 0$, т. е. действительных корней разных знаков характеристическое уравнение иметь не будет. Таким образом, точка P_4 будет особой точкой типа узла или фокуса. Для того чтобы P_4 была устойчивой особой точкой, нужно, чтобы действительные части корней характеристического уравнения были отрицательны, т. е. должно выполняться неравенство

$$Au_4 - Bv_4 > 0 \text{ или } \frac{u_4}{v_4} > \alpha',$$

где

$$\alpha' = \frac{B}{A} = \frac{k_1^2 + n_2^2}{k_3^2 + n_2^2} < 1,$$

откуда условие устойчивости точки P_4 может быть записано в виде

$$2e^2 < \frac{2|b_0| - a_0 - \alpha'(2a_0 - |b_0|)}{1 - \alpha'}.$$

Н. Н. Баутин показал, что уравнения (5.128) предельных циклов не имеют и при смене устойчивости точка P_4 будет центром. Для достаточно больших u и v , в силу положительности A и B , $du/d\tau_1 < 0$, $dv/d\tau_1 > 0$. Таким образом, положение и характер собых точек определяются значениями величин a_0 , b_0 и e . Меняя параметры динамической системы, можно получить различные значения a_0 и b_0 , следовательно, и различные режимы движения системы.

В качестве параметра, характеризующего изменение параметров системы, можно взять отношение парциальных частот $\zeta = n_2^2/n_1^2$. Из уравнения для определения k_1^2 и k_2^2 имеем

$$k_1^2 = \frac{1}{2} [- (n_1^2 + n_2^2 - \kappa_1 \kappa_2) - \sqrt{(n_1^2 + n_2^2 - \kappa_1 \kappa_2)^2 - 4n_1^2 n_2^2}], \quad (5.130)$$

$$k_2^2 = \frac{1}{2} [- (n_1^2 + n_2^2 - \kappa_1 \kappa_2) + \sqrt{(n_1^2 + n_2^2 - \kappa_1 \kappa_2)^2 - 4n_1^2 n_2^2}].$$

Так как

$$a_0 = \frac{4}{3\beta''} \left(1 - \lambda \frac{\kappa_1}{\kappa_2} \alpha_2^2 \right) = \frac{4}{3\beta''} \left(1 - \lambda \frac{k_2^2 + n_1^2}{k_2^2 + n_2^2} \right),$$

$$b_0 = - \frac{4}{3\beta''} \left(1 - \lambda \frac{\kappa_1}{\kappa_2} \alpha_1^2 \right) = - \frac{4}{3\beta''} \left(1 - \lambda \frac{k_1^2 + n_1^2}{k_1^2 + n_2^2} \right),$$

$$\lambda = \lambda_0 \frac{n_2^2}{n_1^2}, \quad \frac{\kappa_1 \kappa_2}{n_1^2} = \sigma_0 \frac{n_2^2}{n_1^2}, \quad \lambda_0 = \frac{\gamma' p h_1}{(\alpha' - \gamma'') P h_2},$$

$$\sigma_0 = \frac{I^2 \omega^2}{P h_2}, \quad \zeta = \frac{n_2^2}{n_1^2},$$

то, используя (5.130), перепишем a_0 и b_0 в виде

$$a_0 = \frac{4}{3\beta''} [1 - \lambda_0 M(\zeta)], \quad b_0 = - \frac{4}{3\beta''} [1 - \lambda_0 N(\zeta)],$$

где

$$M(\zeta) = \zeta \frac{(\sigma_0 - 1)\zeta + 1 + \sqrt{[\zeta(\sigma_0 - 1) - 1]^2 - 4\zeta}}{(\sigma_0 + 1)\zeta - 1 + \sqrt{[\zeta(\sigma_0 - 1) - 1]^2 - 4\zeta}},$$

$$N(\zeta) = \zeta \frac{(\sigma_0 - 1)\zeta + 1 - \sqrt{[\zeta(\sigma_0 - 1) - 1]^2 - 4\zeta}}{(\sigma_0 + 1)\zeta - 1 - \sqrt{[\zeta(\sigma_0 - 1) - 1]^2 - 4\zeta}}.$$

Мы рассматриваем только те значения n_1^2 , n_2^2 , κ_1 и κ_2 , при которых k_1^2 и k_2^2 будут действительными и положи-

тельными, т. е. когда консервативная система стабилизована гироскопом. В нашем случае это будет для $\zeta > \zeta_0$, где

$$\zeta_0 = \frac{\zeta_0 + 1 + 2\sqrt{\zeta_0}}{(\zeta_0 - 1)^2}.$$

На рис. 5.38 (для $\lambda_0 < 1$) и рис. 5.39 (для $\lambda_0 > 1$) построены графики $z_1 = \frac{3\beta''}{4} a_0(\zeta)$ и $z_2 = \frac{3\beta''}{4} b_0(\zeta)$ при фиксированных значениях σ_0 и λ_0 . Отметим, что при изменении σ_0 качественный вид графиков не меняется. Эти графики позволяют установить возможные соотношения между a_0 и b_0 при различных значениях ζ .

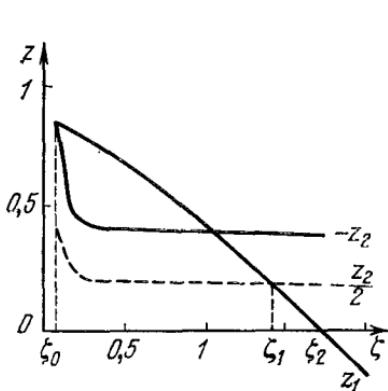


Рис. 5.38

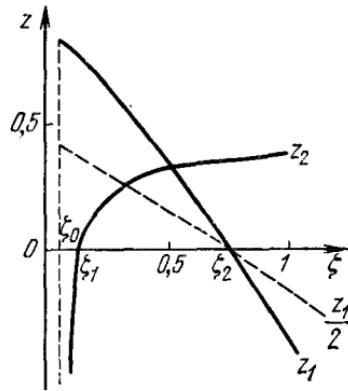


Рис. 5.39

Рассмотрим подробно случай, когда $1 < \zeta < \zeta_1$ (рис. 5.38). В этом случае $a_0 > 0$, $b_0 < 0$, $|b_0| > a_0$, $2a_0 > |b_0|$.

Для точки P_1 корни характеристического уравнения будут действительными отрицательными при $a_0 < 2e^2 < |b_0|$. При других значениях e^2 точка P_1 будет седлом.

Точка P_2 будет существовать, если $|b_0| - 2e^2 > 0$, но при этом корни характеристического уравнения будут действительными разных знаков, т. е. точка P_2 будет седлом при любых значениях e^2 . Это значит, что для данных значений ζ в системе устойчивых движений с частотами k_1 (при $e = 0$) и k_1 и q (при $e \neq 0$) не может быть.

Точка P_3 будет существовать, если $a_0 - 2e^2 > 0$. При $2a_0 - |b_0| > 2e^2 > 0$ корни $S_1 > 0$, $S_2 < 0$, т. е. P_3 — седло; при $a_0 > 2e^2 > 2a_0 - |b_0|$ корни $S_1 < 0$, $S_2 < 0$,

т. е. точка P_3 — устойчивый узел (так как оси u и v являются интегральными кривыми).

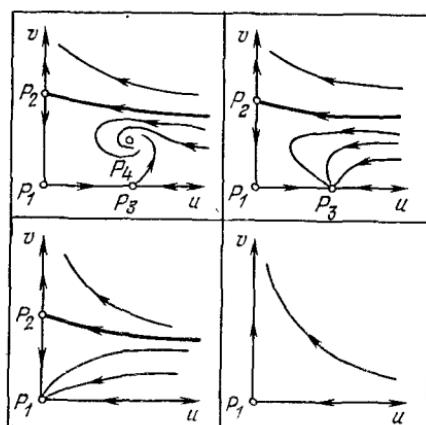
Точка P_4 существует, если

$$a_0 - 2|b_0| + 2e^2 < 0, \quad 2a_0 - |b_0| - 2e^2 > 0,$$

т. е. только для $2e^2 < 2a_0 - |b_0|$.

Точка P_4 будет устойчивым фокусом или устойчивым узлом при $2a_0 - |b_0| > 2e^2 > 0$.

Таким образом, в рассматриваемом случае при отсутствии внешней силы ($e = 0$) система совершает устойчивое бигармоническое движение с частотами k_1 и k_2 .



[Рис. 5.40]

периодическое движение с частотой внешней силы.

При $2e^2 > |b_0|$ система становится неустойчивой.

На рис. 5.40 приведены картины фазовой плоскости uv . На рис. 5.41 представлены графики соответственно суммы квадратов амплитуд тригармонического движения $R_1^2 = u_4 + v_4 + e^2 = \frac{a_0 + |b_0| - e^2}{3}$, суммы квадратов амплитуд бигармонического движения $R_2^2 = u_3 + e^2 = a_0 - e^2$ и периодического движения $R_1^2 = e^2$.

В табл. 4 приведены другие случаи, когда в системе возможны устойчивые движения. Эти движения возможны при $\lambda_0 < 1$. При $\lambda_0 > 1$ в системе устойчивых режимов не существует.

В случае $\zeta_1 < \zeta < \zeta_2$ при $e = 0$ система совершает устойчивое периодическое движение с частотой k_2 ; при $a_0 > 2e^2 > 0$ система совершает устойчивое бигармонич-

ное движение с частотами k_1 , k_2 и q (частота внешней силы).

При $a_0 - |b_0| > 2e^2 > 0$ система совершает устойчивое тригармоническое движение с частотами k_1 , k_2 и q .

При $|b_0| > 2e^2 > a_0$ система совершает пе-

ское движение с частотами k_2 и q ; при $|b_0| > 2e^2 > a_0$ система совершаает устойчивое периодическое движение с частотой q . При $2e^2 > |b_0|$ устойчивых режимов нет.

На рис. 5.42 показаны графики квадрата амплитуд би- гармонических движений $R_1^2 = u_3 + e^2 = a_0 - e^2$ и квадрата амплитуды периодического движения $R_2^2 = e^2$.

В случае $\zeta > \zeta_2$ при $e = 0$ система находится в покое; при $|b_0| > 2e^2 > 0$ система совершаает периодическое

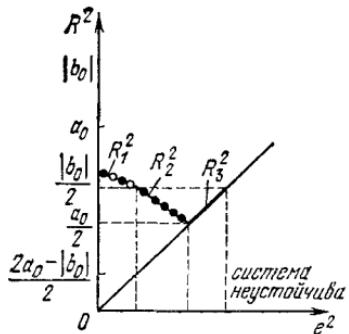


Рис. 5.41

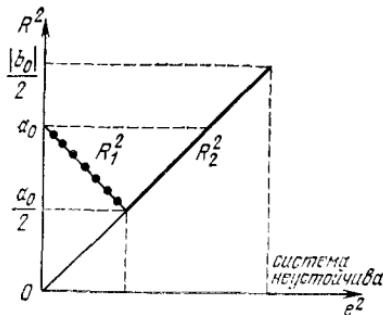


Рис. 5.42

движение с частотой q внешней силы; при $2e^2 > |b_0|$ устойчивых режимов не существует.

Рассмотрим теперь случай «резонанса», т. е. случай, когда $k_1 < k_2 = q$. Предположим, что амплитуда внешней

Таблица 4

Случай	e	P_1	P_2	P_3	P_4
$\zeta_1 < \zeta < \zeta_2$	$e = 0$	Седло	Седло	Устойчи- вый узел	—
$a_0 > 0$	$ b_0 > 2e^2 > 0$	Седло	Седло	Устойчи- вый узел	—
$b_0 < 0$	$ b_0 > 2e^2 > a_0$	Устойчи- вый узел	Седло	—	—
$2a_0 < b_0 $	$2e^2 > b_0 $	Седло	—	—	—
$\zeta_2 < \zeta$	$e = 0$	Устойчи- вый узел	Седло	—	—
$a_0 < 0$	$ b_0 > 2e^2 > 0$	Устойчи- вый узел	Седло	—	—
$b_0 < 0$	$2e^2 > b_0 $	Седло	—	—	—

силы пропорциональна μ , т. е. $Q' = \mu Q''$, где $Q'' = Q'A_0n_1/(\alpha' - \gamma'')$. Уравнения движения при этом будут

$$\begin{aligned} \frac{d^2\alpha}{d\tau^2} - \bar{\kappa}_1 \frac{d\beta}{d\tau} - \bar{n}_1^2 \alpha &= \mu \bar{n}_1 \left[\frac{d\alpha}{d\tau} - \beta'' \left(\frac{d\alpha}{d\tau} \right)^3 \right], \\ \frac{d^2\beta}{d\tau^2} + \bar{\kappa}_2 \frac{d\alpha}{d\tau} - \bar{n}_2^2 \beta &= \mu \bar{n}_1 \left[-\lambda \frac{d\beta}{d\tau} + \frac{Q''}{\bar{\kappa}_2} \sin \tau \right]. \end{aligned}$$

Если искать решение этих уравнений в виде (5.118):

$$\alpha = a \sin (\bar{k}_1 \tau + \psi) + b_1 \sin \tau + b_2 \cos \tau,$$

$$\beta = \alpha_1 a \cos (\bar{k}_1 \tau + \psi) + \alpha_2 b_1 \cos \tau - \alpha_2 b_2 \sin \tau,$$

то, используя уравнения (5.119), получим

$$\begin{aligned} \frac{du}{d\tau_2} &= Au [a_0 - (u^2 + v^2 + 2w)] - Q, \\ \frac{dv}{d\tau_2} &= Av [a_0 - (u^2 + v^2 + 2w)], \\ \frac{dw}{d\tau_2} &= Bw [b_0 + 2u^2 + 2v^2 + w], \quad \psi = \text{const}, \end{aligned} \tag{5.131}$$

где

$$\begin{aligned} u &= b_1, \quad v = b_2, \quad w = a^2 \frac{k_1^2}{q^2}, \quad \tau_2 = \frac{\mu n_1 (q^2 + n_2^2)}{2(q^2 - k_1^2)} t, \\ a_0 &= \frac{4}{3\beta''} \left(1 - \lambda \frac{q^2 + n_1^2}{q^2 + n_2^2} \right), \quad b_0 = -\frac{4}{3\beta''} \left(1 - \lambda \frac{k_1^2 + n_1^2}{k_1^2 + n_2^2} \right), \\ A &= \frac{3}{4} \beta'' > 0, \quad B = \frac{3}{2} \beta'' \frac{k_1^2 + n_1^2}{q^2 + n_2^2} > 0, \\ Q &= \frac{A_0 n_1}{I_0 (\alpha' - \gamma'')} \frac{Q'}{q^2 + n_2^2}. \end{aligned}$$

Отметим, что a_0 и b_0 те же самые, что и в предыдущем случае. Особые точки и линии системы уравнений (5.131) определяются из уравнений

$$\begin{aligned} Au [a_0 - (u^2 + v^2 + 2w)] - Q &= 0, \\ v [a_0 - (u^2 + v^2 + 2w)] &= 0, \\ w [b_0 + 2(u^2 + v^2) + w] &= 0. \end{aligned}$$

Вводя обозначения $\rho = u^2 + v^2$ и $Q_0 = Q/A$, получаем

$$\begin{aligned} \rho &= u^2, \quad v = 0, \quad \rho (a_0 - \rho - 2w)^2 = Q_0^2, \\ w (b_0 + 2\rho + w) &= 0, \end{aligned} \tag{5.132}$$

Найдем сначала особые точки на плоскости $w = 0$. Из уравнений (5.132) следует, что

$$\rho = u^2, v = 0, \rho (a_0 - \rho)^2 = Q_0^2,$$

т. е. особые точки, соответствующие периодическим движениям с частотой $k_2 = q$, расположены на оси u . Резонансную кривую этих движений получим, заменяя ρ на R_1^2 ,

$$R_1^2 (a_0 - R_1^2)^2 = Q_0^2. \quad (5.133)$$

Характеристическое уравнение для особых точек на оси u будет

$$[A (a_0 - 3R_1^2) - S] [A (a_0 - R_1^2) - S] [B (b_0 + 2R_1^2) - S] = 0.$$

Следовательно, условия устойчивости этих точек имеют вид (все корни должны быть отрицательными) $a_0 < -R_1^2 < -b_0/2$. На оси w особых точек нет, следовательно, при $Q_0 \neq 0$ гармонические движения с частотой k_1 невозможны.

Перейдем к рассмотрению особых точек вне осей u , v , w . Особые точки вне осей u , v , w соответствуют бигармоническим движениям системы с частотами k_1 и $k_2 = q$. Введем в рассмотрение величину $R_2^2 = \rho + w$. Тогда на основании (5.132) получим

$$\rho = -b_0 - R_2^2, w = b_0 + 2R_2^2 \quad (5.134)$$

и, следовательно, уравнение

$$-(b_0 + R_2^2) (a_0 - b_0 - 3R_2^2) = Q_0^2 \quad (5.135)$$

будет определять значения R_2^2 , соответствующие бигармоническим движениям. В силу условий (5.134), область существования уравнения (5.135) ограничена условием

$$-\frac{b_0}{2} < R_2^2 < -b_0.$$

Характеристическое уравнение для определения устойчивости бигармонических режимов имеет вид

$$\begin{aligned} & [A (a_0 - b_0 - 3R_2^2) - S] \times \\ & \times \{S^2 - S [A (a_0 + b_0 - R_2^2) + B (b_0 + 2R_2^2)] + \\ & + AB (2R_2^2 + b_0) (a_0 - 7b_0 - 9R_2^2)\} = 0. \end{aligned}$$

Таблица 5

$\lambda_0 < 1$				$\lambda_0 > 1$	
1	2	3	4	5	6
$\xi_0 < \xi < 1$	$1 < \xi < \xi_1$	$\xi_1 < \xi < \xi_2$	$\xi > \xi_2$	$\xi_1 < \xi < \xi_2$	$\xi > \xi_2$
$a_0 > 0$ $b_0 < 0$ $a_0 > b_0 $ $a_0 < 2 b_0 $	$a_0 > 0$ $b_0 < 0$ $a_0 < b_0 $ $2a_0 > b_0 $	$a_0 > 0$ $b_0 < 0$ $2a_0 < b_0 $	$a_0 < 0$ $b_0 < 0$	$a_0 > 0$ $b_0 > 0$	$b_0 > 0$ $a_0 < 0$

Условия устойчивости, очевидно, будут

$$\frac{a_0 - b_0}{3} < R_2^2 < \frac{a_0 - 7b_0}{9},$$

$$A(a_0 + b_0 - R_2^2) + B(b_0 + 2R_2^2) < 0.$$

Заметим теперь, что в плоскости $R^2 Q_0^2$ кривая (5.133) имеет вертикальные касательные в точках

$$R_1^2 = a_0, \quad Q_0^2 = 0, \quad R_1' = \frac{a_0}{3}, \quad Q_{01}^2 = 4\left(\frac{a_0}{3}\right)^3,$$

кривая (5.135) — в точках

$$R_2^2 = \frac{a_0 - b_0}{3}, \quad Q_0^2 = 0,$$

$$R_2^2 = \frac{a_0 - 7b_0}{9}, \quad Q_{02}^2 = -\frac{4}{81}(2b_0 + a_0)^3.$$

Кривые (5.133) и (5.135) всегда пересекаются в точке

$$R^2 = -\frac{b_0}{2}, \quad Q_{03}^2 = -\frac{b_0}{8}(2a_0 + b_0)^3.$$

Перейдем теперь к исследованию движений вагона при изменении амплитуды внешней силы. Из рис. 5.38 и 5.39 можно составить табл. 5 возможных соотношений между a_0 и b_0 при различных значениях $\zeta = n_2/n_1^2$.

Остановимся только на рассмотрении случаев 2, 3 и 4 как наиболее характерных.

В случае 2 при $Q_0 = 0$ система совершает устойчивое бигармоническое движение с частотами k_1 и $k_2 = q$. При $0 < Q_0^2 < Q_{02}^2$ система совершает устойчивое бигармоническое движение с частотами k_1 и $k_2 = q$. При $Q_0^2 > Q_{02}^2$ устойчивых режимов движений нет.

В случае 3 при $Q_0 = 0$ система совершае периодическое движение с частотой $k_2 = q$. При $0 < Q_0^2 < Q_{03}^2$ система совершае периодическое движение с частотой $k_2 = q$; при $Q_{03}^2 < Q_0^2 < Q_{02}^2$ система совершае бигармоническое движение с частотами k_1 и $k_2 = q$; при $Q_0^2 > Q_{02}^2$ устойчивых движений нет (рис. 5.43).

В случае 4 при $Q_0 = 0$ исходная система находится в состоянии равновесия. При $Q_0 \neq 0$ возможны два подслучаи:

a) $2 |a_0| > 5 |b_0|$. При $0 < Q_0^2 < Q_{03}^2$ система совершае периодическое движение с частотой $k_2 = q$; при $Q_0^2 > Q_{03}^2$ устойчивых режимов нет.

b) $2 |a_0| < 5 |b_0|$. При $0 < Q_0^2 < Q_{03}^2$ система совершае периодическое движение с частотой $k_2 = q$; при $Q_{03}^2 < Q_0^2 < Q_{02}^2$ совершае бигармоническое движение с частотами k_1 и $k_2 = q$; при $Q_0^2 > Q_{02}^2$ устойчивых режимов нет.

Если провести аналогичным образом исследование случая $k_1 = q < k_2$, то можно сделать следующие выводы: если в отсутствие внешней силы система совершае устойчивые бигармонические движения, то при включении внешней силы устойчивый бигармонический режим сохраняется; при дальнейшем увеличении амплитуды внешней силы система или теряет устойчивые режимы, или в ней возникает устойчивый периодический режим с частотой внешней силы, который исчезает при достижении амплитудой внешней силы определенного значения.

Если в отсутствии внешней силы система совершае периодическое движение с частотой k_2 , то при включении внешней силы возникает устойчивый бигармонический режим, который затем преходит в устойчивое периодическое движение с частотой $k_1 = q$; при дальнейшем увеличении амплитуды внешней силы система теряет устойчивые режимы. Если в отсутствии внешней силы система находится в покое, то при включении внешней силы наступает периодический режим с частотой $k_1 = q$; при дальнейшем увеличении амплитуды внешней силы система теряет устойчивые режимы.

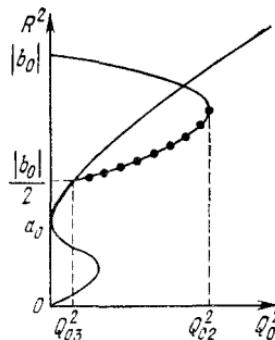


Рис. 5.43