

Г Л А В А 6

РАЗРЫВНЫЕ КОЛЕБАНИЯ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ С МАЛЫМИ ПАРАМЕТРАМИ ПРИ (СТАРЫХ) ПРОИЗВОДНЫХ

§ 1. Рассмотрение вырожденных систем с помощью гипотезы скачка

Как известно, исследование поведения какой-либо динамической системы всегда начинается с построения математической модели такой системы, т. е. с решения вопроса о том, что является определяющим для поведения системы в данных условиях, а что второстепенным. Однако заранее сказать, что сделанные предположения являются правильными и полученная модель правильно отражает поведение реальной системы, не представляется возможным до сравнения теории и эксперимента.

Обычно при построении математической модели динамической системы пренебрегают теми или иными параметрами, считая их малыми, несущественными, и тем самым получают математическую модель более простую, чем при учете всех параметров, описываемую системой дифференциальных уравнений более низкого порядка, так называемую вырожденную систему. Но при этом возможно возникновение ситуации, когда в некоторые моменты времени полученная система уравнений не дает однозначного ответа о поведении системы. Это значит, что среди отброшенных «малых» параметров имеются такие, влиянием которых во все времена движения системы пренебрегать нельзя, несмотря на их малость. Очевидно, что одним из путей выхода из этого положения может быть учет ранее отбрасываемых параметров, но при этом возрастает порядок дифференциальных уравнений, описывающих систему.

му, и, следовательно, возрастают трудности математического исследования.

Другим путем разрешения возникшего положения при сохранении упрощенной модели может служить введение какой-либо физической гипотезы о поведении системы в этой ситуации, например гипотезы «скачка», когда физически обосновывается скачкообразный переход системы из одного состояния в другое.

Остановимся в дальнейшем на рассмотрении динамической системы с одной степенью свободы. Рассмотрим движение материальной точки под действием восстанавливающей силы в среде с сопротивлением, зависящим от скорости. Дифференциальное уравнение такой системы может быть записано в виде

$$m\ddot{x} + \varphi(\dot{x}) + cx = 0.$$

Если в этом уравнении пренебречь членом, содержащим массу m , то получим дифференциальное уравнение первого порядка

$$\varphi(\dot{x}) + cx = 0,$$

которое уже описывает движение вырожденной системы. Разрешая это уравнение относительно \dot{x} , получим

$$\frac{dx}{dt} = f(x).$$

Если же пренебречь упругостью, то дифференциальное уравнение примет вид

$$m\ddot{x} + \varphi(\dot{x}) = 0, \text{ или } \frac{dy}{dt} = \psi(y),$$

где

$$y = \dot{x}, \quad \psi(y) = -\frac{1}{m}\varphi(y).$$

Задачей настоящего параграфа и является изучение движения таких вырожденных систем.

Пусть движение вырожденной системы описывается уравнением

$$\frac{dx}{dt} = f(x), \tag{6.1}$$

где $f(x)$ — аналитическая функция. Не останавливаясь на доказательстве существования и единственности реше-

ния этого уравнения [1], выясним, какие движения возможны в этой системе.

Если уравнение $f(x) = 0$ не имеет действительных корней, то динамическая система, описываемая уравнением (6.1), состояний равновесия не имеет. Следовательно,

dx/dt все время сохраняет знак, и функция $x(t)$ или монотонно возрастает, или монотонно убывает.

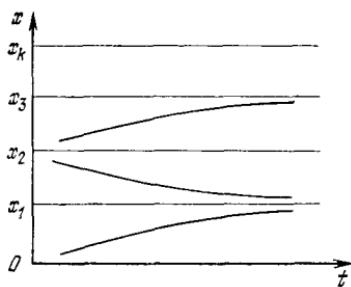


Рис. 6.1

Предположим теперь, что уравнение $f(x) = 0$ имеет k действительных корней $x = x_1, x = x_2, \dots, x = x_k$. Эти корни соответствуют состояниям равновесия системы. Решения $x = x_1, x = x_2, \dots, \dots, x = x_k$ на плоскости tx представляют собой прямые, параллельные оси t (рис. 6.1).

В силу теоремы существования и единственности решения уравнений (6.1) интегральные кривые не могут пересекаться и, следовательно, все другие решения находятся внутри полос, образуемых решениями $x = x_1, x = x_2, \dots, \dots, x = x_k$ (рис. 6.1). Внутри полос функция $f(x)$ знака не меняет и решения монотонны и, следовательно, если $f(x)$ — аналитическая функция, то уравнение (6.1) не может иметь периодических решений.

Фазовая плоскость для уравнения (6.1) вырождается в фазовую прямую. Рассмотрим представление движения на этой фазовой прямой. Согласно теореме о единственности решения уравнения (6.1), начальное условие при $t = t_0, x = x_0$ однозначно определяет дальнейшее движение изображающей точки. Характер движения изображающей точки не будет зависеть от момента времени t_0 , так как уравнение (6.1) явно от времени не зависит. Это значит, что каждая отдельная фазовая траектория на фазовой прямой соответствует не одному движению, а бесконечному множеству движений, соответствующим различным t_0 .

Траекториями изображающей точки на фазовой прямой (оси x) могут быть точки (состояния равновесия), отрезки прямой (между состояниями равновесия), полуправильная (от состояния равновесия до бесконечности) и, наконец, вся прямая, когда $f(x) = 0$ не имеет действительных

корней. Отметим, что изображающая точка не может достигнуть состояния равновесия за конечный промежуток времени, так как это противоречило бы теореме о единственности решения. Рассмотрим вспомогательную плоскость xz , где $z = dx/dt$. Если $z = f(x)$ ось x не пересекает, то фазовой траекторией будет вся ось x . Пусть $z = f(x)$ пересекает ось x в точках $x = x_1, x = x_2, \dots, x = x_k$ (рис. 6.2). Если $f(x) < 0$, то изображающая точка движется в сторону уменьшения x (влево), если $f(x) > 0$, — то в сторону увеличения x . На рис. 6.2 показаны возможные фазовые траектории изображающей точки: состояния равновесия, отрезки между состояниями равновесия и полуправые (от состояния равновесия до бесконечности). Очевидно, что характер разбиения фазовой прямой на траектории целиком определяется состояниями равновесия.

Перейдем к вопросу о возможности периодических решений в вырожденной системе, описываемой уравнением (6.1). Как уже было установлено, дифференциальное уравнение (6.1), если $f(x)$ — аналитическая функция, периодических решений не имеет. Можно также утверждать, что если $f(x)$ — однозначная функция, то непрерывных периодических движений также не будет, так как при непрерывных периодических движениях система должна дважды проходить через одно и то же значение x с двумя различными значениями dx/dt .

Покажем на примере, что если $f(x)$ — однозначная функция, то периодические движения в системе возможны тогда, когда уравнение (6.1) хотя бы в некоторых точках не определяет движения системы или теряет смысл для каких-либо значений переменных. В качестве такого примера рассмотрим теорию механических релаксационных (разрывных) колебаний, данную Хайкиным и Кайдановским [9]. Колодка малой массы m насажена с большим трением на равномерно вращающийся вал и соединена с неподвижной станиной при помощи пружины (рис. 6.3). Уравнение движения колодки при условии, что $m = 0$, имеет вид

$$c\varphi = M(\Omega - \dot{\varphi}), \quad (6.2)$$

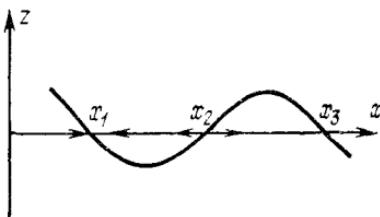


Рис. 6.2

где c — коэффициент упругости пружины, Ω — угловая скорость вала, ϕ — абсолютная угловая скорость колодки, M — функция, выражающая зависимость момента силы трения от относительной скорости точек колодки, соприкасающихся с валом, при чем при $\phi = \Omega - M_0 \leq M(0) \leq M_0$, где M_0 — максимальное значение момента силы трения покоя. Предположим, что схематизированная характеристика момента трения имеет вид, показанный на рис. 6.4. Для наглядности изображения движения вместо фазовой прямой введем фазовую кривую, в качестве которой возьмем характеристику трения, что можно сделать, так как в силу уравнения (6.2) координата ϕ пропорциональна моменту трения.

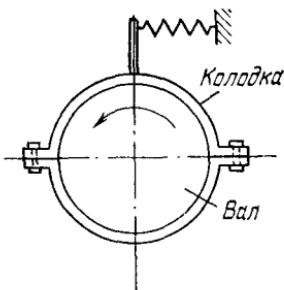


Рис. 6.3

(это конечно верно только там, где уравнение (6.2) отображает движение колодки). На рис. 6.4 по оси абсцисс откладываем относительную скорость $\omega = \Omega - \phi$. Если $\omega = 0$, то колодка движется вместе с валом; $\omega = \Omega$ соответствует отсутствию абсолютного движения колодки, $\phi = 0$ — единственное состояние равновесия. При рассмотрении принятой характеристики трения нужно всегда иметь в виду, что пока $\omega = 0$, момент силы трения может принимать любое значение от нуля до M_0 — момента силы трения покоя, т. е. характеристика трения имеет вертикальную ветвь, совпадающую с осью ординат на участке от $M = -M_0$ до $M = M_0$. В силу того, что масса колодки достаточно мала, процесс ее движения можно разбить на две существенно различные области:

1) область в которой сила упругости гораздо больше произведения момента инерции колодки на ее угловое ускорение. Движение в этом случае определяется силой трения и силой упругости пружины, координата системы меняется существенно, а скорость — медленно, т. е. ускорения невелики. Очевидно, для области справедливо (6.2);

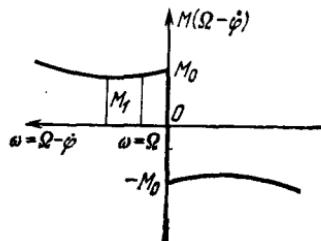


Рис. 6.4

2) область, в которой произведение момента инерции на угловое ускорение значительно больше силы упругости пружины и движение определяется главным образом произведением момента инерции на угловое ускорение. Но так как момент инерции мал, то ускорение велико, координата не успевает значительно изменяться, скорость же системы резко меняется. В этой области уравнение (6.2) теряет свою силу. Это мы и увидим при исследовании этого уравнения.

Мы рассмотрим тот случай, когда угловая скорость Ω вала такова, что $\omega = \Omega$ лежит на падающем участке характеристики трения. Напомним, что $\omega = \Omega$ соответствует состоянию равновесия колодки ($\phi = 0$). Для того чтобы определить направление движения изображающей точки, продифференцируем уравнение (6.2):

$$c\dot{\phi} = -M'(\Omega - \phi)\dot{\phi}.$$

Из этого выражения следует, что при $M' > 0$ ($M' = dM/d\omega$) знаки ϕ и $\dot{\phi}$ противоположны. Если $M' < 0$, то знаки ϕ и $\dot{\phi}$ одинаковы. Так как состояние равновесия ($\phi = 0$) находится на участке, где $M' < 0$, то это состояние равновесия всегда неустойчиво. При достаточно больших $|\phi|$ изображающая точка движется в сторону малых $|\phi|$ до тех пор, пока $\dot{\phi}$ не меняет знака. Изменение знака $\dot{\phi}$ может, как это видно из выражения

$$\ddot{\phi} = -\frac{c\dot{\phi}}{M'(\Omega - \phi)}, \quad (6.3)$$

произойти или от изменения знака ϕ , или от изменения знака M' . Изменение знака функции связано с переходом ϕ и M' через нуль. Если $\dot{\phi}$ меняет знак вследствие изменения знака ϕ , то она также проходит через нуль; если $\dot{\phi}$ меняет знак вследствие изменения знака M' , то при переходе M' через нуль мы получаем из выражения (6.3) $\ddot{\phi} = \pm\infty$. Следовательно, в точках фазовой кривой, в которых $M' = 0$, мы получаем точки «бесконечного ускорения». Изображающая точка или приближается с обеих сторон к такой точке, или удаляется в обе стороны от нее. Точка устойчивого бесконечного ускорения существенно отличается от точек состояния равновесия, так как изображающая точка не может оставаться в этой точке ни в коем случае. Появление точки устойчивого бесконечного ускорения есть следствие пренебрежения массой колодки, т. е. в этой точке уравнение (6.2) не дает ответа о

поведении системы. Чтобы выйти из подобного положения, можно рассмотреть невырожденную систему, т. е. предположить, что $m \neq 0$ (что мы и сделаем несколько позже), но можно, оставаясь в рамках сделанного предположения ($m = 0$), сформулировать условия дальнейшего движения системы.

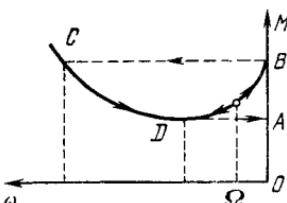
Покажем, что, исходя из рассмотрения приведенной характеристики трения, при наличии участка, где

$$M'(\Omega) < 0, \text{ колодка будет совер-}$$

шать периодическое движение.

Сначала колодка вращается вместе с валом ($\phi = \Omega$), пружина растягивается (возрастает упругая сила), но возрастает также и сила трения, оставаясь равной упругой силе. Изображающая точка при этом движется по участку AB фазовой кривой (рис. 6.5). Когда

момент упругой силы становится



равным моменту силы трения покоя, изображающая точка попадет в точку B — точку устойчивого бесконечного ускорения. Оставаясь там она не может, выйти из нее по фазовой траектории также не может. Остается предположить, что угловая скорость в силу того, что в точке B $\dot{\phi}$ имеет бесконечное значение, изменится скачком. Чтобы выяснить, куда придет система после скачка, следует сформулировать «условие скачка». В рассматриваемом случае сила упругости пружины и сила тяжести остаются неизменными (при принятой идеализации). Поэтому, если за условие скачка принять то условие, что система придет в такое новое положение, которое соответствует прежней энергии системы, и так как координата системы при скачке меняется не будет, то скачок произойдет в положение, соответствующее прежнему значению силы трения, т. е. в точку C (рис. 6.5). Далее изображающая точка будет двигаться с конечной скоростью и ускорением до точки D — точки устойчивого бесконечного ускорения.

Все сказанное относительно точки B относится и к точке D . В точке D произойдет скачок в скорости, изображающая точка попадет в точку A , и процесс, повторяясь, будет продолжаться дальше.

Для выяснения физической картины явления разрывных колебаний рассмотрим эту же задачу, приняв, что

$m \neq 0$ [2]. Так как нас интересует в основном качественная картина, то можно принять для рассмотрения грубо идеализированную характеристику трения, представленную на рис. 6.6. Точки сопряжения прямых на характеристике определим таким образом, чтобы в них выполнялось условие $dT(\phi)/dt = 0$, что вполне совместимо с действительной характеристикой. Уравнения движения имеют вид

$$I\ddot{\phi} = -c\dot{\phi} + M(\phi) \begin{cases} -M_0 \leq M(\phi) \leq M_0, \quad \phi = \Omega, \\ M(\phi) = k_1\phi + b_1, \quad -\omega_1 < \phi < \Omega, \\ M(\phi) = -k_2\phi + b_2, \quad \phi < -\omega_1, \end{cases} \quad (6.4)$$

где I — момент инерции колодки, M — момент силы трения, M_0 — максимальный момент трения покоя, $b_1 = M_0 - k_1\Omega$, $b_2 = M_0 - k_1\Omega - \omega_1(k_1 + k_2)$. Примем $k_1 > k_2$ и будем считать, что $I < \frac{k_1^2}{4c}$. Рассмотрим область $-\omega_1 < \phi < \Omega$. Уравнение (6.4) для этой области имеет вид

$$I\ddot{\phi} = -c\dot{\phi} + k_1\phi + b_1, \quad (6.5)$$

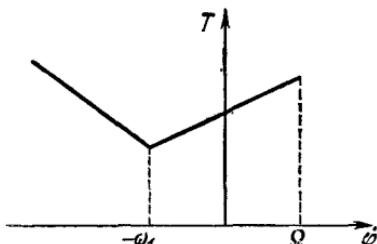


Рис. 6.6

которое можно записать в виде двух уравнений первого порядка:

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{-c\dot{\phi} + k_1\phi + b_1}{I}, \quad \frac{d\dot{\phi}}{dt} = \dot{\phi}.$$

Отсюда имеем

$$\frac{d\dot{\phi}}{d\phi} = -\frac{c\dot{\phi} + k_1\phi + b_1}{\dot{\phi}I}. \quad (6.6)$$

На плоскости $\dot{\phi}\phi$ точка с координатами $\dot{\phi} = b_1/c$, $\phi = 0$ является особой точкой уравнения (6.5) типа неустойчивого узла. Других особых точек это уравнение не имеет.

Фазовые траектории даются уравнением

$$\left[\phi - \beta_1 \left(\phi - \frac{b_1}{c} \right) \right]^{\beta_1} = c_1 \left[\phi - \beta_2 \left(\phi - \frac{b_1}{c} \right) \right]^{\beta_2}, \quad (6.7)$$

где

$$\beta_1 = h_1 + \sqrt{h_1^2 - \omega^2} > 0, \quad \beta_2 = h_1 - \sqrt{h_1^2 - \omega^2},$$

$$h_1 = \frac{k_1}{2I}, \quad \omega^2 = \frac{c}{I}.$$

Геометрическое место точек, в которых кривые (6.7) имеют горизонтальные касательные, представляет собой на плоскости прямую

$$\phi = \frac{c}{k_1} \left(\varphi - \frac{b_1}{c} \right). \quad (6.8)$$

Геометрическое место вертикальных касательных — прямая $\phi = 0$. Заметим, что прямая (6.8) проходит через точку с координатами $\varphi = M_0/c$, $\phi = \Omega$. Рассмотрим область $\phi \leq -\omega_1$. Уравнение (6.4) для этой области имеет вид

$$I\dot{\phi} = -c\varphi - k_2\phi + b_2 \quad (6.9)$$

или, в другой форме записи,

$$\frac{d\phi}{dt} = -\frac{c\varphi - k_2\phi + b_2}{I}, \quad \frac{d\varphi}{dt} = \phi,$$

или

$$\frac{d\varphi}{d\phi} = -\frac{c\varphi - k_2\phi + b_2}{I\dot{\phi}}. \quad (6.10)$$

Здесь уравнение фазовых траекторий имеет вид

$$\left[\phi - \alpha_1 \left(\varphi - \frac{b_2}{c} \right) \right]^{\alpha_1} = c_2 \left[\phi - \alpha_2 \left(\varphi - \frac{b_2}{c} \right) \right]^{\alpha_2}, \quad (6.11)$$

где

$$\alpha_1 = -h_2 + \sqrt{h_2^2 - \omega^2} < 0, \quad \alpha_2 = -h_2 - \sqrt{h_2^2 - \omega^2},$$

$$h_2 = \frac{k_2}{2I}.$$

Геометрическим местом горизонтальных касательных кривых (6.11) будет прямая

$$\phi = -\frac{c}{k_2} \left(\varphi - \frac{b_2}{c} \right). \quad (6.12)$$

Геометрическое место вертикальных касательных $\phi = 0$. Особая точка — устойчивый узел с координатами $\varphi = -b_2/c$, $\phi = 0$ (находится вне рассматриваемой области). Прямые (6.8) и (6.12) пересекаются в точке с координатами $\varphi = \frac{M_0}{c} - \frac{k_1}{c}$ ($\Omega + \omega_1$), $\phi = -\omega_1$. На рис. 6.7 представлена фазовая плоскость $\varphi\phi$ уравнения (6.4). На-

правление движения по фазовым траекториям указано стрелками. Рассмотрим движение с начальными условиями

$$-\frac{M_0}{c} < \varphi < \frac{M_0}{c}, \quad \dot{\varphi} = \Omega.$$

Изображающая точка будет перемещаться, например, от точки A_0 по фазовой прямой $\dot{\varphi} = \Omega$ до точки A_1 с координатами $\varphi = M_0/c$, $\dot{\varphi} = \Omega$, что соответствует движению колодки вместе с валом. Далее движение начинается по фазовой траектории семейства (6.7), которая, пересекая ось $\dot{\varphi} = 0$ под прямым углом, достигает точки A_2

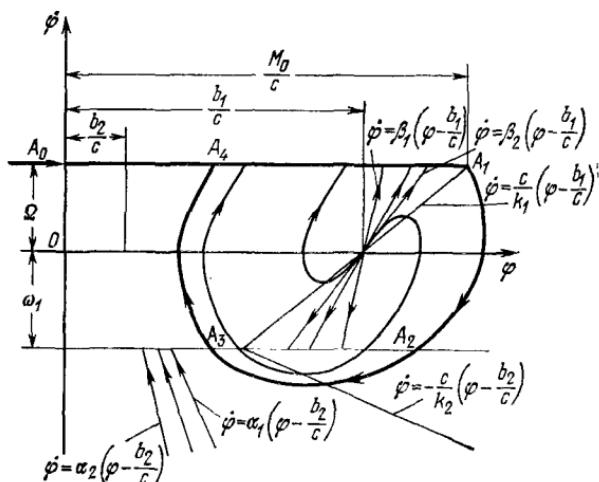


Рис. 6.7

на прямой $\dot{\varphi} = -\omega_1$. От точки A_2 движение происходит по фазовой траектории семейства (6.11), которая при пересечении с прямой (6.12) имеет горизонтальную касательную, до точки A_3 , для которой

$$\dot{\varphi} = -\omega_1, \quad \frac{b_2}{c} < \varphi < \frac{b_1}{c} - \frac{k_1 \omega_1}{c},$$

так как геометрическим местом вертикальных касательных для этого семейства будет прямая $\dot{\varphi} = 0$, а координаты особой точки $\varphi = b_2/c$, $\dot{\varphi} = 0$. Далее изображающая точка перемещается по фазовой траектории семейства (6.7), пока эта траектория не пересечет фазовую прямую $\dot{\varphi} =$

$= \Omega$ в точке A_4 . Затем изображающая точка перемещается по фазовой прямой $\phi = \Omega$ до точки $\phi = M_0/c$, $\dot{\phi} = \Omega$ и далее, как это было описано выше. Таким образом, при выбранных начальных условиях мы получили периодическое движение*).

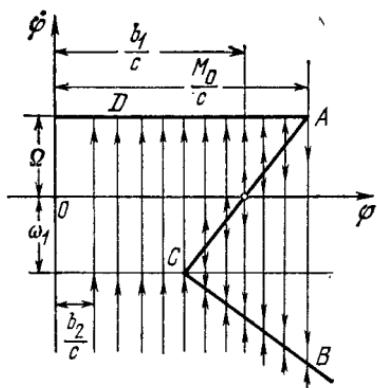


Рис. 6.8

Выясним теперь, что будет происходить с системой, если $I \rightarrow 0$. В области $-\omega_1 < \phi < \Omega$ уравнение (6.5) вырождается в уравнение

$$\ddot{\phi} = \frac{c}{k_1} \left(\phi - \frac{b_1}{c} \right),$$

на фазовой плоскости это уравнение прямой (6.8). В силу уравнения (6.6) при $I \rightarrow 0$ $d\phi/d\dot{\phi} \rightarrow \infty$, т. е. все фазовые траектории вырождаются в вертикальные прямые (за исключением прямой

(6.8)). Точка $\phi = 0$, $\dot{\phi} = b_1/c$ остается точкой неустойчивого равновесия. В области $\phi = -\omega_1$ уравнение (6.9) вырождается в уравнение

$$\ddot{\phi} = -\frac{c}{k_2} \left(\phi - \frac{b_2}{c} \right).$$

На фазовой плоскости это уравнение прямой (6.12). В силу уравнения (6.10) $d\phi/d\dot{\phi} \rightarrow \infty$ при $I \rightarrow 0$, т. е. все фазовые траектории, за исключением (6.12), вырождаются в вертикальные прямые. Фазовая прямая $\phi = \Omega$ остается фазовой прямой. Вид фазовой плоскости при $I = 0$ представлен на рис. 6.8. Для начальных условий $-M_0/c < \phi < M_0/c$, $\dot{\phi} = \Omega$ изображающая точка, перемещаясь по фазовой прямой $\phi = \Omega$ (колодка захвачена валом), попадет в точку $\phi = M_0/c$, $\dot{\phi} = \Omega$. Из этой точки изображающая точка скачком по вертикальной траектории перейдет в точку B (так как $d\phi/d\dot{\phi} \rightarrow \infty$ при $I \rightarrow 0$), откуда, перемещаясь по прямой $\phi = -\frac{c}{k_2} \left(\phi - \frac{b_2}{c} \right)$, попадет

*.) Читатель может убедиться, что и при других начальных условиях в системе устанавливается описанное периодическое движение.

в точку C с координатами

$$\varphi = \frac{M_0}{c} - \frac{k_1}{c} (\Omega + \omega_1), \quad \dot{\varphi} = -\omega_1.$$

Из точки C в силу того, что при $I \rightarrow 0$ $d\varphi/dt \rightarrow \infty$, изображающая точка скачком перейдет по вертикали в точку D на прямой $\varphi = \Omega$. Далее движение будет продолжаться описанным выше способом.

Таким образом, рассмотрение невырожденной системы и предельный переход помогли нам в данном случае понять сущность гипотезы скачка.

§ 2. Уточнение математической модели. Быстрые и медленные движения

При разрешении конфликтной ситуации в примере, приведенном в предыдущем параграфе, связанной с решением вопроса о дальнейшем поведении системы при попадании изображающей точки в устойчивую точку бесконечного ускорения, было рассмотрено два пути: один, связанный с введением гипотезы скачка, и другой, связанный с отказом от рассмотрения вырожденной модели.

Однако в ряде задач удовлетвориться гипотезой скачка не представляется возможным, так как при этом нельзя выяснить с достаточной полнотой влияние отбрасываемого в уравнениях движения «малого» параметра на физическую картину движения динамической системы. Рассмотрение же «полной» динамической системы приводит к необходимости рассмотрения более сложных уравнений движения. Поэтому вполне понятна идея рассмотрения уточненной вырожденной математической модели, когда при составлении дифференциальных уравнений движения эти малые параметры учитываются. Тогда некоторые коэффициенты уравнений движения будут иметь порядок учтенного малого параметра. Такое введение малого параметра, особенно тогда, когда малому параметру пропорциональны коэффициенты при старших производных, позволяет значительно шире и глубже понять физическую картину движений динамической системы.

Изучению движения динамических систем с малыми коэффициентами при старших производных посвящено большое количество исследований ([1, 3–8, 11–13] и др.). Наиболее полно этот вопрос в связи с разрывными колебаниями изложен в [1]. Мы ограничимся рассмотре-