

в точку  $C$  с координатами

$$\varphi = \frac{M_0}{c} - \frac{k_1}{c} (\Omega + \omega_1), \quad \dot{\varphi} = -\omega_1.$$

Из точки  $C$  в силу того, что при  $I \rightarrow 0$   $d\varphi/dt \rightarrow \infty$ , изображающая точка скачком перейдет по вертикали в точку  $D$  на прямой  $\varphi = \Omega$ . Далее движение будет продолжаться описанным выше способом.

Таким образом, рассмотрение невырожденной системы и предельный переход помогли нам в данном случае понять сущность гипотезы скачка.

## § 2. Уточнение математической модели. Быстрые и медленные движения

При разрешении конфликтной ситуации в примере, приведенном в предыдущем параграфе, связанной с решением вопроса о дальнейшем поведении системы при попадании изображающей точки в устойчивую точку бесконечного ускорения, было рассмотрено два пути: один, связанный с введением гипотезы скачка, и другой, связанный с отказом от рассмотрения вырожденной модели.

Однако в ряде задач удовлетвориться гипотезой скачка не представляется возможным, так как при этом нельзя выяснить с достаточной полнотой влияние отбрасываемого в уравнениях движения «малого» параметра на физическую картину движения динамической системы. Рассмотрение же «полной» динамической системы приводит к необходимости рассмотрения более сложных уравнений движения. Поэтому вполне понятна идея рассмотрения уточненной вырожденной математической модели, когда при составлении дифференциальных уравнений движения эти малые параметры учитываются. Тогда некоторые коэффициенты уравнений движения будут иметь порядок учтенного малого параметра. Такое введение малого параметра, особенно тогда, когда малому параметру пропорциональны коэффициенты при старших производных, позволяет значительно шире и глубже понять физическую картину движений динамической системы.

Изучению движения динамических систем с малыми коэффициентами при старших производных посвящено большое количество исследований ([1, 3–8, 11–13] и др.). Наиболее полно этот вопрос в связи с разрывными колебаниями изложен в [1]. Мы ограничимся рассмотре-

нием динамических систем, уравнения движения которых могут быть представлены в виде

$$\dot{x} = P(x, y), \mu \dot{y} = Q(x, y), \quad (6.13)$$

где  $\mu$  — малый положительный параметр (этот параметр характеризует «малость» какого-либо параметра динамической системы),  $P(x, y)$  и  $Q(x, y)$  — ограниченные и дифференцируемые функции  $x$  и  $y$ . При  $\mu = 0$  мы получаем из (6.13) вырожденную систему

$$\dot{x} = P(x, y), Q(x, y) = 0. \quad (6.14)$$

Пусть плоскость  $xy$  будет фазовой плоскостью системы уравнений (6.13). Выясним, в каком случае при достаточно малом  $\mu$  движение динамической системы будет происходить в окрестности кривой  $Q(x, y) = 0$ , т. е. в каком случае можно не учитывать малых параметров при составлении уравнений движения. В соответствии с уравнениями (6.13) имеем

$$\dot{y} = \frac{Q(x, y)}{\mu}. \quad (6.15)$$

Пусть  $\bar{x}$  и  $\bar{y}$  — координаты точек линии  $Q(x, y) = 0$ , а  $\xi$  и  $\eta$  — расстояния этих точек до какой-либо точки фазовой плоскости с координатами  $x$  и  $y$ . Считая  $\xi$  и  $\eta$  величинами порядка  $\mu$ , можно представить функцию  $Q(x, y)$  в виде

$$Q(x, y) = Q'_x \xi + Q'_y \eta + \dots, \quad (6.16)$$

так как  $Q(\bar{x}, \bar{y}) = 0$ . Подставляя выражение (6.16) в уравнение (6.15), получим

$$\dot{y} = (Q'_x \xi + Q'_y \eta + \dots)/\mu.$$

Отсюда следует, что только в малой окрестности линии  $Q(x, y) = 0$ , когда  $\xi$  и  $\eta$  имеют порядок  $\mu$ , фазовая скорость изображающей точки будет ограниченной при  $\mu \rightarrow 0$ . Вне этой окрестности при  $\mu \rightarrow 0$   $\dot{y} \rightarrow \infty$ , а  $\dot{x}$  в соответствии с уравнениями (6.13) остается ограниченной и

$$\frac{dx}{dy} = \mu \frac{P(x, y)}{Q(x, y)} \rightarrow 0 \text{ при } \mu \rightarrow 0.$$

Следовательно, фазовые траектории вне малой окрестности (порядка  $\mu$ ) линии  $Q(x, y) = 0$  при малом  $\mu$  близки к прямым  $x = \text{const}$ . По этим кривым изображающая точка движется с большими скоростями. Эта область называется

областью «быстрых» движений. Приближенными уравнениями быстрых движений будут

$$x = x^0 = \text{const}, \quad \mu \dot{y} = Q(x^0, y). \quad (6.17)$$

Отметим, что особыми точками системы (6.17) будут точки пересечения линий  $x = x^0 = \text{const}$  с кривой  $Q(x, y) = 0$ .

Таким образом, уравнения (6.14) оказываются нецелесообразными для описания движения динамической системы. Уравнения (6.14) могут отражать движение системы только в малой окрестности (порядка  $\mu$ ) линии  $Q(x, y) = 0$ , где  $\dot{x}$  и  $\dot{y}$  остаются конечными. Эти движения называются «медленными» движениями, а указанная малая окрестность линии  $Q(x, y) = 0$  областью медленных движений.

Для того чтобы выяснить, является ли малый параметр существенным при рассмотрении движения системы или нет, рассмотрим возможные случаи.

Возможен случай, когда все траектории быстрых движений при возрастании времени идут внутрь области медленных движений (малой окрестности линии  $Q(x, y) = 0$ ). Тогда изображающая точка, помещенная внутрь области медленных движений, в начальный момент будет двигаться в этой области, так как нет траекторий, выходящих из этой области. В этом случае учет малого параметра оказывается несущественным \*).

Найдем условия несущественности учета малого параметра. Как уже ранее было сказано, точки линии  $Q(x, y) = 0$  являются состояниями равновесия (особыми точками) уравнений быстрых движений, поэтому поведение траекторий быстрых движений вблизи линии  $Q(x, y) = 0$  полностью определяется характером этих состояний равновесия. Перепишем уравнения быстрых движений (6.17) в виде

$$\frac{dy}{dt'} = Q(x, y), \quad x = \text{const}, \quad t' = \frac{t}{\mu}.$$

Вводя  $y = \bar{y} + \eta$ , получим уравнение первого приближения

$$\frac{d\bar{y}}{dt'} = Q'_y \eta.$$

\* ) Если в начальный момент изображающая точка была в области быстрых движений, то она по соответствующей траектории быстрого движения придет в область медленных движений по истечении соответствующего промежутка времени.

Отсюда следует, что если  $Q'_y < 0$ , то точки линии  $Q(x, y) = 0$  являются устойчивыми особыми точками для приближенных уравнений быстрых движений и все траектории быстрых движений входят в область медленных движений. Следовательно, условием несущественности малого параметра является условие  $Q'_y < 0$ \*). При  $Q'_y > 0$  точки линии  $Q(x, y)$  являются неустойчивыми особыми точками для уравнений быстрых движений.

Рассмотрим теперь случай, когда на какой-либо части линии  $Q(x, y) = 0$   $Q'_y < 0$ , а на другой  $Q'_y > 0$ . В этом случае изображающая точка, помещенная в начальный момент в малую окрестность линии  $Q(x, y) = 0$ , где  $Q'_y > 0$ , не будет оставаться там и выйдет в область быстрых движений. Следовательно, имеют место движения, которые начинаются из состояний, совместных с уравнениями

\*) Строгое доказательство условий несущественности малых параметров для системы уравнений

$$\dot{x}_i = P_i(x_1, x_2, \dots, x_s, y_1, y_2, \dots, y_k),$$

$$\mu \dot{y}_j = Q_j(x_1, x_2, \dots, x_s, y_1, y_2, \dots, y_k)$$

( $i = 1, 2, \dots, s$ ,  $j = 1, 2, \dots, k$ ,  $n = s + k$ ) дано в работах И. С. Градштейна и А. Н. Тихонова [4, 5, 13] и заключается в следующем: если все  $k$  корней характеристического уравнения

$$\left| \begin{array}{ccc} \frac{\partial Q_1}{\partial y_1} - \lambda & \frac{\partial Q_1}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial Q_1}{\partial y_k} \\ \frac{\partial Q_2}{\partial y_1} & \frac{\partial Q_2}{\partial y_2} - \lambda & \cdots & \frac{\partial Q_2}{\partial y_k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial Q_k}{\partial y_1} & \frac{\partial Q_k}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial Q_k}{\partial y_k} - \lambda \end{array} \right| = 0$$

имеют отрицательные действительные части при любых  $x_i, y_i$ , удовлетворяющих уравнениям

$$Q_j(x_1, x_2, \dots, x_s, y_1, y_2, \dots, y_k) = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, k),$$

то лежащие внутри малой  $O(\mu^\alpha)$  окрестности подпространства  $Q_j$  (с числом измерений  $k < n$ ) ( $0 < \alpha < 1$ ) являются устойчивыми состояниями равновесия для приближенных уравнений быстрых движений

$$x_i = x_i^0 = \text{const}, \quad \mu \dot{y}_j = Q_j(x_1^0, x_2^0, \dots, x_s^0, y_1, y_2, \dots, y_k)$$

и все траектории быстрых движений вблизи подпространства  $Q_j$  входят при возрастании времени в малую окрестность последнего.

(6.14), но не могут быть рассмотрены без учета малого параметра. Малый параметр в этом случае оказывается существенным.

Отметим, что в точках линии  $Q(x, y) = 0$ , где  $Q'_y$  меняет знак, производная  $Q'_y(x, y) = 0$ , т. е. в этих точках линия  $Q(x, y) = 0$  имеет вертикальные касательные.

Перейдем к решению задачи о возникновении разрывных колебаний ([1, 6, 7, 8, 10–12] и др.). Рассмотрим снова уравнения быстрых движений (6.17):

$$x = \text{const}, \quad \mu \dot{y} = Q(x, y).$$

Как было уже сказано, особыми точками этих уравнений являются точки пересечения прямых  $x = \text{const}$  с линией  $Q(x, y) = 0$ . Следовательно, эти точки пересечения разбивают прямые  $x = \text{const}$  на траектории быстрых движений. Если при достаточно больших  $|y|$  знак функции  $Q(x, y)$  противоположен знаку  $y$ , то траектории быстрых движений идут из бесконечности и от участков линии  $Q(x, y) = 0$ , где  $Q'_y > 0$ , к тем участкам линии, где  $Q'_y < 0$ . Это означает, что медленные движения системы, когда  $\dot{x}$  и  $\dot{y}$  ограничены в течение конечных интервалов времени при  $\mu \rightarrow 0$ , будут происходить только в малых окрестностях (порядка  $\mu$ ) участков  $Q(x, y) = 0$ ,  $Q'(x, y) < 0$ , т. е. будут приближенно отображаться уравнениями вырожденной системы

$$\dot{x} = P(x, y), \quad Q(x, y) = 0.$$

Рассмотрим теперь предельный случай, когда  $\mu \rightarrow 0$ . Предположим, что на линии  $Q(x, y) = 0$  имеются участки, на которых  $Q'_y < 0$ , и участки, на которых  $Q'_y > 0$ . Как было уже сказано, на границе этих участков линия  $Q(x, y) = 0$  имеет вертикальные касательные. Вся плоскость, за исключением линии  $Q(x, y) = 0$ , при  $\mu = 0$  будет заполнена прямыми  $x = \text{const}$  — траекториями быстрых (скачкообразных) движений, идущих к частям линии  $Q(x, y) = 0$ , где  $Q'_y < 0$  \*); эти части линии  $Q(x, y) = 0$  являются траекториями медленных движений, вдоль которых изображающая точка движется с ограниченными  $\dot{x}$  и  $\dot{y}$ .

\*). Отметим, что согласно уравнениям быстрых движений изображающая точка будет скачкообразно перемещаться вверх ( $\dot{y} \rightarrow \infty$ ) при  $Q(x, y) > 0$  и вниз ( $\dot{y} \rightarrow -\infty$ ) при  $Q(x, y) < 0$ .

Пусть изображающая точка, совершая «медленное» движение, дойдет до точки, где  $Q'_y = 0$ ; тогда она войдет в область быстрых движений и скачкообразно по выходящей из этой точки траектории  $x = \text{const}$  переместится снова на линию медленных движений. Таким образом, в этом случае в системе будут происходить разрывные колебания — колебания, состоящие из чередующихся между собой «медленных» и скачкообразных движений. Отметим, что в точках линии  $Q(x, y) = 0$ , где  $Q'_y = 0$ , при  $\mu = 0$   $\dot{y}$  обращается в бесконечность. Продифференцировав по  $t$   $Q(x, y) = 0$  и воспользовавшись уравнениями (6.14), получим для медленных движений

$$Q'_x P + Q'_y \dot{y} = 0.$$

Предполагая, что  $Q'_x \neq 0$ , получим, что

$$\dot{y} = -\frac{Q'_x P}{Q'_y}.$$

Отсюда следует, что при  $\mu = 0$  в точках, где  $Q'_y = 0$ ,  $\dot{y}$  обращается в бесконечность. При переходе через эти точки  $\dot{y}$  меняет знак, т. е. эти точки являются точками стыка фазовых траекторий. Вернемся к примеру, рассмотренному в предыдущем параграфе. Уравнение движения колодки при  $I \neq 0$  имеет вид

$$I\ddot{\phi} = -c\dot{\phi} + M(\Omega - \dot{\phi}).$$

Вид функции  $M(\Omega - \dot{\phi})$  показан на рис. 6.4. Представим это уравнение в виде двух уравнений первого порядка:

$$I \frac{d\dot{\phi}}{dt} = -c\dot{\phi} + M(\Omega - \dot{\phi}), \quad \frac{d\phi}{dt} = \dot{\phi}. \quad (6.18)$$

Линия  $Q(\phi, \dot{\phi}) = -c\dot{\phi} + M(\Omega - \dot{\phi})$  представлена на рис. 6.9. Особая точка уравнений (6.18) определяется из уравнений

$$-c\dot{\phi} + M(\Omega - \dot{\phi}) = 0, \quad \dot{\phi} = 0.$$

Так как  $Q'_\phi = -M'(\Omega - \dot{\phi})$ , то на участках  $FE$ ,  $BC$  и  $GA$  производная  $Q'_\phi < 0$ , на участках  $EG$  и  $AC$   $Q'_\phi > 0$ . Вид фазовой плоскости при  $I = 0$  представлен на рис. 6.10. Изображенный на рис. 6.10 предельный цикл  $DABCD$  соответствует периодическим разрывным автоколебаниям динамической системы. На участке  $DA$   $\dot{\phi} = \Omega$  и, следо-

вательно,  $\varphi = \Omega t + M_1/c$  ( $M_1$  — минимальное значение момента силы трения). При  $t = T_1$  ( $T_1$  — время движения на участке  $DA$ )  $\varphi = M_0/c$ , значит,

$$T_1 = \frac{1}{\Omega} \left( \frac{M_0}{c} - \frac{M_1}{c} \right).$$

На участках  $AB$  и  $CD$  изображающая точка перемещается

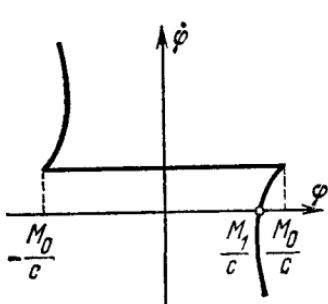


Рис. 6.9

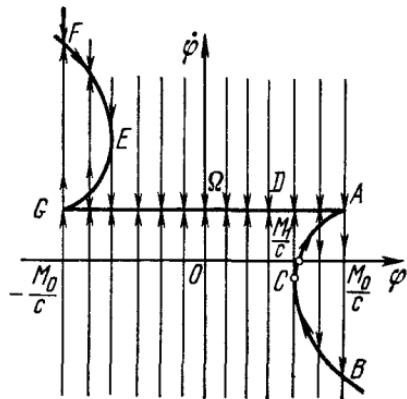


Рис. 6.10

при  $I = 0$  мгновенно. На участке  $BC$  время движения можно определить по формуле

$$T_2 = \int_{M_0/c}^{M_1/c} \frac{d\varphi}{\dot{\varphi}},$$

но так как на этом участке  $-c\varphi + M(\Omega - \varphi) = 0$ , то

$$d\varphi = -\frac{1}{c} M' (\Omega - \varphi) d\varphi$$

и, следовательно,

$$T_2 = -\frac{1}{c} \int_{\varphi_B}^{\varphi_C} \frac{M' (\Omega - \varphi)}{\dot{\varphi}} d\varphi,$$

где  $\varphi_B$  и  $\varphi_C$  — значения  $\varphi$  соответственно в точках  $B$  и  $C$ . Период разрывных колебаний, очевидно, равен  $T = T_1 + T_2$ . На рис. 6.11 и 6.12 представлены примерные графики зависимостей  $\varphi$  и  $\dot{\varphi}$  от  $t$ .

В качестве электрического аналога механической системы, совершающей разрывные (релаксационные) коле-

бания, рассмотрим генератор разрывных колебаний с неоновой лампой [1]. На рис. 6.13 представлена схема такой динамической системы. Дифференциальное уравнение, описывающее такую динамическую систему, может быть представлено в виде

$$C \frac{du}{dt} = \frac{E - u}{R} - i. \quad (6.19)$$

При выводе этого уравнения не учтены малые параметры — индуктивность контура и инертность газового разряда. Сила тока  $i$  через неоновую лампу определяется напряжением  $u$  и статической характеристикой  $i = \varphi(u)$ .

Для того чтобы выяснить возможность описания про-

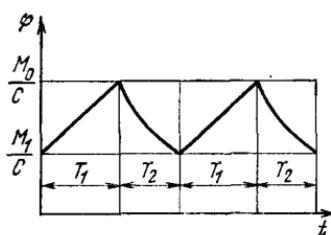


Рис. 6.11

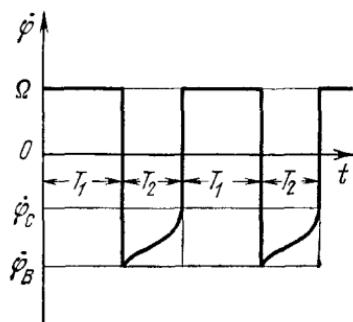


Рис. 6.12

цесса в рассматриваемой вырожденной динамической системе с помощью уравнения (6.19), рассмотрим схему, представленную на рис. 6.14, в которой малые параметры

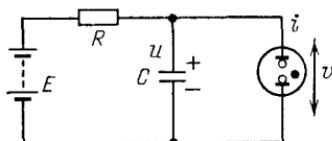


Рис. 6.13

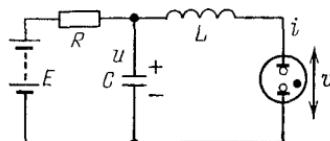


Рис. 6.14

(индуктивность контура и инерционность газового разряда) учтены малой индуктивностью  $L$ .

Уравнения, описывающие динамическую систему, в этом случае будут

$$C \frac{du}{dt} = \frac{E - u}{R} - i, \quad L \frac{di}{dt} = u - v, \quad (6.20)$$

где вид функции  $i = \varphi(v)$  или  $v = \psi(i)$  представлен на рис. 6.15. Таким образом, уравнения (6.20) можно записать в виде

$$\begin{aligned} C \frac{du}{dt} &= \frac{E - u}{R} - i = cP(u, i), \\ L \frac{di}{dt} &= u - \psi(i) = Q(u, i). \end{aligned} \quad (6.21)$$

Выясним сначала вопрос о существенности или несущественности малого параметра  $L$ . Так как  $Q = u - \psi(i)$ , то

$$Q'_i = -\psi'(i).$$

Из рассмотрения рис. 6.16 следует, что на линии  $Q = 0$  ( $u = \psi(i)$ ) есть участок, где  $\psi' < 0$  (участок  $BD$ ), и, следовательно, для этого участка  $Q'_i > 0$ , а это значит,

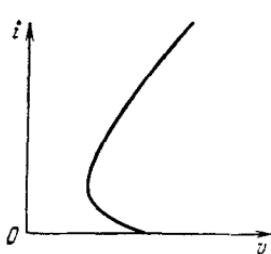


Рис. 6.15

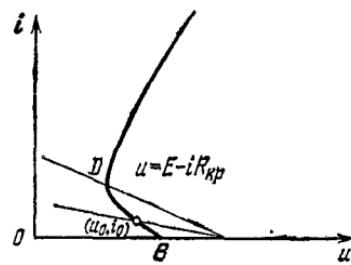


Рис. 6.16

что для этого участка параметр  $L$ , несмотря на малость, является существенным. Поэтому рассмотрение динамической системы следует проводить с помощью уравнений (6.21), считая  $L$  малым параметром. Состояния равновесия системы (6.21) определяются из уравнений

$$E - u - iR = 0, \quad u - \psi(i) = 0.$$

На плоскости  $ui$  состояния равновесия являются точками пересечения линии  $u = \psi(i)$  и прямой  $u = E - iR$  ( $i = \frac{E - u}{R}$ ). Мы рассмотрим тот случай, когда  $R > R_{kp}$ , где  $R_{kp}$  — значение  $R$ , при котором прямая  $u = E - iR$  пересекает линию  $u = \psi(i)$  в точке, где  $\psi(i)$  имеет вертикальную касательную. Примем также, что  $u_1 = E > \psi(0)$ . Состояние равновесия при этом будет единственным и расположено на участке линии, где  $\psi'(i) < 0$ . Най-

дем условия, при которых это состояние равновесия будет неустойчивым. Характеристическое уравнение имеет вид

$$\begin{vmatrix} -\frac{1}{RC} - s & -\frac{1}{C} \\ \frac{1}{L} & -\frac{\psi'}{L} - s \end{vmatrix} = 0$$

или

$$RCLS^2 + [L + RC\psi'(i_0)]S + R + \psi'(i_0) = 0.$$

При выбранных значениях  $R > R_{kp}$  и  $E > \psi(0)$   $0 < -\psi'(i_0) < R$ . Состояние равновесия будет неустойчивым при  $L + RC\psi'(i_0) < 0$  или  $\frac{L}{RC} < -\psi'(i_0)$ . При больших  $R$  и  $C$  и достаточно малом  $L$  это условие может быть удовлетворено.

Перейдем к рассмотрению предельного случая  $L \rightarrow 0$ . Вне линии  $Q = u - \psi(i) = 0$  при  $L \rightarrow 0$

$$\frac{di}{dt} = \frac{u - \psi(i)}{L} \rightarrow \infty.$$

Следовательно, вне линии  $Q = 0$  (в области быстрых движений) при  $L$ , достаточно малом, фазовые траектории близки к прямым  $i = \text{const}$ . При  $L \rightarrow 0$  фазовая плоскость вне линии  $Q = 0$  заполнена вертикальными прямолинейными траекториями, соответствующими скачкообразному изменению тока. Это значит, что для всех начальных условий (вне линии  $Q = 0$ ) имеют место скачки тока  $i$  через неоновую лампу при неизменяющемся напряжении  $u$  на конденсаторе. Медленные движения при  $L \rightarrow 0$  происходят только на том участке линии  $Q = 0$ , где  $Q'_i < 0$  ( $\psi'(i) > 0$ ), и, следовательно, только на этом участке изменения в системе удовлетворяют уравнению (6.19). Заметим, что линия  $i = 0$  (ось  $i$ ) также относится к линии  $Q = 0$ . Изменение  $u$  на линии  $i = 0$  определяется уравнением

$$C \frac{du}{dt} = \frac{E - u}{R}. \quad (6.22)$$

На рис. 6.17 показано разбиение плоскости  $ui$  на траектории при  $L \rightarrow 0$ . При любых начальных условиях в

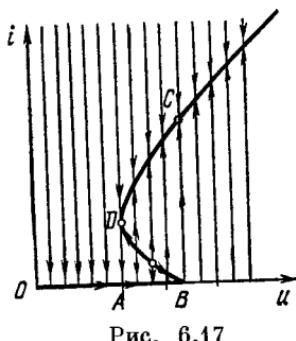


Рис. 6.17

вне линии  $Q = 0$  имею место скачки тока  $i$  через неоновую лампу при неизменяющемся напряжении  $u$  на конденсаторе. Медленные движения при  $L \rightarrow 0$  происходят только на том участке линии  $Q = 0$ , где  $Q'_i < 0$  ( $\psi'(i) > 0$ ), и, следовательно, только на этом участке изменения в системе удовлетворяют уравнению (6.19). Заметим, что линия  $i = 0$  (ось  $i$ ) также относится к линии  $Q = 0$ . Изменение  $u$  на линии  $i = 0$  определяется уравнением

системе устанавливаются устойчивые разрывные колебания, которым соответствует на плоскости  $ui$  предельный цикл  $ABCDA$ .

Если, например, в начальный момент времени  $i = 0$  (лампа не горит), то изображающая точка будет перемещаться по оси  $u$  до точки  $B$ , из которой скачком перейдет в точку  $C$ , где  $i = i_C$  (лампа загорается), далее, по кривой  $Q = 0$  она будет перемещаться до точки  $D$ , где  $i = i_D$ , и затем скачком перейдет в точку  $A$  (лампа погаснет). Далее процесс будет повторяться аналогичным образом. Найдем период колебаний. При движении от точки  $A$  до точки  $B$  в соответствии с уравнением (6.22) имеем

$$T_1 = RC \int_{u_D}^{u_C} \frac{du}{E - u} = RC \ln \frac{E - u_D}{E - u_C}.$$

Время движения от точки  $C$  до точки  $D$  найдем с помощью уравнения

$$\frac{du}{dt} = \frac{E - u - R\varphi(u)}{RC};$$

оно выразится формулой

$$T_2 = RC \int_{u_C}^{u_D} \frac{du}{E - u - R\varphi(u)}. \quad (6.23)$$

Период разрывных колебаний равен  $T = T_1 + T_2$ .

Аппроксимируем участок кривой  $i = \varphi(u)$ , где происходит медленное движение, прямой линией, проходящей через точки  $D$  и  $C$ :

$$\frac{i - i_D}{i_C - i_D} = \frac{u - u_D}{u_C - u_D}.$$

Перепишем это уравнение в виде

$$i = \frac{i_C - i_D}{u_C - u_D} u - \frac{i_C - i_D}{u_C - u_D} \frac{i_C u_D - i_D u_C}{i_C - i_D}.$$

Введя обозначения

$$R^* = \frac{u_C - u_D}{i_C - i_D}, \quad u_0 = \frac{i_C u_D - i_D u_C}{i_C - i_D},$$

окончательно получим

$$i = \frac{u - u_0}{R^*}. \quad (6.24)$$

В соответствии с формулой (6.23)

$$\begin{aligned} T_2 &= C \int_{u_C}^{u_D} \frac{RR^* du}{R^*E + Ru_0 - u(R + R^*)} = \\ &= \frac{CRR^*}{R + R^*} \ln \frac{R^*E - R(u_C u_0) - u_C R^*}{R^*E - R(u_D - u_0) - u_D R^*}; \end{aligned}$$

так как на основании (6.24)

$$\frac{u_C - u_0}{R^*} = i_C, \quad \frac{u_D - u_0}{R^*} = i_D,$$

то

$$T_2 = C \frac{RR^*}{R + R^*} \ln \frac{E - Ri_C - u_C}{E - Ri_D - u_D}.$$

Найдем теперь законы изменения  $u$  на участках  $AB$  и  $CD$ . Закон изменения  $u$  на участке  $AB$  найдем из уравнения

$$\frac{du}{dt} = \frac{E - u}{RC}.$$

Общим решением этого уравнения будет

$$u = Ae^{-t/RC} + E,$$

где  $A$  — постоянная интегрирования. При  $t=0$   $u = u_D$ , следовательно,  $A = u_D - E$  и

$$u = (u_D - E)e^{-t/RC} + E.$$

На участке  $CD$  справедливо уравнение

$$\frac{du}{dt} = \frac{E - u}{RC} - \frac{i}{C}.$$

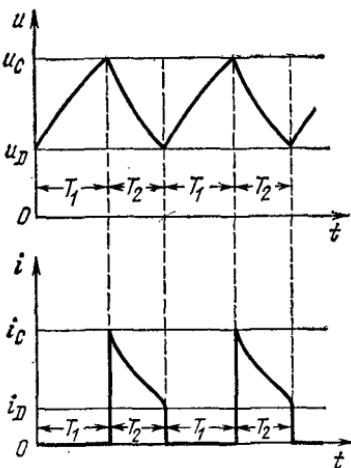


Рис. 6.18

Используя выражение (6.24), получим

$$\frac{du}{dt} + u \frac{R^* + R}{CRR^*} = \frac{R^*E + Ru_0}{CRR^*}.$$

Решая это уравнение, приняв во внимание, что при  $t = 0$   $u = u_C$ , будем иметь

$$u = \left( u_C - \frac{R^*E + Ru_0}{R + R^*} \right) e^{-\frac{R+R^*}{CRR^*}t} + \frac{R^*E + Ru_0}{R + R^*}.$$

Зная закон изменения  $u$  по формуле (6.24), можно определить закон изменения  $i$ . На рис. 6.18 показаны примерные графики изменения  $u$  и  $i$ . На графиках видно пилообразное изменение  $u$  и скачкообразное изменение  $i$ .