

ГЛАВА 7

ВВЕДЕНИЕ В КАЧЕСТВЕННУЮ ТЕОРИЮ И ТЕОРИЮ НЕЛИНЕЙНЫХ КОЛЕБАНИЙ МНОГОМЕРНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Задачей качественной теории многомерных динамических систем является совместное изучение структур разбиения фазового пространства и пространства параметров. Эта общая трактовка предмета исследования качественной теории, как математической основы теории нелинейных колебаний, включает в себя изучение установившихся движений и их бифуркаций, выяснение областей притяжения установившихся движений, а также глобальной картины их взаиморасположения и перехода друг в друга при изменении параметров [1–3, 36, 41].

Наибольшие трудности в таком исследовании представляют глобальные вопросы. Локальные исследования несравненно более просты. В связи с этим можно видеть основное направление качественной теории в том, чтобы, опираясь на локальные исследования, шаг за шагом расширять исследуемые области фазового пространства и пространства параметров.

Если фазовое пространство разбить на достаточно малые области, то структура фазовых траекторий в каждой из них очень проста и вся трудность исследования состоит в соединении этих простых картинок в общую глобальную картину.

Помимо этой общей идеи изучения от локального к глобальному, фундаментальное значение имеет идея игнорирования особых случаев, ограничение рассмотрения только общими случаями.

Идеальным образцом реализации этих идей является качественная теория дифференциальных уравнений на плоскости [4, 5, 46]. Если ограничиться только общими локальными картинками разбиения, то таких существенно

разных картинок на плоскости будет только четыре. Это — окрестность обычной точки и окрестности особых точек типа устойчивого или неустойчивого узла или фокуса и типа седла (рис. 7.1).

Первый шаг расширения рассматриваемых областей приводит к выявлению особой роли замкнутых траекторий

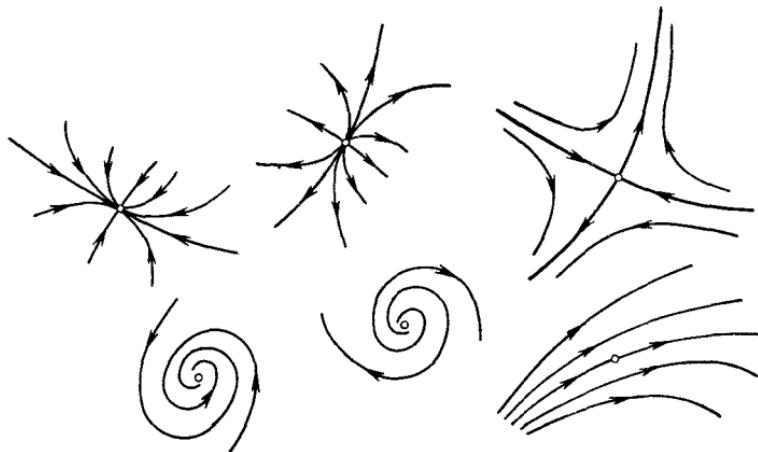


Рис. 7.1

и сепаратрис седловых состояний равновесия. Отсекая особые случаи, приходим к двум существенно разным локальным картинкам, представленным на рис. 7.2, на которых изображены окрестности простых устойчивого и неустойчивого периодических движений. После этого удается склеить все локальные картинки вместе и прийти к полной ясности в отношении вида общего разбиения фазовой плоскости на траектории. Как известно, это разбиение в общем случае составлено из конечного числа областей притяжения, устойчивых состояний равновесия и периодических движений, все виды которых возможно перечислить [1, 4]. Некоторые из них изображены на рис. 7.3. Это означает полное исследование вопроса о структуре разбиения фазовой плоскости на фазовые траектории.

Вторая часть проблемы качественного изучения — теория зависимости от параметров — решается в таком же порядке. Проводится локальное исследование бифуркаций, затем выясняется их роль в изменении глобальной структуры. Отсекаются особые случаи.

Несомненно, что такой же путь возможен и в качественной теории многомерных динамических систем. Однако его реализация несомненно сложнее и встречает на своем

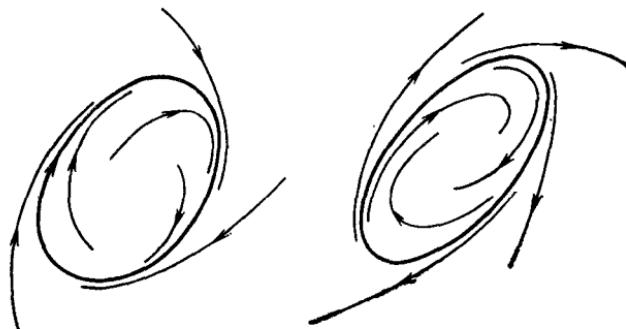


Рис. 7.2



Рис. 7.3

пути немало совершенно новых трудностей. Но не только в этом дело. Конечный итог тоже будет много сложнее, возможно, что он даже настолько сложен, что целесообразно еще чем-то пожертвовать, еще что-то назвать несущественным или принять за излишне детальное.

После этих общих вводных слов перейдем к изложению накопленных к настоящему времени сведений о многомерных динамических системах. Это изложение, по необходимости выборочное, содержит факты, имеющие наибольшее значение для общего понимания особенностей многомерных динамических систем, трактуемых в первую очередь как особенности структуры разбиения на траектории ее фазового пространства.

Объектом исследования будут динамические системы (Φ, T) с многомерным фазовым пространством Φ и оператором T , задаваемым либо дифференциальными уравнениями, либо точечным отображением. Напомним, что в понятие математической модели динамической системы входит: фазовое пространство Φ (как совокупность составляющих его фазовых точек), наделенное естественным понятием близости, возможно, формализованной некоторой метрикой, и однозначный оператор T , зависящий от параметров t_1 и t_2 (времени) с множеством значений пар $(t_1, t_2) \in \omega(x)$, которые удовлетворяют следующим предположениям:

1. $T(t_1, t_2)x \in \Phi$ при любых $(t_1, t_2) \in \omega(x)$, $x \in \Phi$.
2. Если $(t_1, t_2) \in \omega(x)$ и $(t_2, t_3) \in \omega(T(t_1, t_2)x)$, то $(t_1, t_3) \in \omega(x)$ и для любого $x \in \Phi$

$$T(t_1, t_3)x = T(t_2, t_3)T(t_1, t_2)x.$$

Точечное отображение

$$\bar{x} = T(t_1, t_2)x$$

трактуется при этом как преобразование состояния x в момент времени t_1 в состояние \bar{x} в момент времени t_2 . Подчеркнем, что это определение математической модели динамической системы охватывает как детерминированные системы, так и стохастические [41].

Последующее изложение разбито на пять параграфов. Чтение их предполагает большую подготовленность, чем предыдущие главы. Читателю, впервые знакомящемуся с этими вопросами, помимо глав 1—4 настоящей книги, можно посоветовать главу 1 книги [41]. § 3 содержит вспомогательный материал по теории точечных отображений и может читаться независимо. При желании чтение главы можно начать с него. § 4 содержит общее описание и исследование движений в малой окрестности произвольной гомоклинической структуры. Последующее чтение

предполагает лишь общее знакомство с содержанием установленных в нем фактов. В § 5 рассматриваются новые для теории колебаний вопросы самогенерации динамической системой стохастических колебаний. Описываются возможные механизмы возникновения стохастичности в динамических системах. Обнаруживается связь между стохастическими колебаниями и гомоклиническими структурами, открытymi еще Пуанкаре. На примерах трехмерных неавтономных систем, близких к двумерным автономным системам, описываются бифуркации, приводящие к стохастизации колебаний.

Читателю, не ставящему целью подробное ознакомление с содержанием этой главы, рекомендуется начать ее чтение с заключительного § 6.

§ 1. Локальное изучение состояний равновесия и периодических движений

Пусть речь идет о динамической системе, описываемой гладким дифференциальным уравнением

$$\frac{dx}{dt} = f(x) \quad (x = (x_1, x_2, \dots, x_n), \quad f = (f_1, f_2, \dots, f_n)). \quad (7.1)$$

В малой окрестности каждой своей точки x разбиение фазового пространства Φ в двумерном случае, как уже говорилось, имеет один из видов, представленных на рис. 7.1. В трехмерном случае — один из видов, представленных на рис. 7.4, а — д. В случае произвольной размерности n топологически различных картинок, которые, к сожалению, не могут быть представлены рисунками, будет $n + 2$. Одна соответствует обыкновенной точке и $n + 1$ различным типам простых особых точек $O^{p,q}$ ($p = -0, 1, \dots, n$, $p + q = n$) [44]. Фазовые траектории в окрестности обыкновенной точки подобны пучку параллельных прямых. Окрестность особой точки $O^{p,q}$ в зависимости от значений p и q имеет один из следующих видов.

При $p = n$ все траектории при $t \rightarrow +\infty$ стремятся к точке $O^{n,0}$, что соответствует устойчивой особой точке. Окрестность точки $O^{0,n}$ подобна окрестности точки $O^{n,0}_s$ с заменой времени t на $-t$. При $t \rightarrow -\infty$ все фазовые траектории входят в точку $O^{0,n}$. Точка $O^{0,n}$ — это неустойчивая особая точка.

Точки $O^{p,q}$ при $p \neq n, 0$ — седловые особые точки. Через седловую особую точку проходят две поверхности

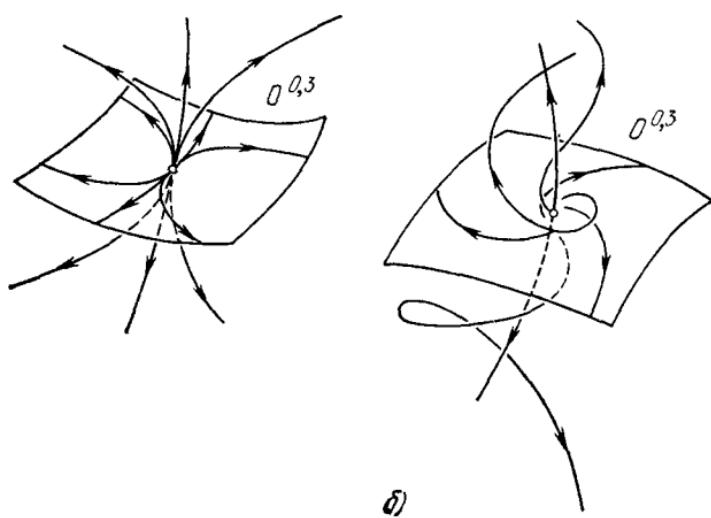
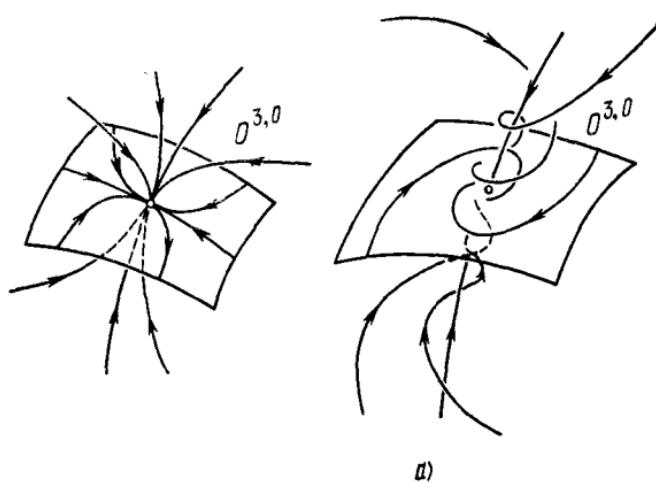
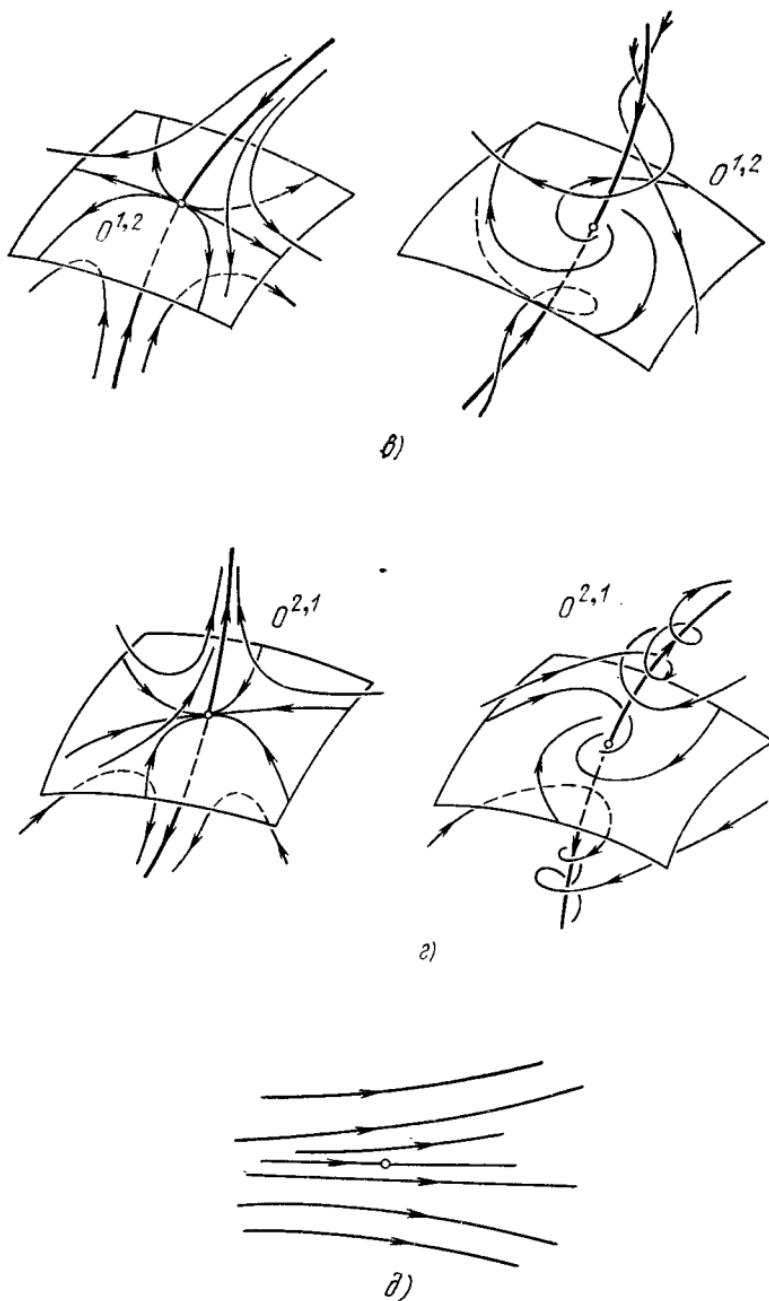


Рис. 7.4 а, б

Рис. 7.4 *e* — *d*

S_p^+ и S_q^- размерностей p и q , составленные из траекторий, стремящихся к точке $O^{p,q}$ при $t \rightarrow +\infty$ и соответственно $t \rightarrow -\infty$.

На поверхности S_p^+ точка $O^{p,q}$ является устойчивой особой точкой $O^{p,0}$, а на поверхности S_q^- — неустойчивой особой точкой $O^{0,q}$. Все остальные фазовые траектории проходят мимо точки $O^{p,q}$. Наглядно движение фазовой точки можно представить как суперпозицию движений фазовых точек по поверхностям S_p^+ и S_q^- . При этом имеется в виду следующее. В окрестности точки $O^{p,q}$ можно ввести переменные u (u_1, u_2, \dots, u_p) и v (v_1, v_2, \dots, v_q) так, что точка $O^{p,q}$ будет иметь координаты $u = 0, v = 0$, поверхности S_p^+ и S_q^- — уравнения $v = 0$ и соответственно $u = 0$, и движение любой фазовой точки $(u(t), v(t))$ при изменении t таково, что точка $(u(t), 0)$ представляет движение фазовой точки на поверхности S_p^+ , а точка $(0, v(t))$ — движение фазовой точки по поверхности S_q^- . Сказанное в трехмерном случае иллюстрируется рис. 7.5.

Все фазовые точки, близкие к особой точке $O^{n,0}$, стремятся к ней при $t \rightarrow +\infty$, т. е. некоторая малая окрестность δ точки $O^{n,0}$ к ней стягивается при возрастании времени t . Обозначим через $\delta(t)$ множество, в которое переходят точки окрестности δ спустя время t . При $t \rightarrow +\infty$ $\delta(t) \rightarrow O^{n,0}$. При обратном изменении времени, когда $t \rightarrow -\infty$, $\delta(t)$ заполняет некоторую область S_n^+ , состоящую из всех фазовых траекторий, стремящихся к точке $O^{n,0}$ при $t \rightarrow +\infty$. Эта область

$$S_n^+ = \bigcup_{i=0}^{\infty} \delta(-i) \quad (7.2)$$

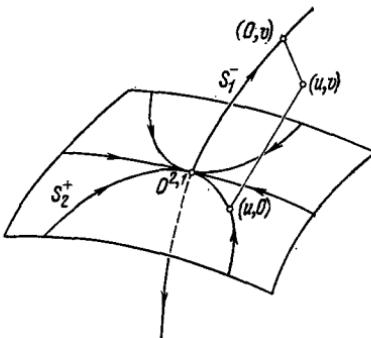


Рис. 7.5

называется областью притяжения устойчивой особой точки $O^{n,0}$. Для неустойчивой особой точки $O^{0,n}$, которая становится устойчивой после замены времени t на $-t$,

можно ввести область заполнения

$$S_n^- = \bigcup_{i=0}^{\infty} \delta(i). \quad (7.3)$$

Область заполнения становится областью притяжения после замены времени t на $-t$.

Устойчивой особой точке $O^{n, 0}$ соответствует уставновившееся движение динамической системы, называемое устойчивым состоянием равновесия. Область притяжения устойчивого состояния равновесия состоит из всех переходных движений, которые имеют своим предельным движением это равновесное состояние или, проще, которые в него переходят. В некотором смысле сказанным полностью решается вопрос о состояниях равновесия и их устойчивости в большом, поскольку состояния равновесия находятся из уравнения

$$f(x) = 0. \quad (7.4)$$

Среди них устойчивые состояния равновесия отбираются требованием, чтобы все корни так называемого характеристического уравнения имели отрицательные действительные части, а формула (7.2) в принципе позволяет найти область притяжения с любой степенью точности, поскольку области $\delta(i)$ при возрастании i ее исчерпывают.

Напомним, что характеристическим уравнением особой точки x^* , определяемой из уравнения (7.4), называется приравненный нулю полином n -й степени

$$\chi(\lambda) = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} - \lambda & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} - \lambda & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} - \lambda \end{vmatrix} = \text{Det} \left\| \frac{\partial f_i}{\partial x_j} - \delta_{ij}\lambda \right\|, \quad (7.5)$$

определяющий собственные значения матрицы $\partial f / \partial x$ в особой точке x^* , где f_1, f_2, \dots, f_n — компоненты правой части $f(x)$ уравнения (7.1), а x_1, x_2, \dots, x_n — компоненты вектора x .

Выполнение всех перечисленных операций — отыскание корней (7.4), составление характеристического полинома (7.5) и проверка условия локальной устойчивости, нахождение области S_n^+ — представляет значительные трудности, которые далеко не всегда могут быть преодолимы аналитически. При этом наиболее сложным является определение или оценка области притяжения. Разработанный для этого аналитический аппарат функций Ляпунова приводит к успеху лишь в ограниченном числе случаев. В остальных случаях остается только прямое вычисление областей $\delta(i)$. Как правило, это трудоемкая, но с привлечением вычислительных машин вполне выполнимая операция. В последнее время при решении конкретных задач к ней прибегают все чаще и чаще [56, 58, 10, 9, 14, 16, 17].

Что можно сказать о виде области притяжения, кроме того, что она полностью исчерпывается областью $\delta(i)$ при $i \rightarrow -\infty$? В некоторых случаях она довольно проста, и могут быть указаны и приближенно вычислены поверхности, из которых составлена ее граница. Но возможны случаи, когда она необычайно сложна. Соответствующие примеры будут приведены ниже в связи с рассмотрением так называемых гомоклинических структур. А сейчас вернемся к рассмотрению особых точек $O^{p,q}$.

Вид окрестности седловой особой точки $O^{p,q}$ ($p, q \neq 0$) был уже описан. К сказанному добавим, что числа p и q — это числа корней характеристического полинома (7.5) с отрицательной и соответственно положительной действительными частями. Окрестность седловой точки $O^{p,q}$ описанными выше способами «расширена» быть не может. Однако такое расширение возможно в отношении поверхностей S_p^+ и S_q^- . Именно, пусть δ^+ и δ^- — малые окрестности точки $O^{p,q}$ на поверхностях S_p^+ и S_q^- соответственно. Продолжим δ^+ , меняя время в сторону $-\infty$, и δ^- , меняя время в сторону $+\infty$. Эти продолженные поверхности по-прежнему обозначим через S_p^+ и S_q^- . Точка $O^{p,q}$ является на поверхности S_p^+ устойчивой неподвижной точкой $O^{p,0}$. Ее область притяжения — это продолженная поверхность

$$S_p^+ = \bigcup_{i=0}^{\infty} \delta^+(-i). \quad (7.6)$$

Аналогично точка $O^{p,q}$ на поверхности S_q^- — это неустойчивая особая точка $O^{0,q}$ с областью заполнения

$$S_q^- = \bigcup_{i=0}^{\infty} \delta^-(i). \quad (7.7)$$

Поверхности S_p^+ и S_q^- могут быть простого вида, но могут быть и очень сложного. Как будет видно из дальнейшего, они играют важную роль в структуре разбиения фазового пространства на траектории. Особую роль при этом играют поверхности S_{n-1}^+ и S_{n-1}^- размерности $n - 1$ на единицу меньшей размерности фазового пространства. Эти поверхности разделяют фазовые траектории на потоки траекторий с разным поведением. В этом смысле они подобны сепаратрисным кривым седел на фазовой плоскости. Поэтому им может быть присвоено наименование сепаратрисных поверхностей.

Перейдем теперь к рассмотрению более широких окрестностей — малых окрестностей отдельных фазовых траекторий. При этом особый интерес представляют окрестности замкнутых фазовых траекторий. С них и начнем.

Пусть Γ — замкнутая фазовая траектория и δ — ее малая окрестность. Пересечем фазовую кривую Γ в некоторой ее точке O секущей гиперплоскостью S . Пусть M — любая точка этой секущей гиперплоскости, достаточно близкая к точке O . Выходящая из нее фазовая траектория γ близка к Γ и поэтому пересечет S в некоторой точке \bar{M} . Тем самым каждой точке M в достаточно малой окрестности точки O на поверхности S ставится во взаимно однозначное соответствие точка \bar{M} этой же поверхности. Это соответствие можно рассматривать как некоторое точечное отображение T поверхности S в себя. Точка O является неподвижной точкой отображения T .

Вид точечного отображения T в окрестности точки O полностью определяет поведение фазовых траекторий в окрестности замкнутой кривой Γ . Тем самым задача рассмотрения окрестности замкнутой кривой сведена к рассмотрению окрестности точки с той лишь разницей, что раньше фазовые траектории в этой окрестности описывались дифференциальными уравнениями, а теперь — точечным отображением T . Это различие не очень существенно. Во всяком случае, трудности, связанные с этим различием, значительно меньше, чем трудности непосредственного исследования фазовых траекторий в окрестнос-

ти не точки, а целой кривой. На этом и основывается эффективность метода точечных отображений.

Возможные виды точечного отображения в окрестности неподвижной точки такие же, как и для особых точек дифференциального уравнения, и все сказанное выше о них применимо и к неподвижным точкам. Дальнейшее рассмотрение этого точечного отображения T проведем независимо от его происхождения. Введем координаты x_1, x_2, \dots, x_{n-1} и запишем точечное отображение T в виде

$$\bar{x} = f(x). \quad (7.8)$$

Для неподвижной точки x^* имеет место уравнение

$$x^* = f(x^*). \quad (7.9)$$

Характеристическое уравнение неподвижной точки записывается в виде

$$\chi(z) = \text{Det} \left\| \frac{\partial f_i}{\partial x_j} - \delta_{ij}z \right\| = 0. \quad (7.10)$$

Если это уравнение имеет p корней внутри единичного круга и q вне него, то неподвижная точка типа $O^{p, q}$ ($p + q = n - 1$). $O^{n-1, 0}$ — это устойчивая неподвижная точка, область притяжения которой может быть записана в виде

$$S_{n-1}^+ = \bigcup_{i=0}^{\infty} T^{-i}\delta. \quad (7.11)$$

Здесь $T^{-i}\delta$ означает i раз повторенное применение обратного преобразования T^{-1} к точкам достаточно малой окрестности δ неподвижной точки $O^{n-1, 0}$.

Точки $O^{n-2, 1}, \dots, O^{1, n-2}$ — седловые неподвижные точки. Точка $O^{0, n-1}$ — неустойчивая неподвижная точка. Поведение фазовых точек в их окрестностях совершенно такое же, как и в соответствующих случаях особых точек дифференциальных уравнений. Полная аналогия качественных видов малых окрестностей простых особых точек дифференциальных уравнений и простых неподвижных точек точечного отображения может быть объяснена возможностью аппроксимации в этой окрестности точечного отображения T отображением сдвига T_τ некоторого дифференциального уравнения [41]. При этой аппроксимации в линейном приближении точечные отображения T и T_τ в окрестности их общей неподвижной точки совпа-

дают и между корнями λ_i и z_i характеристических уравнений особой и неподвижной точек при соответствующей их нумерации имеют место соотношения

$$z_i = e^{\lambda_i \tau} \quad (i = 1, 2, \dots, n - 1), \quad (7.12)$$

из которых следует, что числа корней λ_i , лежащих слева и справа от мнимой оси, совпадают с числами корней z_i , лежащими внутри и вне единичного круга.

Характер неподвижной точки отображения T секущей S определяет поведение фазовых траекторий в окрестности периодического движения Γ . Именно, точке $O^{n-1, 0}$

соответствует устойчивое периодическое движение $\Gamma^{n, 1}$, точке $O^{0, n-1}$ — неустойчивое периодическое движение $\Gamma^{1, n}$, точке $O^{p, q}$ ($p, q \neq 0$) — седловое $\Gamma^{p+1, q+1}$. Через седловое периодическое движение $\Gamma^{p+1, q+1}$, соответствующее неподвижной точке $O^{p, q}$, проходят две составленные из фазовых траекторий поверхности S_{p+1}^+ и S_{q+1}^- . Пе-

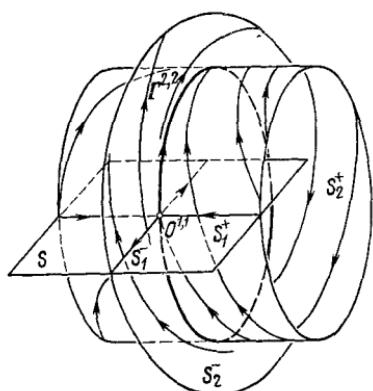


Рис. 7.6

рессечение этих поверхностей S_{p+1}^+ и S_{q+1}^- с секущей S дает инвариантные поверхности S_p^+ и S_q^- неподвижной точки $O^{p, q}$. Сказанное пояснено на рис. 7.6, где изображено периодическое движение $\Gamma^{2, 2}$ с проходящими через него поверхностями S_2^+ и S_2^- . На этом же рисунке показаны секущая S , неподвижная точка $O^{1, 1}$ и проходящие через нее кривые S_1^+ и S_1^- .

Выше были выяснены структуры окрестностей особых точек и замкнутых фазовых кривых. Выявилась особая роль устойчивых особой точки и замкнутой фазовой кривой, как установившихся движений — устойчивого состояния равновесия и устойчивого периодического движения. Следующий шаг состоит в изучении зависимости особых точек и периодических движений от параметров, в изучении того, как происходит переход от одного типа особой точки или периодического движения к другому,

как они возникают и исчезают. Эти изменения и переходы при непрерывном и монотонном изменении параметра происходят не постепенно, а скачками при прохождении через отдельные значения параметра. Эти скачкообразные изменения называются бифуркациями, а значения параметра, при которых они происходят, — бифуркационными. Для изучения бифуркаций и множества бифуркационных значений параметров целесообразно ввести в рассмотрение пространство параметров динамической системы. В простейшем случае пространство параметров — это одномерная прямая с некоторым множеством бифуркационных точек. Интервалы, лежащие между бифуркационными точками, соответствуют неизменности типа состояния равновесия или периодического движения. В более общем случае это многомерное пространство параметров разбито на области некоторым множеством бифуркационных поверхностей, размерности на единицу меньшей, чем размерность пространства. Каждой точке этого пространства параметров соответствует конкретная динамическая система. Некоторые из областей, на которые разбивается пространство параметров бифуркационными поверхностями, соответствуют наличию у динамической системы устойчивых состояний равновесия или периодических движений. На границе таких областей происходит либо исчезновение одного из этих движений, либо нарушение устойчивости. Поэтому задача выделения областей существования и устойчивости простейших установившихся движений (состояний равновесия и периодических движений) является частью более общей задачи изучения бифуркаций особых точек и замкнутых фазовых кривых. Значимость теории бифуркации состоит и в том, что она открывает путь к более полному изучению динамических систем и оказывается полезной даже при изучении конкретной динамической системы, не зависящей ни от каких параметров. Последнее означает, что в ряде случаев изучение конкретной динамической системы существенно облегчается путем искусственного введения параметров и последующего использования теории бифуркаций.

Перейдем к рассмотрению бифуркаций состояний равновесия и периодических движений. Пусть правая часть уравнения (7.1) гладко зависит от параметров μ . Состояние равновесия является корнем уравнения

$$f(x^*(\mu), \mu) = 0, \quad (7.13)$$

а его тип определяется корнями характеристического уравнения

$$\chi(\lambda, \mu) = 0. \quad (7.14)$$

При непрерывном изменении параметров μ возможно исчезновение корня $x^*(\mu)$ уравнения (7.13) лишь в случае обращения в нуль его якобиана. Как видно из (7.5), этот якобиан совпадает с значением характеристического полинома при $\lambda = 0$. В силу этого граница области существования состояния равновесия составлена из точек, удовлетворяющих уравнению

$$\chi(0, \mu) = 0. \quad (7.15)$$

Изменение типа состояния равновесия при непрерывном изменении параметров происходит при изменении чисел корней характеристического уравнения, находящихся справа и слева от мнимой оси комплексной плоскости λ , т. е. при обращении действительной части одного из его корней в нуль. Поэтому любая точка границы области устойчивости состояний равновесия данного типа удовлетворяет уравнению

$$\chi(i\omega, \mu) = 0 \quad (7.16)$$

при каком-нибудь действительном значении ω . Разделяя действительную и мнимую части, запишем уравнение (7.16) в виде

$$\chi_1(\omega, \mu) = 0, \quad \chi_2(\omega, \mu) = 0. \quad (7.17)$$

Эти уравнения в общем случае определяют некоторую поверхность N_ω с параметрическими уравнениями (7.17), где ω изменяется от $-\infty$ до $+\infty$, и особую поверхность N_0 , точки которой удовлетворяют уравнению

$$\chi_1(0, \mu) = 0. \quad (7.18)$$

Точки поверхности N_ω соответствуют наличию двух чисто мнимых сопряженных корней $\pm i\omega$, точки N_0 — одного нулевого. Поверхность нулевых корней N_0 совпадает с поверхностью (7.15), определяющей границу области существования особой точки $x^*(\mu)$. Внутри каждой области, ограниченной поверхностями N_ω и N_0 , состояние равновесия зависит от параметров μ непрерывно и имеет один и тот же тип, определяемый числами p и q .

Опишем теперь, что происходит с состоянием равновесия $O^{p,q}(\mu)$ при непрерывном изменении параметра μ с переходом через поверхность N_0 или N_ω .

В первом случае, как оказывается, происходит исчезновение состояния равновесия $O^{p,q}(\mu)$. Это исчезновение происходит благодаря слиянию его с другим состоянием равновесия типа $O^{p+1,q-1}$ или типа $O^{p-1,q+1}$. В момент слияния возникает сложное состояние равновесия, которое

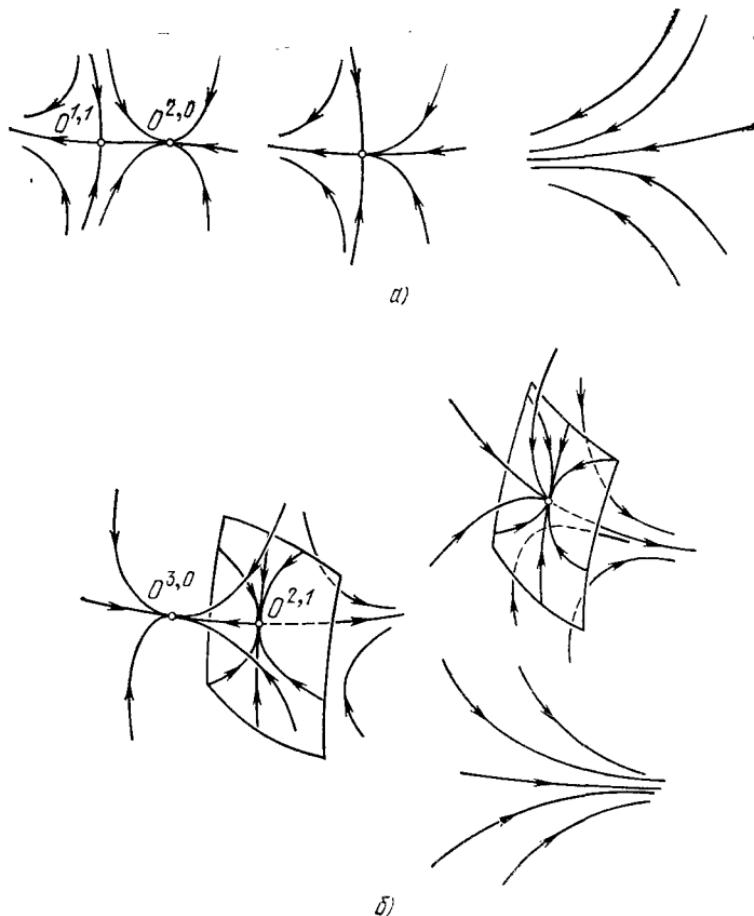


Рис. 7.7

при дальнейшем изменении параметров исчезает. Сказанное поясняет рис. 7.7, на котором представлены последовательные стадии изменения состояний равновесия в двумерном и трехмерном случаях при непрерывном изменении параметра μ , приводящем к пересечению поверхности N_0 .

Во втором случае при проходе через поверхность N_ω состояние равновесия сохраняется. При этом, если оно ранее было типа $O^{p,q}$, то после прохода точкой μ через поверхность N_ω становится либо типа $O^{p-2,q+2}$, либо типа $O^{p+2,q-2}$. Одновременно с этим изменением типа состояния равновесия от него рождается или с ним сливаются периодическое движение. Как это происходит, показано на рис. 7.8 и 7.9. На рис. 7.8 состояние равновесия $O^{3,0}$ переходит в $O^{1,2}$ и одновременно рождается периодическое движение $\Gamma^{3,1}$. На рис. 7.9 представлена другая возможность, когда такое же состояние равновесия $O^{3,0}$ переходит в $O^{1,2}$ и при этом с ним сливаются периодическое движение $\Gamma^{2,2}$.

Выше были описаны основные типы бифуркаций состояний равновесия. Их можно символически записать:

$$\begin{aligned} O^{p,q} + O^{p+1,q-1} &\rightarrow \emptyset, \\ O^{p,q} + O^{p-1,q+1} &\rightarrow \emptyset; \end{aligned} \quad (7.19)$$

$$\begin{aligned} O^{p,q} &\rightarrow O^{l-2,q+2} + \Gamma^{p,q+1}, \\ O^{p,q} + \Gamma^{p-1,q+2} &\rightarrow O^{p-2,q+2}; \end{aligned} \quad (7.20)$$

$$\begin{aligned} O^{p,q} &\rightarrow O^{p+2,q-2} + \Gamma^{p+1,q}, \\ O^{p,q} + \Gamma^{p+2,q-1} &\rightarrow O^{p+2,q-2}. \end{aligned} \quad (7.21)$$

Первые две записи означают слияние с последующим исчезновением состояния равновесия $O^{p,q}$ с $O^{p+1,q-1}$ или $O^{p-1,q+1}$ соответственно. Последующие четыре записи описывают все возможные варианты изменения особой точки $O^{p,q}$, сопровождающиеся одновременным рождением или исчезновением периодического движения.

Каждая из этих бифуркаций определяется некоторыми аналитическими условиями. Для их записи примем, что бифуркация происходит при возрастании скалярного параметра μ в момент обращения его в нуль. Бифуркации (7.19) характеризуются тем, что при $\mu = 0$ характеристическое уравнение (7.14) имеет нулевой корень $\lambda = 0$; $q - 1$ корней с положительной и p корней с отрицательной действительными частями в первом случае и соответственно q и $p - 1$ корней — во втором случае.

Бифуркации (7.20) и (7.21) разделяются в зависимости от знака величины

$$\sigma = \operatorname{Re} \frac{\partial \chi}{\partial \mu} \frac{\partial \chi^*}{\partial \lambda}, \quad (7.22)$$

где звездочка означает комплексно-сопряженное число и производные вычисляются при $\mu = 0$ и $\lambda = i\omega$. При $\sigma > 0$ имеют место бифуркации с возрастанием числа p у состояния равновесия и при $\sigma < 0$ с его убыванием.

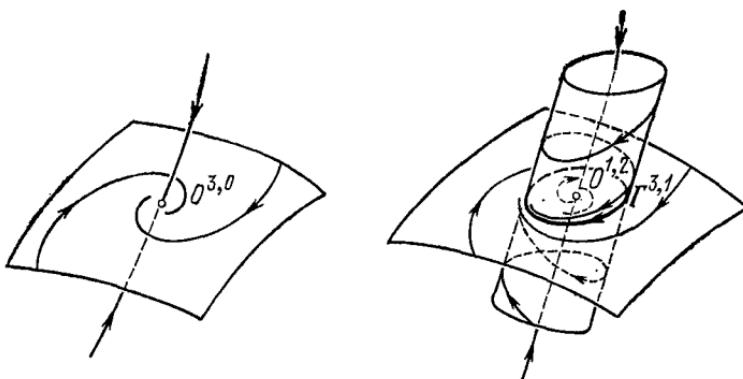


Рис. 7.8

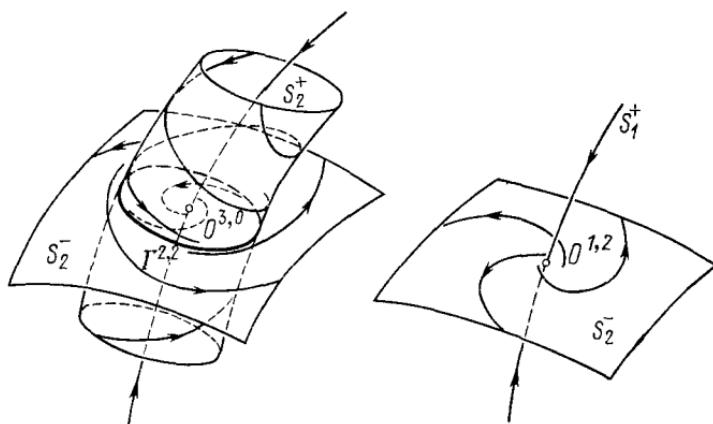


Рис. 7.9

Напомним, что при этой бифуркации при $\mu = 0$ характеристическое уравнение имеет два чисто мнимых корня $\pm i\omega$. В случае (7.20) при $\mu = 0$, помимо двух чисто мнимых корней $\pm i\omega$, имеется еще $p - 2$ корня с отрицательной действительной частью и q с положительной. В случае (7.21) числа корней с отрицательной и положительной действительными частями соответственно равны p и $q - 2$. Различие случаев рождения и исчезновения

периодического движения возможно по так называемой ляпуновской величине g . Вычисление ее достаточно сложно. В случае, когда система дифференциальных уравнений записана в виде

$$\frac{dx_i}{dt} = \lambda_i(\mu) x_i + \sum_{j,k=1}^n a_{ijk} x_j x_k + \sum_{j,k,s=1}^n a_{ijk_s} x_j x_k x_s + \dots, \quad (7.23)$$

где $\lambda_1(0) = i\omega$, $\lambda_2(0) = -i\omega$, она равна [57]

$$\begin{aligned} g = & a_{1112} + a_{2221} + a_{2122} + a_{2212} + a_{1211} - \\ & - \frac{i}{\omega} [(a_{212} + a_{221}) a_{222} - (a_{112} + a_{121}) a_{111}] - \\ & - \sum_{k=3}^n \frac{a_{k12} + a_{k21}}{\lambda_k} (a_{22k} + a_{2k2} + a_{11k} + a_{1k1}) + \\ & + \frac{a_{k22} (a_{21k} + a_{2k1}) (\lambda_k - 2i\omega) + a_{k11} (a_{12k} + a_{1k2}) (\lambda_k + 2i\omega)}{\lambda_k^3 + 4\omega^2}. \end{aligned} \quad (7.24)$$

Пусть $\sigma > 0$, тогда при $g > 0$ происходит исчезновение периодического движения и при $g < 0$ — его рождение. При $\sigma < 0$ все происходит наоборот: при $g > 0$ — рождение и при $g < 0$ — исчезновение.

Особый интерес представляют бифуркации устойчивого состояния равновесия. С устойчивым состоянием равновесия возможны следующие различные бифуркации:

$$O^{n,0} + O^{n-1,1} \rightarrow \emptyset; \quad (7.25)$$

$$O^{n,0} \rightarrow O^{n-2,2} + \Gamma^{n,1}, \quad O^{n,0} + \Gamma^{n-1,2} \rightarrow O^{n-2,2}. \quad (7.26)$$

При первой бифуркации устойчивое состояние равновесия $O^{n,0}$ сливаются с седловым $O^{n-1,1}$ и они оба исчезают, превращаясь в обыкновенную точку.

При двух следующих бифуркациях состояние равновесия в обоих случаях из устойчивого переходит в седловое и при этом одновременно из него рождается или в нем исчезнет устойчивое $\Gamma^{n,1}$ или соответственно седловое $\Gamma^{n-1,2}$ периодическое движение.

В первом и последнем случаях происходит исчезновение устойчивого установившегося движения, во втором случае такое исчезновение не имеет места, поскольку при этом устойчивое состояние равновесия непрерывно преоб-

разуется в устойчивое же периодическое движение. Отметим, что при этом область притяжения устойчивого состояния равновесия непрерывно переходит в область притяжения устойчивого периодического движения. Сказанное поясняется рис. 7.8.

Исследование бифуркаций периодических движений несколько сложнее, чем состояний равновесия, и получающиеся при этом результаты многообразнее. Прежде всего заметим, что изучение части из них может быть сведено к исследованию бифуркаций неподвижных точек преобразования. Это те бифуркации, при которых точечное отображение T секущей S продолжает существовать в некоторой фиксированной окрестности неподвижной точки O , несмотря на бифуркацию периодического движения (рис. 7.10).

Бифуркации неподвижных точек преобразования во многом аналогичны уже описанным бифуркациям состояний равновесия. Пусть точечное отображение T записано в виде

$$\bar{x} = f(x, \mu) \quad (7.27)$$

и пусть $x^*(\mu)$ — его неподвижная точка. Тогда область существования этой неподвижной точки имеет своей границей поверхность, на которой обращается в нуль якобиан уравнения неподвижной точки

$$\chi(z, \mu) |_{z=1} = \text{Det} \left\| \frac{\partial f_i}{\partial x_j} - \delta_{ij} \right\|. \quad (7.28)$$

Здесь f_1, f_2, \dots, f_n — компоненты $f(x, \mu)$, а x_1, x_2, \dots, x_n — компоненты вектора x . Тип неподвижной точки определяется числами p и q корней характеристического уравнения

$$\chi(z, \mu) = 0,$$

лежащих внутри и вне единичного круга $|z| \leq 1$. Отсюда следует, что изменение типа неподвижной точки $x^*(\mu)$ в результате непрерывного изменения параметров μ может произойти только при появлении корня z на границе

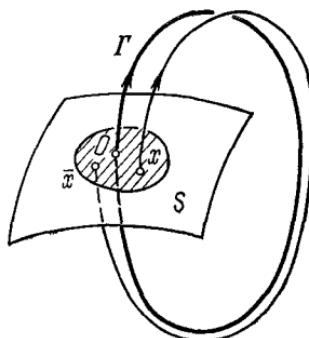


Рис. 7.10

единичного круга, т. е. при выполнении одного из условий

$$\begin{aligned}\chi(e^{iq}, \mu) &= 0 \quad (0 < \varphi < \pi), \\ \chi(1, \mu) &= 0, \quad \chi(-1, \mu) = 0.\end{aligned}\tag{7.29}$$

Второе из этих условий совпадает с ранее написанным условием обращения в нуль якобиана. Два других условия новые. Первое из них соответствует появлению пары комплексно-сопряженных корней вида $e^{\pm iq}$, а второе — одного действительного корня $z = -1$. Поэтому граница области существования неподвижной точки $O^{p,q}$ данного типа состоит из границы N_{+1} существования неподвижной точки и границ N_φ и N_{-1} , на которых меняется тип неподвижной точки за счет перехода через границу единичного круга двух комплексно-сопряженных корней или одного действительного отрицательного корня.

Бифуркации неподвижной точки $O^{p,q}$ при непрерывном изменении параметра, ведущего к проходу через поверхность N_{+1} , совершенно такие же, как и для состояний равновесия. Именно при пересечении поверхности N_{+1} происходит слияние неподвижной точки $O^{p,q}$ с неподвижной точкой одного из типов $O^{p-1,q+1}$ или $O^{p+1,q-1}$ с последующим их исчезновением. Однако вместе с этим исчезновением обеих неподвижных точек возможно появление простого или стохастического синхронизма (см. § 5). Обсуждение такой возможности выходит за рамки этого параграфа и будет проведено в дальнейшем в § 5. При пересечении границы N_{-1} возникает бифуркация, при которой происходит смена типа неподвижной точки и одновременно из нее рождается или в ней исчезает цикл двухкратных неподвижных точек. Условно эту бифуркацию можно изобразить в виде

$$\begin{aligned}O^{p,q} &\rightarrow O^{p+1,q-1} + (O_1^{p,q}, O_2^{p,q}), \\ O^{p,q} &\rightarrow O^{p-1,q+1} + (O_1^{p,q}, O_2^{p,q})\end{aligned}\tag{7.30}$$

в случае рождения цикла двухкратных неподвижных точек $(O_1^{p,q}, O_2^{p,q})$ и в виде

$$\begin{aligned}O^{p,q} + (O_1^{p+1,q-1}, O_2^{p+1,q-1}) &\rightarrow O^{p+1,q-1}, \\ O^{p,q} + (O_1^{p-1,q+1}, O_2^{p-1,q+1}) &\rightarrow O^{p-1,q+1}\end{aligned}\tag{7.31}$$

при слиянии с циклом двухкратных неподвижных точек. Под циклом двухкратных неподвижных точек $(O_1^{p,q}, O_2^{p,q})$ имеется в виду следующее. При преобразовании T точка

$O_1^{p, q}$ переходит в точку $O_2^{p, q}$, а точка $O_2^{p, q}$ — в точку $O_1^{p, q}$. Поэтому каждая из этих точек является неподвижной точкой отображения T^2 , причем неподвижной точкой типа (p, q) , т. е. имеющей p -мерное многообразие S_p^+ стремящихся к ней точек при неограниченном повторении преобразования T^2 и q -мерное многообразие S_q^- точек, стремящихся к ней при повторениях обратного отображения T^{-2} . При преобразованиях T точки цикла и их инвариантные многообразия переходят друг в друга.

Особый интерес эта бифуркация представляет в случае, когда она происходит с устойчивой неподвижной точкой $O^{n, 0}$. В этом случае она имеет один из видов

$$\begin{aligned} O^{n, 0} &\rightarrow O^{n-1, 1} + (O_1^{n, 0}, O_2^{n, 0}), \\ O^{n, 0} + (O_1^{n-1, 1}, O_2^{n-1, 1}) &\rightarrow O^{n-1, 1}. \end{aligned} \quad (7.32)$$

При первой бифуркации устойчивая неподвижная точка вместе со своей областью притяжения непрерывно переходит в устойчивый цикл двукратных неподвижных точек и его область притяжения. Во втором — устойчивая неподвижная точка сливается с седловым циклом двукратных неподвижных точек и становится седловой.

Если отображение T — это отображение, порождаемое фазовыми траекториями, близкими к периодическому движению Γ на секущей поверхности S , то первой из описанных бифуркаций устойчивой неподвижной точки соответствует мягкий режим удвоения периода колебаний. Поясняющие этот процесс фазовые картинки в трехмерном случае представлены на рис. 7.11. Как меняются при этом осциллограммы колебаний, изображено на рис. 7.12. При этом $\tilde{\Gamma}^{3,1}$ изображает родившееся движение удвоенного периода по отношению к периоду прежнего периодического движения $\Gamma^{3,1}$. Периодическое движение $\Gamma^{3,1}$ переходит в $\Gamma^{2,2}$. На секущей поверхности S неподвижная точка $O^{2,0}$ переходит в $O^{1,1}$ и при этом одновременно рождается цикл двукратных неподвижных точек $(O_1^{2,0}, O_2^{2,0})$. На секущей поверхности S стрелками изображается отображение T^2 . Для отображения T^2 точки $O_1^{2,0}$ и $O_2^{2,0}$ — неподвижные точки.

Изменение параметров с переходом через поверхность N_ϕ приводит к изменению типа неподвижной точки и ($\phi \neq \neq 2\pi/3, \pi/4$) сопровождается слиянием с ней или рождением из нее инвариантной одномерной замкнутой кривой.

Эти бифуркации очень похожи на бифуркации состояния равновесия на границе N_ω , которые сопровождаются появлением или исчезновением периодического движения, однако имеют некоторые особенности. Эти особенности проявляются в исключительности значений φ , равных $2\pi/3$.

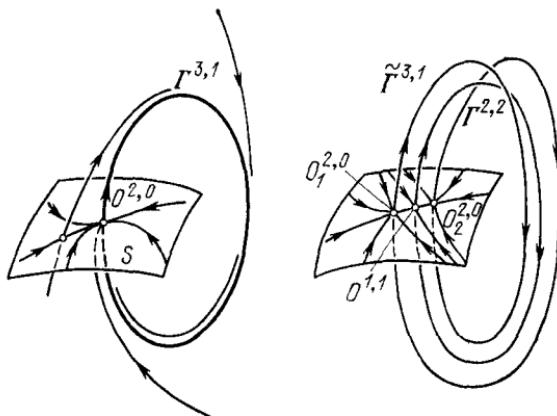


Рис. 7.11

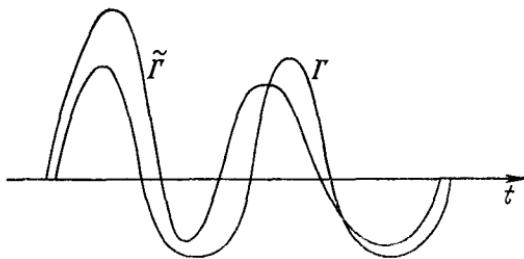


Рис. 7.12

и $\pi/2$, а также в том, что отображение T на этой инвариантной замкнутой кривой может отличаться от отображения, возникающего на периодическом движении. Суть этого различия можно понять из приводимого в дальнейшем описания точечного отображения окружности в окружность.

Особый интерес представляет бифуркация устойчивой неподвижной точки. Ее схема имеет один из видов

$$\begin{aligned} O^{n,0} &\rightarrow O^{n-2,2} + \Gamma^{n,1}, \\ O^{n,0} + \Gamma^{n-1,2} &\rightarrow O^{n-2,2}. \end{aligned} \tag{7.33}$$

В первом случае устойчивая неподвижная точка $O^{n,0}$ и ее область притяжения переходят в устойчивую замкнутую кривую $\Gamma^{n,1}$ и ее область притяжения. Сама исходная неподвижная точка при этом становится седловой. Во втором случае седловая инвариантная кривая $\Gamma^{n-1,2}$, сливаясь с устойчивой неподвижной точкой $O^{n,0}$, передает ей свою седловую неустойчивость и исчезает.

Особые случаи $\varphi = 2\pi/3$ и $\varphi = \pi/2$ позволим оставить без внимания. Их описание имеется в работах [7, 12].

Применим теперь полученные сведения к первоначальной задаче исследования бифуркаций периодических движений. Для этого достаточно иметь в виду, что неподвижной точке $O^{p,q}$ соответствует периодическое движение

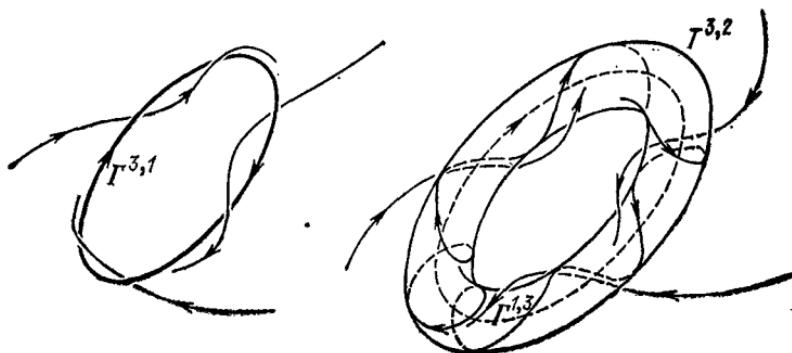


Рис. 7.13

$\Gamma^{p+1,q+1}$, а замкнутой инвариантной одномерной кривой $\Gamma^{p+1,q}$ — инвариантная двумерная тороидальная поверхность $T^{p+2,q+1}$. Поэтому, в частности, первая из бифуркаций (7.33) интерпретируется как мягкий переход устойчивого периодического движения в сложные устойчивые многопериодические колебания, соответствующие движениям фазовой точки по двумерному тору $T^{n,2}$ (рис. 7.13).

На этом закончим описание бифуркаций периодических движений, которые могут быть изучены с помощью прямого сведения к изучению точечного отображения секущей. В добавление к сказанному отметим, что для всех описанных выше бифуркаций имеются аналитические условия их осуществления. С ними можно ознакомиться по работам [1, 5, 37, 12].

Теперь рассмотрим оставшиеся возможности для изменения периодического движения Γ , т. е. те, при которых

нарушается существование гладкого взаимно однозначного отображения секущей. Для таких изменений есть следующие возможности; замкнутая кривая Γ стягивается в точку, на ней появляется состояние равновесия, она уходит в бесконечность *). Замкнутая кривая может стянуться только к особой точке — состоянию равновесия — и поэтому этот случай уже был изучен при рассмотрении бифуркаций состояний равновесия. Он соответствует переходу через бифуркационную поверхность N_ω . Второй случай новый, хотя он тоже связан с бифуркацией состояния равновесия, но не был замечен, поскольку раньше рассмотрение относилось только к окрестности состояния равновесия и не выходило за ее пределы. Третий случай оставим без внимания ввиду очевидности связанных с ним изменений. Переходим к рассмотрению второго случая. В этом случае при бифуркационном значении параметра имеется состояние равновесия O и фазовая кривая Γ , выходящая и вновь входящая в него. Пусть это состояние равновесия простое, типа $O^{p,q}$. Так как фазовая кривая Γ выходит из $O^{p,q}$, то она лежит на инвариантном многообразии S_q^- , а так как она в него еще и входит, то она принадлежит еще и многообразию S_p^+ . Отсюда следует, что многообразия S_p^+ и S_q^- пересекаются по кривой Γ . Соответствующая картинка представлена на рис. 7.14. Как нетрудно понять, пересечение поверхностей S_p^+ и S_q^- не является общим случаем и при общих сколь угодно малых изменениях параметров динамической системы должно исчезнуть. Это означает, что в пространстве параметров этому случаю вообще не отвечают области, а, как можно обнаружить, в общем случае только некоторые поверхности на единицу меньшей размерности. Таким образом, исследование этой бифуркации периодического движения свелось к следующему вопросу: когда фазовая кривая, идущая из простого седлового движения в него же, может превратиться в периодическое движение?

Исследование этого вопроса также может быть сведе-

*) В том, что этими случаями исчерпываются все возможности, можно убедить путем следующего рассуждения. Пусть не имеет места ни один из них, тогда при бифуркационном значении параметра кривая Γ — не точка, расположена в ограниченной области, в ее достаточно малой окрестности нет особых точек и поэтому для нее существует секущая S и точечное отображение T не только при бифуркационном значении параметра, но и в его малой окрестности. Чего не должно быть.

но к изучению некоторых точечных отображений. Для этого можно поступить следующим образом. На участках фазовой кривой Γ , выходящих и входящих в состояние равновесия $O^{p,q}$, вблизи состояния равновесия выберем

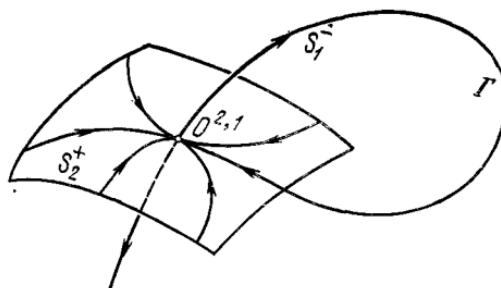


Рис. 7.14.

точки M и N . Через эти точки проведем, например, ортогонально к Γ секущие S и Q (рис. 7.15). Фазовые траектории, близкие к части кривой Γ , заключенной между точками M и N , порождают точечное отображение секущей S в Q , которое назовем L . Кроме того, фазовые траектории окрестности состояния равновесия порождают некоторое отображение секущей Q в S . Это последнее отображение обозначим через T . Ясно, что вопрос о переходе двоякоасимптотической кривой Γ при изменении параметров в периодическое движение сводится к обнаружению появления неподвижных точек у произведения отображений TL или LT . Такое исследование содержится в работах [61, 62, 39] и позволило обнаружить общие случаи и указать аналитические условия, при которых у этих отображений появляется единственная неподвижная точка, соответствующая возникающему из двоякоасимптотической кривой периодическому движению.

Отметим еще, что эти исследования точечного отображения TL обнаружили не только случаи превращения фазовой траектории, двоякоасимптотической к состоянию равновесия, в периодическое движение, но и более слож-

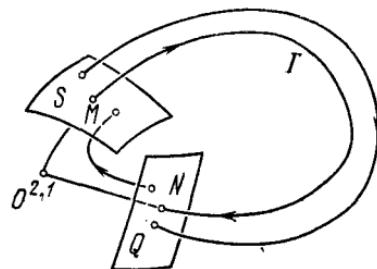


Рис. 7.15

ные бифуркации, изучение которых примыкает к рассмотрению гомоклинических структур, о чём будет довольно подробно в дальнейшем рассказано.

Выше предполагалось, что состояние равновесия, появляющееся на периодическом движении, простое. Рассмотрим теперь случай, когда это состояние равновесия сложное. Придерживаясь нашего принципа общности, оно должно быть таким, чтобы этой возможности в пространстве параметров отвечала бифуркационная поверхность размерности на единицу меньше, чем размерность пространства параметров, т. е. бифуркационная поверхность, отвечающая бифуркации общего типа. Из этого следует, что сложная особая точка должна быть простейшей и ей должна отвечать в пространстве параметров некоторая поверхность. В сколь угодно малой близости от нее эта сложная точка должна превратиться в простую или исчезнуть. Общие случаи превращения простых точек в сложные нам известны. Эти превращения происходят на поверхностях N_ω и N_0 . Поверхность N_ω не подходит, так как наличие у соответствующего ее точкам сложного состояния равновесия двоякоасимптотической траектории может быть лишь при выполнении некоторых дополнительных условий, поскольку для этого требуется пересечение интегральных многообразий S_p^+ и S_q^- , таких же, как и в ранее рассмотренном случае. На поверхности N_0 происходит слияние состояний равновесия $O^{p,q}$ и $O^{p+1,q-1}$. Этот случай нас устроит, если наличие двоякоасимптотической фазовой кривой возможно в общем случае. Рассмотрим этот вопрос. Через точку $O^{p,q}$ проходят интегральные многообразия S_p^+ и S_q^- и через точку $O^{p+1,q-1}$ — интегральные многообразия S_{p+1}^+ и S_{q-1}^- . Пересечение многообразий S_q^- и S_{p+1}^+ является общим. В силу того, что на поверхности N_0 состояния равновесия $O^{p,q}$ и $O^{p+1,q-1}$ сливаются, до момента этого слияния поверхности S_q^- и S_{p+1}^+ в окрестности этих точек в общем случае пересекаются по некоторой двоякоасимптотической фазовой траектории, идущей из точки $O^{p,q}$ в точку $O^{p+1,q-1}$. Однако, кроме этого в общем случае обязательного пересечения, поверхности S_q^- и S_{p+1}^+ в общем случае могут пересекаться и по некоторым другим двоякоасимптотическим кривым $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_m$. В двумерном случае такая кривая может быть только одна (рис. 7.16), однако уже для трехмерных систем это не так (рис. 7.17). При дальнейшем

изменении параметров, соответственно рассматриваемой бифуркации, состояния равновесия $O^{p,q}$ и $O^{p+1,q-1}$ после слияния исчезнут и оставят после себя ряд замкнутых траекторий $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_m$, т. е. двоякоасимптотические фазовые траектории перейдут после исчезновения сложной особой точки в некоторые периодические движения.

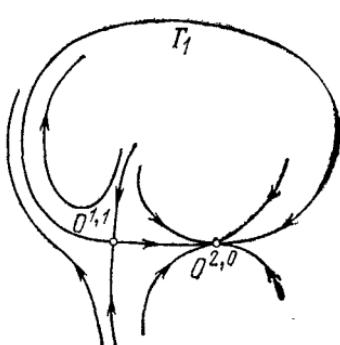


Рис. 7.16

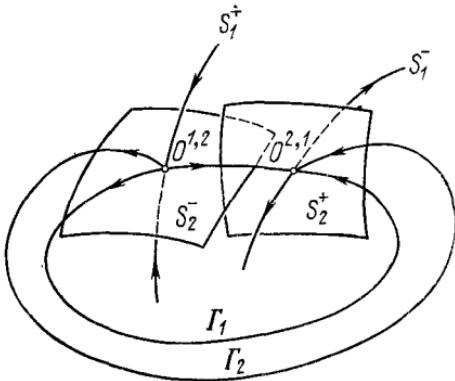


Рис. 7.17

Обоснование и исследование обстоятельств такого перехода может быть получено путем рассмотрения некоторых точечных отображений. Соответствующие этим точечным отображениям секущие показаны на рис. 7.18 для двумерного и трехмерного случаев.

Описанная бифуркация может быть изображена в виде символической схемы

$$O^{p,q} + O^{p+1,q-1} \rightarrow \bigcup_{i=1}^m \Gamma_i^{p+1,q}. \quad (7.34)$$

Как и всегда, особый интерес представляет случай бифуркаций с участием устойчивых состояний равновесия и периодических движений. В этом случае $p = n - 1$. Далее, как нетрудно обнаружить, «пересечение» интегральных многообразий S_1^- и S_1^+ происходит в общем случае по одной кривой и еще, возможно, одной, но не более. Это простое обстоятельство пояснено на рис. 7.19.

Таким образом, с участием устойчивых состояний равновесия или периодических движений возможна только одна (если не различать бифуркаций, отличающихся направлением изменения параметров) бифуркация

рассматриваемого типа, а именно

$$O^{n,0} + O^{n-1,1} + S_n^+ \cap S_1^- \rightarrow \Gamma^{n,1}. \quad (7.35)$$

В этой схеме $S_n^+ \cap S_1^-$ представляет собою двоякоасимптотические фазовые кривые, идущие из точки $O^{n-1,1}$ в

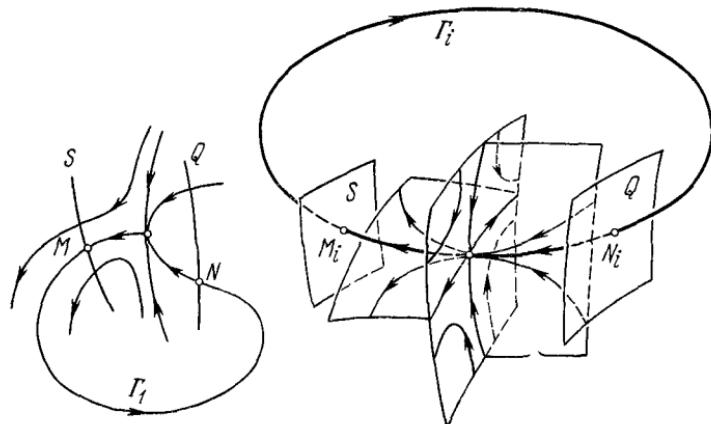


Рис. 7.18

точку $O^{n,0}$. Отметим, что при возникновении устойчивого периодического движения $\Gamma^{n,1}$ согласно схеме (7.35), слева направо в область его притяжения переходит многообразие фазовых траекторий S_n^+ состояния равновесия $O^{n,0}$.

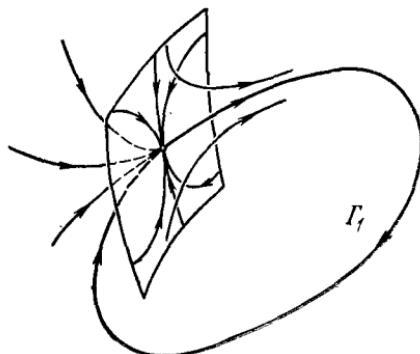


Рис. 7.19

Выше была изложена созданная к настоящему времени локальная теория состояний равновесия и периодических движений, а также попутно и отчасти неподвижных точек преобразования. При этом полностью рассмотрены все основные типы равновесий и периодических движений и их основные бифуркации. Это рассмотрение носит в некотором смысле законченный и завершенный характер. Точнее, можно думать, что рассмотрение более сложных слу-

чаев не даст ничего принципиально нового для общего понимания и общего качественного изучения динамических систем. Это естественно в предположении, что речь идет об изучении классов динамических систем, в которых только этим бифуркациям соответствуют в пространстве параметров разделяющие его бифуркационные поверхности. Вместе с тем эта надежда уже ни в коей мере не оправдывается для специальных классов динамических систем и в первую очередь для консервативных гамильтоновых систем, где понятие общности совсем другое. Консервативные системы требуют своего, во многом специфического исследования. Эта специфичность проявляется не всегда, многие вопросы и, в частности те, которым в значительной мере будет посвящен дальнейший текст, в полной мере относятся и к консервативному случаю.

Заметим, что основное содержание методов малого параметра [34] и асимптотических методов [20] может трактоваться как исследование специфических бифуркаций и возмущений. Так, теория периодических движений Пуанкаре решает вопрос о рождении периодических движений от семейств периодических движений, теория систем с быстровращающимися фазами — вопрос о рождении интегральных тороидальных многообразий от многопараметрических семейств тороидальных многообразий, теория дифференциальных уравнений с малыми параметрами при старших производных исследует сингулярные возмущения решений дифференциальных уравнений и т. д.

Заметим еще, что выше были рассмотрены основные бифуркации состояний равновесия и периодических движений достаточно гладких систем дифференциальных уравнений. На практике довольно часто приходится сталкиваться с дифференциальными уравнениями лишь кусочно-гладкими. Появление поверхностей разрыва правых частей дифференциальных уравнений влечет возможность появления так называемых скользящих движений и других особенностей, требующих дополнительного изучения [41].

§ 2. Динамические системы с простейшими установившимися движениями

Выше были описаны локальная структура и локальные бифуркации состояний равновесия и периодических движений. Наибольший непосредственный интерес среди них представляют устойчивые состояния равновесия и устой-