

чаев не даст ничего принципиально нового для общего понимания и общего качественного изучения динамических систем. Это естественно в предположении, что речь идет об изучении классов динамических систем, в которых только этим бифуркациям соответствуют в пространстве параметров разделяющие его бифуркационные поверхности. Вместе с тем эта надежда уже ни в коей мере не оправдывается для специальных классов динамических систем и в первую очередь для консервативных гамильтоновых систем, где понятие общности совсем другое. Консервативные системы требуют своего, во многом специфического исследования. Эта специфичность проявляется не всегда, многие вопросы и, в частности те, которым в значительной мере будет посвящен дальнейший текст, в полной мере относятся и к консервативному случаю.

Заметим, что основное содержание методов малого параметра [34] и асимптотических методов [20] может трактоваться как исследование специфических бифуркаций и возмущений. Так, теория периодических движений Пуанкаре решает вопрос о рождении периодических движений от семейств периодических движений, теория систем с быстровращающимися фазами — вопрос о рождении интегральных тороидальных многообразий от многопараметрических семейств тороидальных многообразий, теория дифференциальных уравнений с малыми параметрами при старших производных исследует сингулярные возмущения решений дифференциальных уравнений и т. д.

Заметим еще, что выше были рассмотрены основные бифуркации состояний равновесия и периодических движений достаточно гладких систем дифференциальных уравнений. На практике довольно часто приходится сталкиваться с дифференциальными уравнениями лишь кусочно-гладкими. Появление поверхностей разрыва правых частей дифференциальных уравнений влечет возможность появления так называемых скользящих движений и других особенностей, требующих дополнительного изучения [41].

§ 2. Динамические системы с простейшими установившимися движениями

Выше были описаны локальная структура и локальные бифуркации состояний равновесия и периодических движений. Наибольший непосредственный интерес среди них представляют устойчивые состояния равновесия и устой-

чивые периодические движения. Только они могут быть установившимися движениями динамической системы, ее состояниями равновесия и периодическими движениями. Каждое устойчивое состояние равновесия и устойчивое периодическое движение имеет свою область притяжения. Возможен случай, когда эти области притяжения почти целиком заполняют все фазовое пространство. Под словами «почти целиком» имеется в виду, что вне этих областей могут быть лишь точки, не образующие областей, с общей нулевой мерой, например отдельные точки, линии или поверхности размерности, меньшей, чем размерность пространства. Для двумерных систем именно такова структура фазового пространства в общем случае. Для многомерных систем это не так. Однако было бы естественным выделить из них подкласс динамических систем с такой структурой — класс динамических систем, установившимися движениями которого могут быть только устойчивые состояния равновесия и устойчивые периодические движения и почти все остальные движения являются асимптотическими по отношению к одному из них. Оговорка «почти» не имеет прямого смысла, поскольку в такой динамической системе нет реализуемых движений, отличных от устойчивых состояний равновесия и периодических движений и асимптотически приближающихся к ним. Она имеет чисто математический смысл, который, однако, имеет совсем другое, очень важное отношение к реальному поведению динамической системы. Эти исключительные и нереализуемые движения отделяют друг от друга движения, приближающиеся к различным установленвшимся движениям. В этом и состоит их значение для исследования динамических систем описанного класса.

Поясним сказанное простыми примерами. В простейшем случае имеется одно установленвшееся движение, устойчивое состояние равновесия или периодическое движение, а все остальные движения к нему приближаются. Тогда говорят о глобальной устойчивости этого установленвшегося движения.

В последнее время в рамках так называемой абсолютной устойчивости получены практически важные достаточные критерии глобальной устойчивости состояния равновесия. В динамической системе с глобально устойчивым состоянием равновесия все фазовые точки без исключения к нему приближаются. В случае глобально ус-

стойчивого периодического движения это не совсем так. Поясняющие примеры приведены на рис. 7.20. На первом из них исключение составляет фазовая кривая, уходящая в бесконечность, на втором — седловая особая точка и две асимптотические к ней фазовые кривые. Подчеркнем, что эта особенность определяется топологией фазового пространства. Так, уже в цилиндрическом трехмерном фазовом

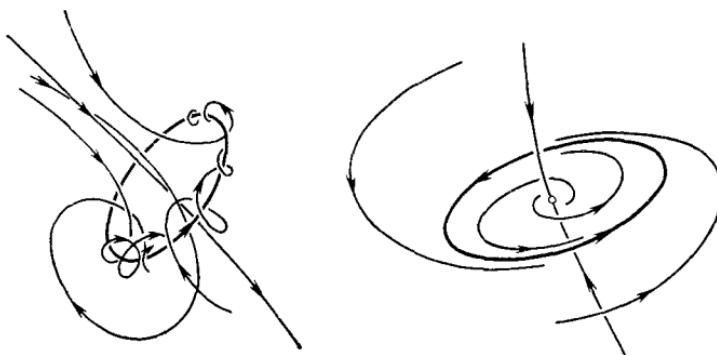


Рис. 7.20

пространстве возможно глобально устойчивое периодическое движение, к которому асимптотически приближаются все без исключения фазовые траектории.

В более сложном случае разных установившихся движений несколько. Соответствующие примеры представлены на рис. 7.21 и 7.22. На рис. 7.21 имеется два установившихся движения: $O^{2,0}$ и $\Gamma^{2,1}$. Их области притяжения отделены друг от друга неустойчивым периодическим движением $\Gamma^{1,2}$. На рис. 7.22 установившимися движениями являются устойчивые состояния равновесия $O_1^{3,0}$ и $O_2^{3,0}$, отделенные друг от друга сепаратрисной поверхностью S_2^+ седлового состояния равновесия $O^{2,1}$.

Однако возможны и значительно более сложные случаи, когда разделяющая области притяжения граница имеет очень сложный характер. Схема одного из таких случаев представлена на рис. 7.23. На нем $\Gamma_1^{3,1}$ и $\Gamma_2^{3,1}$ — устойчивые периодические движения. Почти все фазовые траектории идут к одному из них и образуют две области притяжения. Разделяющими эти области притяжения являются сепаратрисные поверхности S_2^+ и S_2^- седлового периодического движения $\Gamma^{2,2}$. Поведение этих сепаратрисных по-

верхностей необычайно сложно и не нашло отражения на схематическом рис. 7.23. Чтобы составить о нем некоторое представление, пересечем седловое периодическое движение

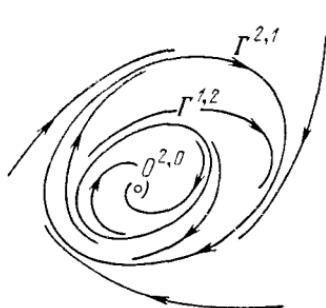


Рис. 7.21

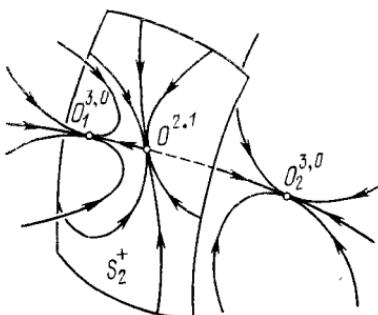


Рис. 7.22

движение $\Gamma^{2,2}$ секущей поверхностью S и рассмотрим точечное отображение T , порождаемое на этой секущей S фазовыми траекториями. Точки пересечения $\Gamma^{2,2}$ с секущей

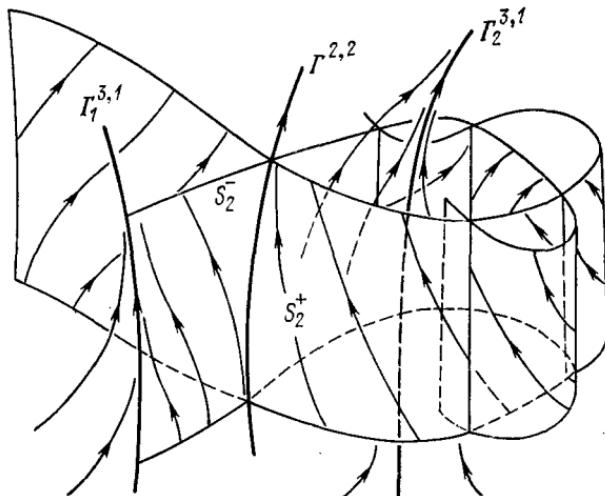


Рис. 7.23

поверхностью S отвечает неподвижная точка $O^{1,1}$ отображения T . Сепаратрисные интегральные поверхности S_2^+ и S_2^- пересекаются с секущей S по сепаратрисным инва-

риантным кривым S_1^+ и S_1^- седловой неподвижной точки $O^{1,1}$ отображения T . В интересующем нас случае инвариантные поверхности S_2^+ и S_2^- седлового периодического движения пересекаются. Этому соответствует пересечение кривых S_1^+ и S_1^- . Наличие этого пересечения влечет очень сложное переплетение сепаратрисных инвариантных кривых S_1^+ и S_1^- , изображенное на рис. 7.24. Возможность подобной картинки и связанное с ней сложное поведение фазовых траекторий обнаружил А. Пуанкаре [47].

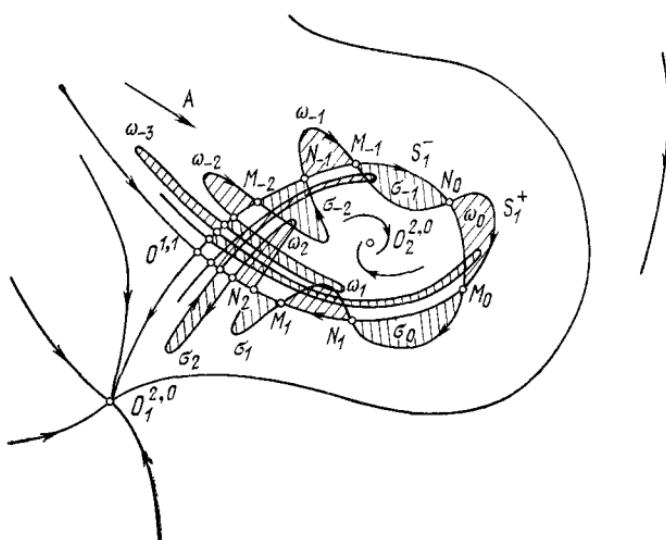


Рис. 7.24

Точки пересечения сепаратрисных кривых S_1^+ и S_1^- были названы им гомоклиническими. На рис. 7.24 точка M_0 пересечения кривых S_1 и S_1^+ — это гомоклиническая точка. Из наличия одной такой точки M_0 следует существование бесконечного числа точек пересечения

$$M_i = T^i M_0 \quad (i = \dots, -1, 0, 1, \dots),$$

а также наличие еще хотя бы одной серии точек пересечения $N_i = T^i N_0$ ($i = \dots, -1, 0, 1, \dots$).

Кривые S_1^+ и S_1^- сложным образом разбивают плоскость на части, образуя некоторую мозаику из областей

$\dots, \sigma_{-2}, \sigma_{-1}, \sigma_0, \sigma_1, \dots$ и $\dots, \omega_{-1}, \omega_0, \omega_1, \omega_2, \dots$,

а также их пересечений. На рис. 7.24 эти области заштрихованы в разных направлениях. Из рис. 7.24 видно, что при преобразовании T эти области переходят друг в друга так, что

$$T\sigma_j = \sigma_{j+1}, \quad T\omega_s = \omega_{s+1}.$$

В силу этого, поток фазовых точек (обозначенный на рис. 7.24 стрелкой A) разделяется на идущий вокруг петли $O^{1,1}M_0O^{1,1}$ и идущий внутрь нее. Часть потока, попавшая внутрь петли, в свою очередь разделяется на поток, идущий к неподвижной точке $O^{2,0}_1$, соответствующей устойчивому периодическому движению $\Gamma_1^{3,1}$, и выходящий из петли. Потоки, выходящие из петли и обходящие ее, идут к неподвижной точке $O^{2,0}_1$, соответствующей периодическому движению $\Gamma_1^{3,1}$.

Способ разделения потоков, особенно внутри петли, как видно, необычайно сложный и тонкий, в соответствии со сложностью разделяющей границы. Вместе с тем, несмотря на эту сложность, общая структура фазового пространства проста и сводится к разбиению его на две области притяжения: область притяжения периодического движения

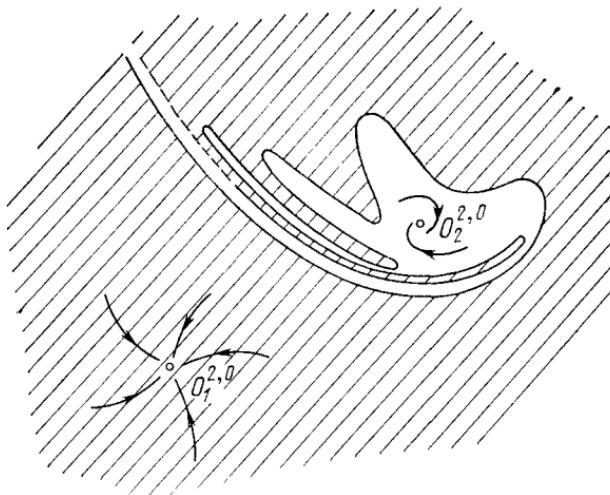
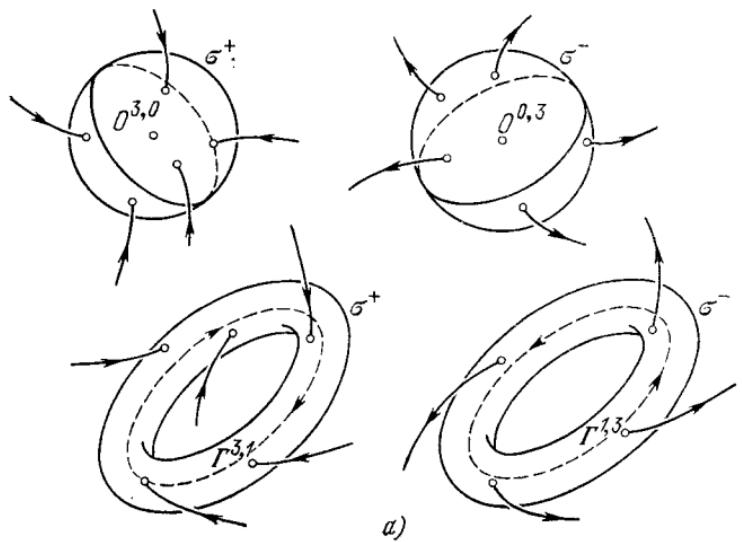


Рис. 7.25

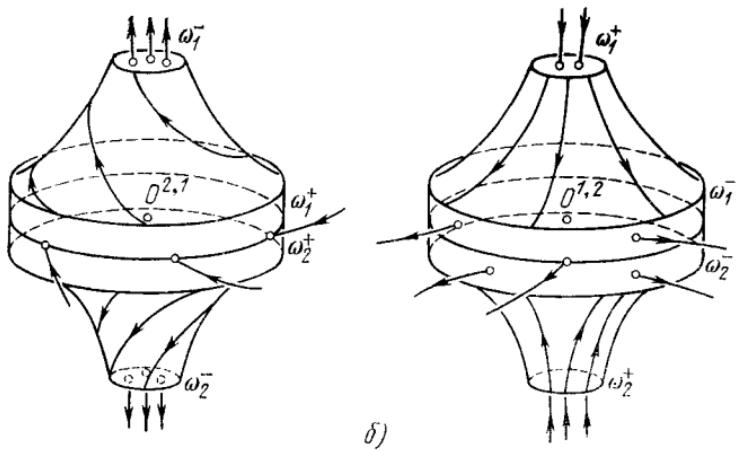
$\Gamma_1^{3,1}$ и область притяжения периодического движения $\Gamma_2^{3,1}$. Эти области притяжения довольно сложного вида. До некоторой степени подробности они показаны на рис. 7.25. При этом для различия одна из них заштрихована.

Согласно приведенным примерам, динамические системы с простейшими установившимися движениями могут иметь простую структуру разбиения фазового пространства на области притяжения, а могут иметь области притяжения очень сложного вида. В приведенном примере сложность области притяжения обусловлена наличием пересечений интегральных многообразий периодического движения и появлением гомоклинического движения. Оказывается, что это обстоятельство имеет общий характер. Как будет видно из дальнейшего, наличие гомоклинической кривой влечет за собой очень сложную структуру фазового пространства и, в частности, наличие бесконечно-го множества седловых периодических движений. Поэтому можно думать, что у динамических систем с конечным числом состояний равновесия и периодических движений эти сложности не будут иметь места. Оказывается, что это так и есть. Тем самым среди систем с простейшими установившимися движениями выделяется подкласс систем с очень простой структурой фазового пространства: динамические системы с конечным числом состояний равновесия и периодических движений и всеми остальными движениями, асимптотически приближающиеся к ним, как при возрастании, так и убывании времени. Этот класс систем был выделен Смейлом [50—52] и получил название систем Морса — Смейла [27]. Важность и распространенность таких систем позволяют рассмотреть их несколько подробнее. Кроме сформулированных условий предполагается, что все состояния равновесия и периодические движения — общего типа и что их интегральные многообразия пересекаются только общим образом. Фазовое пространство будем предполагать компактным.

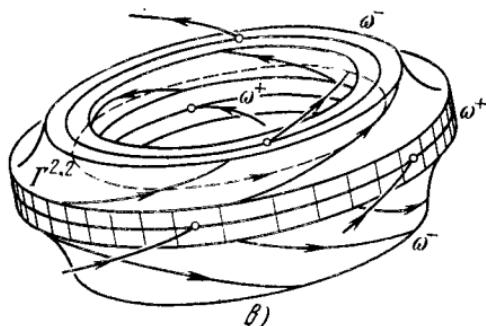
Пусть $O_1^{n,0}, \dots, O_l^{n,0}$ — устойчивые состояния равновесия и периодические движения, $O_1^{0,n}, \dots, O_m^{1,n}$ — неустойчивые и $O_1^{p,q_1}, \dots, O_k^{p_k q_k}$ — седловые. Окружим каждое из них малыми окрестностями с кусочно-гладкими граничными поверхностями, составленными либо из поверхностей без контакта, либо из кусков интегральных поверхностей. Возможные виды таких поверхностей в трехмерном случае изображены на рис. 7.26, *a*, *b*, *в*. Обозначим границы этих окрестностей для устойчивых и неустойчивых состояний равновесия и периодических движений соответственно через $\sigma_1^+, \dots, \sigma_l^+$ и $\sigma_1^-, \dots, \sigma_m^-$. У седлового состояния равновесия типа $O_i^{1,n-1}$ или $O_i^{n-1,1}$



a)



b)



c)

Fig. 7.26

имеются четыре граничные гладкие поверхности без контакта: ω_{i1}^+ , ω_{i2}^+ , ω_{i1}^- и ω_{i2}^- . В трехмерном случае для состояния равновесия типов $O^{1,2}$ и $O^{2,1}$ они изображены на том же рис. 7.26. Заметим, что для состояния равновесия $O_i^{1,n-1}$ поверхности ω_{i1}^+ и ω_{i2}^+ состоят из двух частей гладкой поверхности без контакта, разделенной на две части сепаратрисной интегральной поверхностью S_{n-1}^- состояния равновесия $O_i^{1,n-1}$. Аналогично в случае равновесия $O_i^{n-1,1}$ гладкую поверхность без контакта составляют поверхности ω_{i1}^+ и ω_{i2}^+ . Их разделяет сепаратрисная поверхность S_{n-1}^+ состояния равновесия $O_i^{n-1,1}$. В случае седлового состояния равновесия типа $O_i^{p_i, q_i}$ ($p_i, q_i \neq 1$) таких гладких поверхностей без контакта только две: ω_i^+ и ω_i^- .

Аналогичные обозначения ω_{i1}^+ , ω_{i2}^+ , ω_{i1}^- и ω_{i2}^- для гладких кусков поверхностей без контакта введем для седловых периодических движений типов $\Gamma_i^{2,n-1}$ и $\Gamma_i^{n-1,2}$. Как и для состояния равновесия, ω_{i1}^- и ω_{i2}^+ и соответственно ω_{i1}^+ и ω_{i2}^- составляют гладкие поверхности без контакта, разделяемые сепаратрисными поверхностями S_{n-1}^- и S_{n-1}^+ периодических движений $\Gamma_i^{2,n-1}$ и соответственно $\Gamma_i^{n-1,2}$. Трехмерный и двумерный случаи представляют при этом некоторое исключение, и для седлового периодического движения таких гладких кусков поверхности ω восемь (рис. 7.26), что, впрочем, для дальнейшего несущественно. Для седлового периодического движения $\Gamma_i^{p_i, q_i}$ ($p_i \neq 2$, $n = 1$) таких гладких поверхностей без контакта будет только две: ω_i^+ и ω_i^- .

У рассматриваемой нами системы всякая фазовая точка может находиться вне выделенных нами окрестностей не дольше некоторого конечного времени τ . Поэтому фазовые траектории, лежащие вне выделенных малых окрестностей, порождают на их граничных поверхностях некоторые точечные отображения. При этом каждая поверхность σ_i^- , ω_i^- , ω_{i1}^- или ω_{i2}^- отображается в какие-то другие поверхности σ_j^+ , ω_j^+ , ω_{j1}^+ или ω_{j2}^+ . Отображение, преобразующее, например, точки поверхности σ_j^- , в ω_{j1}^+ , будем обозначать через $T(\sigma_j^- \rightarrow \omega_{j1}^+)$. Таких различных отображений будет конечное число, причем каждое из этих отображений кусочно-гладкое. Это последнее утверждение

следует из существования верхней границы τ длительности движения фазовой точки от одной поверхности до другой и из компактности гладких кусков поверхностей без контакта, ограничивающих выделенные нами окрестности состояний равновесия и периодических движений.

Мы рассмотрели фазовые траектории, расположенные вне выделенных окрестностей, и обнаружили, что их поведение описывается конечным числом гладких точечных отображений. Рассмотрим теперь фазовые траектории, расположенные внутри этих выделенных окрестностей. В окрестностях устойчивых состояний равновесия или периодических движений все фазовые траектории асимптотически приближаются к соответствующему состоянию равновесия или периодическому движению. Внутри окрестностей неустойчивых состояний равновесия или периодических движений все фазовые траектории выходят из этих окрестностей. В окрестностях седловых состояний равновесия или периодических движений все траектории, кроме траекторий, принадлежащих интегральным многообразиям, проходящим через состояние равновесия или периодическое движение, при убывании времени пересекают поверхность ω_i^- ($\omega_{i1}^-, \omega_{i2}^-$), а при возрастании времени пересекают поверхность ω_i^+ ($\omega_{i1}^+, \omega_{i2}^+$). Тем самым внутри окрестности седлового состояния равновесия или периодического движения фазовые траектории порождают точечные отображения, преобразующие ω_i^+ ($\omega_{i1}^+, \omega_{i2}^+$) в ω_i^- ($\omega_{i1}^-, \omega_{i2}^-$). Исключение составляют при этом лишь граничные точки ω_{i1}^+ и ω_{i2}^+ , принадлежащие инвариантной поверхности $S_{p_i}^+$. Таких различных отображений конечное число. Отображение, преобразующее, например, ω_{i1}^+ в ω_i^- , обозначим через T ($\omega_{i1}^+ \rightarrow \omega_i^-$).

Рассмотрим теперь произвольную фазовую траекторию, и пусть

$$\dots, x_{-1}, x_0, x_1, x_2, \dots \quad (7.30)$$

— последовательные точки пересечения ее с поверхностями без контакта σ и ω . Любые две последовательные точки этой последовательности связаны между собою одним из отображений T . В силу того, что любая фазовая траектория при $t \rightarrow -\infty$ и при $t \rightarrow +\infty$ асимптотически приближается к одному из состояний равновесия или периодическому движению, последовательность точек

(7.36) — конечная, вида

$$x_{-s}, x_{-s+1}, \dots, x_{r-1}, x_r. \quad (7.37)$$

При этом точка x_{-s} принадлежит либо одной из поверхностей σ_i^- , либо одному из интегральных многообразий S_q^- . Аналогично точка x_r принадлежит либо одной из поверхностей σ_i^+ , либо одному из интегральных многообразий S_p^+ . Оказывается, что при достаточно малых окрестностях, выделяющих состояния равновесия и периодические движения, ни одна фазовая траектория не пересекает одну и ту же поверхность ω дважды. Поэтому в любой последовательности (7.37) общее число точек $s + r + 1$ не более некоторого конечного N . Это означает, что всем возможным фазовым траекториям рассматриваемой динамической системы соответствует конечное число различных конечных последовательностей точечных отображений $T(\sigma^- \rightarrow \omega^+)$, $T(\omega^+ \rightarrow \omega^-)$ и $T(\omega^- \rightarrow \sigma^-)$. Все эти последовательности могут быть в принципе найдены следующим образом. Точки каждой из поверхностей σ_i^- преобразуются в какие-то поверхности σ_j^+ и ω_k^+ . В свою очередь каждая из поверхностей ω_k^+ преобразуется в какие-то области $\bar{\omega}_k^+ \cap \sigma_s^+$ и $\bar{\omega}_k^- \cap \omega_l^+$ на поверхностях σ_s^+ и ω_l^+ . Эти области опять преобразуются в какие-то области на поверхностях σ и ω и т. д., но не более чем N раз. Описанные последовательные преобразования можно изобразить в виде некоторого графа.

Если отвлечься от движений, асимптотически приближающихся к седловым состояниям равновесия и периодическим движениям, то точки каждой из поверхностей σ_i^- после конечного числа преобразований (на более N) перейдут в точки каких-то поверхностей σ_j^+ . Эти потоки фазовых траекторий от неустойчивых состояний равновесия и периодических движений к устойчивым разделяются в соответствии с описанной схемой и представляющим ее графиком сепаратрисными интегральными многообразиями седловых состояний равновесия и периодических движений типов $O^{1,n-1}$, $O^{n-1,1}$, $\Gamma^{2,n-1}$ и $\Gamma^{n-1,2}$.

Таким образом, мы пришли к описанию структуры фазового пространства рассматриваемого типа динамических систем с помощью конечного числа последовательностей точечных отображений и отвечающего им графа. Это описание дает общее представление о структуре фазо-

вого пространства таких динамических систем и возможных ее бифуркациях, а также указывает некоторый путь фактического исследования.

Вернемся к доказательству утверждения, на котором основаны изложенные выше общие соображения. Прежде всего введем некоторые определения. Совокупность состояний равновесия и периодических движений и их интегральных многообразий назовем скелетом динамической системы. Замкнутый контур, составленный из фазовых траекторий, конец каждой из которых соединен с началом

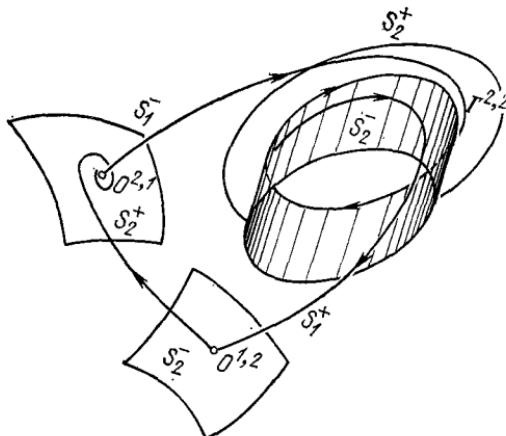


Рис. 7.27

следующей, назовем циклом. На рис. 7.27 приведен пример цикла, составленного из трех фазовых траекторий.

Теорема 7.1 [40]. Динамическая система с простейшими установившимися движениями, имеющая конечное число простых состояний равновесия и периодических движений и пересечения интегральных многообразий только общего типа, не имеетциклов.

Рассмотрим произвольный цикл, составленный из фазовых траекторий $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_s$, проходимых при возрастании времени в порядке их написания. Тогда фазовая траектория γ_i является пересечением интегральных многообразий $S_{q_{i-1}}^-$ и $S_{p_i}^+$ размерностей q_{i-1} и p_i .

В силу предполагаемой общности пересечений интегральных многообразий

$$q_{i-1} + p_i \geq n + 1,$$

где n — размерность фазового пространства. Суммируя все такие неравенства, найдем, что

$$\sum_{i=1}^s (q_i + p_i) \geq sn + s. \quad (7.38)$$

С другой стороны, если фазовая траектория γ_i при возрастании времени является асимптотической к состоянию равновесия, то $q_i + p_i = n$, а если к периодическому движению, то $q_i + p_i = n + 1$ и поэтому

$$\sum_{i=1}^s (q_i + p_i) = sn + s - x, \quad (7.39)$$

где x — число состояний равновесия, участвующих в цикле. Сравнивая (7.38) с (7.39), приходим к выводу, что цикл возможен только при $x = 0$, т. е. он может быть составлен только из фазовых траекторий, асимптотических к седловым периодическим движениям. Однако, как будет показано в дальнейшем, динамическая система с циклом такого вида имеет бесконечное число периодических движений и движений, отличных от асимптотических, к состояниям равновесия и периодическим движениям. Тем самым теорема доказана.

Теперь перейдем к доказательству требуемого утверждения об отсутствии фазовых траекторий, дважды пересекающих достаточно малую окрестность седлового состояния равновесия или периодического движения. Так как это утверждение лежит в основе сводимости исследования рассматриваемых динамических систем к рассмотрению конечного числа последовательностей точечных отображений, то сформулируем это утверждение в виде следующей теоремы.

Теорема 7.2. Исследование фазовых траекторий динамической системы, о которой шла речь в теореме 7.1, сводится к рассмотрению кусочно-гладкого точечного отображения поверхностей без контакта σ_i^- неустойчивых состояний равновесия и периодических движений в поверхности без контакта σ_i^+ устойчивых состояний равновесия и периодических движений (рис. 7.28).

Пусть $\delta_1^r, \delta_2^r, \dots, \delta_k^r$ — окрестности седловых состояний равновесия и периодических движений описанного вида, убывающие с ростом номера r . Если требуемое утверждение не выполняется, то существует последователь-

ность фазовых траекторий $\gamma^1, \gamma^2, \dots$ такая, что каждая траектория γ^r пересекает дважды по крайней мере одну из окрестностей $\delta_1^r, \delta_2^r, \dots, \delta_k^r$. Поэтому существует последовательность вложенных друг в друга окрестностей $\delta_i^{r_1}, \delta_i^{r_2}, \dots$, и последовательность фазовых траекторий $\gamma^{r_1}, \gamma^{r_2}, \dots$ таких, что фазовая траектория γ^{r_j} дважды пересекает окрестность $\delta_i^{r_j}$, а следовательно, и границу окрестности $\delta_i^{r_j}$, выходя из точки x^{r_j} и приходя в точку

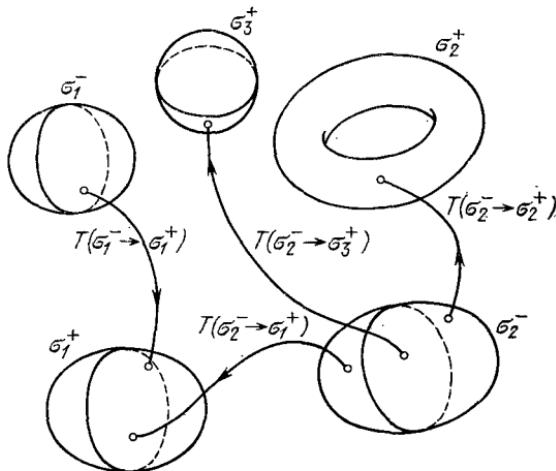


Рис. 7.28

x^{r_j} . Из этой последовательности фазовых траекторий можно выделить в свою очередь подпоследовательность, для которой точки x^{r_j} и \bar{x}^{r_j} имеют предельные x^* и \bar{x}^* . Эти предельные точки должны лежать соответственно на интегральных многообразиях S^+ и S^- состояния равновесия или периодического движения, окруженного окрестностью δ_i^r . Фазовая траектория, выходящая из точки x^* , не может идти в устойчивое состояние равновесия или периодическое движение, так как это имело бы место и для близких траекторий и поэтому они не могли бы проходить в сколь угодной близости к точке \bar{x}^* . Поэтому фазовая траектория, выходящая из точки x^* , идет в какое-то седловое состояние равновесия или периодическое движение, окруженное окрестностью δ_i^r . Фазовые траектории рассматриваемой

подпоследовательности пересекают ее границу в точках y^{r_j} и \bar{y}^{r_j} . Для некоторой подпоследовательности фазовых траекторий эти точки имеют предельные y^* и \bar{y}^* . Точки y^* и \bar{y}^* лежат на интегральных многообразиях S^+ и соответственно S^- состояния равновесия или периодического движения, лежащих внутри окрестности $\delta_s^{r_1}$. Фазовая траектория, выходящая из точки \bar{y}^* , опять не может идти ни в одно устойчивое состояние равновесия или периодическое движение. Продолжая это рассуждение и учитывая, что седловых состояний равновесия и периодических движений конечное число, приходим к существованию замкнутого контура, составленного из фазовых траекторий интегральных многообразий седловых равновесий и периодических движений, т. е. цикла. Так как цикла быть не может, то приходим к противоречию, доказывающему требуемое утверждение.

Выше был выделен класс динамических систем, характеризующийся тем, что (почти все) его фазовое пространство разбивается на некоторое конечное число областей притяжения устойчивых состояний равновесия и периодических движений. При этом роль седловых состояний равновесия и периодических движений и их инвариантных многообразий состояла лишь в том, что они формировали разделяющую границу этих областей. Однако роль седловых периодических движений в структуре фазового пространства может быть и более существенной. Как оказывается, они могут принять участие в формировании установившихся движений, которые будут иметь уже существенно более сложную природу, чем состояния равновесия и периодические движения. Для того чтобы перейти к изучению и описанию этих более сложных установившихся движений, необходимо ознакомиться с некоторыми сведениями из теории точечных отображений и лишь после изложения этих сведений продолжить рассмотрение структуры фазового пространства многомерной динамической системы.

§ 3. Вспомогательные сведения о точечных отображениях

Как говорилось ранее, метод точечных отображений позволяет свести исследование динамических систем, описываемых дифференциальными уравнениями, к рассмо-