

подпоследовательности пересекают ее границу в точках y^{r_j} и \bar{y}^{r_j} . Для некоторой подпоследовательности фазовых траекторий эти точки имеют предельные y^* и \bar{y}^* . Точки y^* и \bar{y}^* лежат на интегральных многообразиях S^+ и соответственно S^- состояния равновесия или периодического движения, лежащих внутри окрестности $\delta_s^{r_1}$. Фазовая траектория, выходящая из точки \bar{y}^* , опять не может идти ни в одно устойчивое состояние равновесия или периодическое движение. Продолжая это рассуждение и учитывая, что седловых состояний равновесия и периодических движений конечное число, приходим к существованию замкнутого контура, составленного из фазовых траекторий интегральных многообразий седловых равновесий и периодических движений, т. е. цикла. Так как цикла быть не может, то приходим к противоречию, доказывающему требуемое утверждение.

Выше был выделен класс динамических систем, характеризующийся тем, что (почти все) его фазовое пространство разбивается на некоторое конечное число областей притяжения устойчивых состояний равновесия и периодических движений. При этом роль седловых состояний равновесия и периодических движений и их инвариантных многообразий состояла лишь в том, что они формировали разделяющую границу этих областей. Однако роль седловых периодических движений в структуре фазового пространства может быть и более существенной. Как оказывается, они могут принять участие в формировании установившихся движений, которые будут иметь уже существенно более сложную природу, чем состояния равновесия и периодические движения. Для того чтобы перейти к изучению и описанию этих более сложных установившихся движений, необходимо ознакомиться с некоторыми сведениями из теории точечных отображений и лишь после изложения этих сведений продолжить рассмотрение структуры фазового пространства многомерной динамической системы.

§ 3. Вспомогательные сведения о точечных отображениях

Как говорилось ранее, метод точечных отображений позволяет свести исследование динамических систем, описываемых дифференциальными уравнениями, к рассмо-

трению порождаемых ими точечных отображений. Кроме того, исследование точечных отображений представляет и самостоятельный интерес, поскольку с их помощью описываются динамические системы с дискретным описанием изменения во времени.

В настоящем параграфе проводится геометрически наглядное рассмотрение точечных отображений. Рассматривается преобразование прямой в прямую, окружности в окружность, излагается метод неподвижной точки и метод вспомогательных отображений, приводится значительное число примеров точечных отображений, представляющих интерес для качественного исследования дифференциальных уравнений и связанных с ними колебательных явлений.

1. Преобразование прямой в прямую. Преобразование прямой в прямую можно задать формулой

$$\bar{x} = f(x), \quad (7.40)$$

определяющей точку \bar{x} , в которую преобразуется точка x . Зависимость (7.40) можно изобразить графически. Если к графику функции $f(x)$ добавить еще биссектрису $\bar{x} = x$,

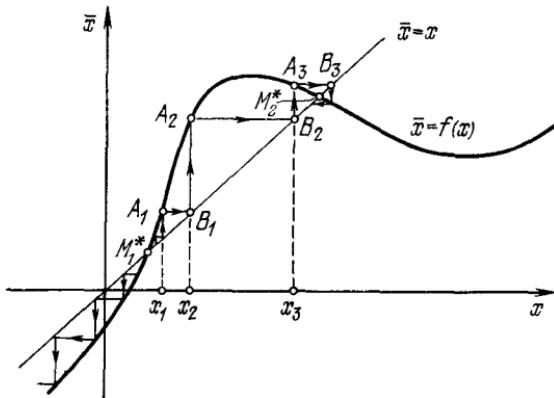


Рис. 7.29

то можно прийти к очень наглядному способу построения последовательных отображений, названному диаграммой Кёнигса—Ламерая [1] и состоящему в построении изображенной на рис. 7.29 ломаной $A_1, B_1, A_2, B_2, A_3, \dots$, абсциссы точек A_1, A_2, \dots которой представляют собой последовательные преобразования $x_1 = x, x_2 = f(x_1),$

$x_3 = f(x_2), \dots$. Точки пересечения графика на рис. 7.29 с биссектрисой определяют неподвижные точки преобразования, т. е. точки, преобразующиеся в себя. Такими точками на рис. 7.29 являются точки M_1^* и M_2^* . При этом точка M_1^* является неустойчивой, а точка M_2^* — устойчивой, поскольку точки, близкие к точке M_1^* , преобразуются согласно диаграмме рис. 7.29, отдаляясь от точки M_1^* , а точки, близкие к M_2^* , — напротив, приближаясь к ней.

Замкнутой ломаной $A_1, B_1, A_2, \dots, A_{m+1} \equiv A_1$ соответствует цикл m -кратных неподвижных точек. При $m = 1$ замкнутая ломаная $A_1, B_1, A_2 \equiv A_1$ превращается в точку пересечения графика с биссектрисой и соответствует однократной неподвижной точке. На рис. 7.30 изображена замкнутая ломаная с $m = 2$. Она соответствует двум двукратным неподвижным точкам x_1^* и x_2^* таким, что $f(x_1^*) = x_2^*, f(x_2^*) = x_1^*$. Цикл неподвижных точек x_1^* и x_2^* устойчивый, поскольку ломаные линии, близкие

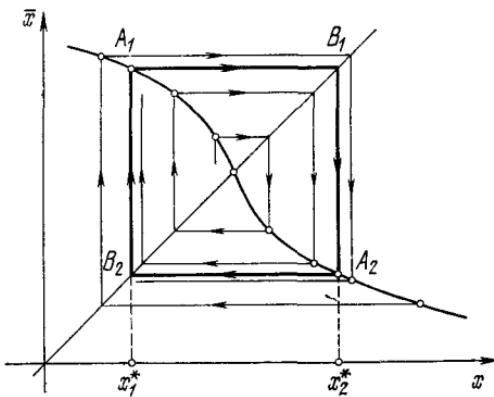


Рис. 7.30

к соответствующей этому циклу замкнутой ломаной, к ней приближаются. При произвольном m замкнутой ломаной $A_1, B_1, \dots, A_{m+1} \equiv A_1$ отвечает m кратных различных неподвижных точек $x_1^*, x_2^*, \dots, x_m^*$, связанных соотношениями

$$f(x_1^*) = x_2^*, \quad f(x_2^*) = x_3^*, \dots, \quad f(x_m^*) = x_1^*. \quad (7.41)$$

Непосредственно ясно, что m -кратная неподвижная точка отображения T является однократной неподвижной

точкой m -й степени отображения T , т. е. отображения T^m . Обратное не совсем верно, поскольку неподвижными точками отображения T^m могут быть не только m -кратные неподвижные точки, но и однократные, и точки, кратность которых является делителем числа m .

Как известно, условие устойчивости однократной неподвижной точки x^* состоит в выполнении неравенства $|f'(x^*)| < 1$, а неустойчивости — неравенства $|f'(x^*)| > 1$. Для m -кратной неподвижной точки условия устойчивости и неустойчивости соответственно имеют вид

$$|f'(x_1^*) \dots f'(x_m^*)| < 1 \quad \text{и} \quad |f'(x_1^*) \dots f'(x_m^*)| > 1. \quad (7.42)$$

Как известно, устойчивым (неустойчивым) неподвижным точкам отображения, простым и кратным, соответствуют устойчивые (неустойчивые) периодические установившиеся движения соответствующей динамической системы. Поэтому изучение точечного отображения предполагает, в первую очередь, отыскание и исследование устойчивости его неподвижных точек. Затем непосредственный интерес представляют области притяжения неподвижных точек. В некоторых случаях на этом исследование и заканчивается, поскольку вся прямая разбивается на некоторое число областей притяжения различных устойчивых неподвижных точек. Именно так обстоит дело для взаимно однозначного отображения.

Взаимная однозначность означает, что каждому значению x , согласно (7.40), отвечает единственное значение \bar{x} и что ни при каких различных x и y не может иметь места равенство $f(x) = f(y)$. Из этого следует, что функция $f(x)$ монотонно меняется с монотонным изменением x и что, следовательно, для всех x либо $f'(x) \geqslant 0$, либо $f'(x) \leqslant 0$.

При изменении x от $-\infty$ до $+\infty$ $f(x)$ изменяется монотонно, меняясь в пределах от $f(-\infty) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ до $f(+\infty) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$. При этом возможны следующие случаи: а) $f(-\infty) = -\infty$ ($+\infty$) и $f(+\infty) = +\infty$ ($-\infty$), и тогда отображение (7.40) преобразует прямую в прямую; б) одно из значений $f(-\infty)$ или $f(+\infty)$ конечно, и тогда точечное отображение (7.40) преобразует прямую в полупрямую; в) оба значения $f(-\infty)$ и $f(+\infty)$

конечные, и тогда отображение (7.40) преобразует прямую в конечный отрезок.

На рис. 7.31 представлен график взаимно однозначного точечного отображения, заключенный между горизонтальными асимптотами $\bar{x} = f(-\infty)$ и $\bar{x} = f(+\infty)$. При этом любая точка x прямой преобразуется внутрь отрезка

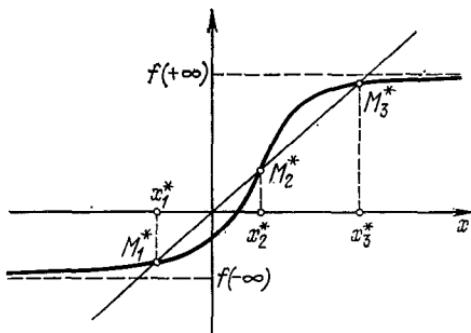


Рис. 7.31

$(f(-\infty), f(+\infty))$, на котором имеются три неподвижные точки: x_1^* , x_2^* и x_3^* . Неподвижные точки x_1^* и x_3^* — устойчивые, а неподвижная точка x_2^* — неустойчивая. Всякая точка полупрямой $(-\infty, x_2^*)$ при последовательных применениях отображения асимптотически приближается к точке x_1^* , а всякая точка полупрямой $(x_2^*, +\infty)$ — к точке x_3^* . Таким образом, вся прямая разбивается неустойчивой неподвижной точкой на две области притяжения, $\Pi(x_1^*)$ и $\Pi(x_3^*)$, устойчивых неподвижных точек x_1^* и x_3^* .

Нетрудно убедиться, что разбиение всей прямой на какое-то число областей притяжения устойчивых неподвижных точек имеет место для общего взаимно однозначного отображения с $f'(x) \geq 0$. Действительно, пусть $\dots < x_1^* < x_2^* < x_3^* < \dots$ — точки пересечения графика точечного отображения с биссектрисой. При этом устойчивые и неустойчивые точки, очевидно, чередуются. Для каждой устойчивой неподвижной точки x_i^* отрезок (x_{i-1}^*, x_{i+1}^*) будет ее областью притяжения. Совокупность интервалов (x_{j-1}^*, x_{j+1}^*) с $j = i, i \pm 2, \dots$ образует требуемое разбиение.

Особые случаи, при которых график может касаться биссектрисы, представляют интерес, поскольку соответствуют бифуркациям точечного отображения. Эти особые случаи можно рассматривать, как возникшие в результате непрерывного изменения точечного отображения и его графика, при котором две или несколько неподвижных точек сливаются.

На рис. 7.32 представлены три последовательные фазы графика при непрерывном его изменении, в результате которого происходит либо возникновение двух новых неподвижных точек, либо, наоборот, две неподвижные точки сливаются и исчезают. Первый случай соответствует непрерывному переходу от a к b через границу δ , а второй, на-

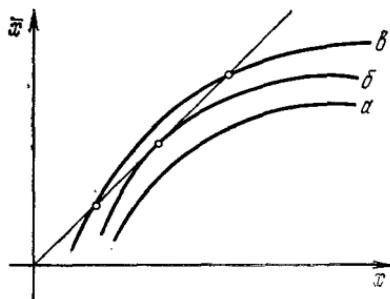


Рис. 7.32

оборот, — переходу от b через δ к a .

Рассмотрим теперь взаимно однозначное точечное отображение T , для которого $f'(x) \leq 0$. В этом случае график точечного отображения пересекается с биссектрисой в одной и только в одной точке x^* , которая может быть устойчивой или неустойчивой. Для дальнейшего изучения отображения T полезно заметить, что отображение T^2 является взаимно однозначным отображением уже рассмотренного типа. Действительно, отображение T^2 записывается в виде

$$\bar{x} = f(f(x)) = F(x)$$

и

$$F'(x) = \frac{df}{dx} \Big|_{f(x)} \frac{df}{dx} \Big|_x \geq 0.$$

Неподвижной точке $x_1^* \neq x$ отображения T^2 соответствует цикл двукратных неподвижных точек x_1^* и $x_2^* = f(x_1^*) \neq x_1^*$ отображения T .

Этих сведений достаточно для того, чтобы прийти к выводу о том, что в рассматриваемом случае вся прямая разбивается на области притяжения двукратных неподвижных точек и, возможно, одну область притяжения однократной неподвижной точки, если неподвижная точка x^* устойчивая.

Пример точечного отображения, соответствующий рассматриваемому случаю, приведен на рис. 7.33.

На рис. 7.34 и 7.35 изображены фазы двух различных типов бифуркаций взаимно однозначного отображения, для которого $f'(x) \leq 0$. На рис. 7.34 изображена бифуркация, при которой происходит рождение или исчезновение двух циклов из двукратных неподвижных точек. Рис. 7.35 изображает бифуркацию смены устойчивости однократной неподвижной точки, при которой одновременно происходит рождение или исчезновение цикла двукратных неподвижных точек.

Перейдем теперь к рассмотрению значительно более сложного однозначного, но не взаимно однозначного точечного отображения T прямой в прямую. Все сказанное ранее о неподвижных точках отображения остается в силе. Новое состоит в возможности возникновения очень сложных структур. Причину их появления можно понять, рассматривая обратное отображение T^{-1} . Именно, допустим, что обратное многозначное отображение T^{-1} расщепляется на ряд непрерывных однозначных отображений $T_{i_1}^{-1}, T_{i_2}^{-1}, \dots, T_{i_m}^{-1}$, записываемых в виде $x = g_i(x)$ ($i = 1, 2, \dots$), и пусть однозначные отображения с $i = 1, 2, \dots, p$ преобразуют некоторый отрезок $[a, b]$ в себя. Рассмотрим произведение отображений

$$T_{i_m}^{-1} T_{i_{m-1}}^{-1} \dots T_{i_2}^{-1} T_{i_1}^{-1}, \quad (7.43)$$

где i_1, i_2, \dots, i_m — любые числа от 1 до p . Это отображение определено на отрезке $[a, b]$ и преобразует его в себя, поэтому оно имеет на этом отрезке по крайней мере одну неподвижную точку $x_{i_1 i_2 \dots i_m}^*$. Неподвижная точка произведения отображений является неподвижной точкой T^m , а следовательно, и T^m . Неподвижной точке T^m соответствует либо простая неподвижная точка отображения T , либо кратная неподвижная точка, кратность которой является делителем m . Первый случай может иметь место, только когда $i_1 = i_2 = \dots = i_m$. Неподвижные точки различных отображений (7.43) обязательно разные. В качестве примера рассмотрим отображение T с графиком, представленным на рис. 7.36. Точечное отображение, обратное отображению T , многозначное. Участок $C_0 C_1$ графика определяет взаимно однозначную зависимость

$$\bar{x} = f_1(x), \quad x \in (-\infty, x_1),$$

$$x = g_1(\bar{x}), \quad \bar{x} \in (-\infty, \bar{x}_1),$$

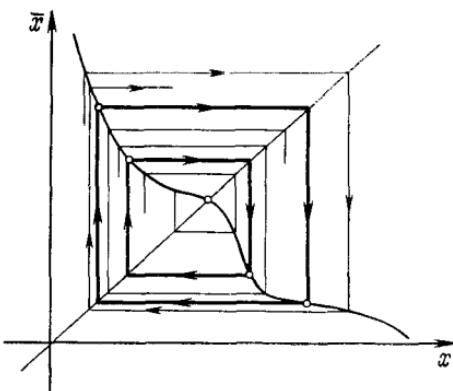


Рис. 7.33

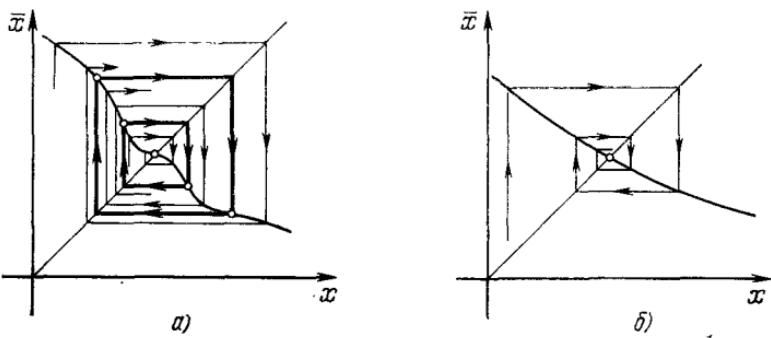


Рис. 7.34

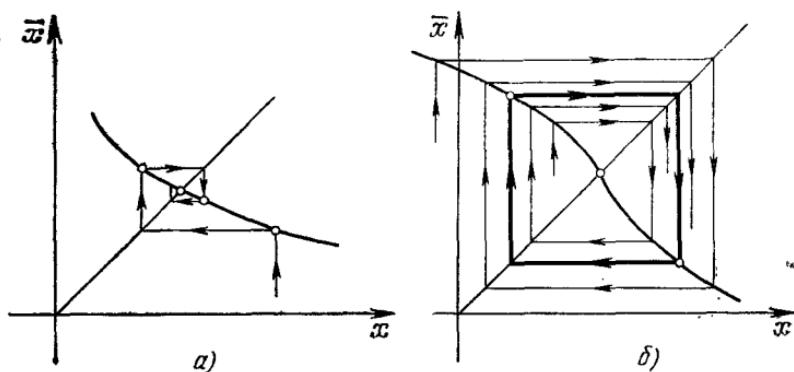


Рис. 7.35

где (x_1, \bar{x}_1) — координаты точки максимума C_1 . Участки C_1C_2 и C_2C_3 определяют взаимно однозначные зависимости $\bar{x} = f_2(x)$, $x = g_2(\bar{x})$, $x \in (x_1, x_2)$, $\bar{x} \in (\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ и соответственно $\bar{x} = f_3(x)$, $x = g_3(\bar{x})$, $x \in (x_2, +\infty)$, $\bar{x} \in (\bar{x}_2, +\infty)$, где (x_2, \bar{x}_2) — координаты точки минимума C_2 . В соответствии с этим

$$T^{-1}\bar{x} = \begin{cases} g_1(\bar{x}) & \text{при } \bar{x} \in (-\infty, \bar{x}_1), \\ g_1(\bar{x}), g_2(\bar{x}), g_3(\bar{x}) & \text{при } \bar{x} \in (\bar{x}_1, \bar{x}_2), \\ g_3(\bar{x}) & \text{при } \bar{x} \in (\bar{x}_2, +\infty), \end{cases}$$

где каждая из функций $g_1(\bar{x})$, $g_2(\bar{x})$ и $g_3(\bar{x})$ в своих областях определения непрерывна.

Обозначим через T_i^{-1} ($i = 1, 2, 3$) отображение, определяемое зависимостью $x = g_i(\bar{x})$. Пусть, как это имеет место на рис. 7.36, $\bar{x}_1 > x_2$, тогда отображения T_1^{-1} и T_2^{-1} отрезок $[0, \bar{x}_1]$ преобразуют в отрезок $(0, x_1)$ и, соответственно, в отрезок (x_1, x_2) , которые лежат внутри отрезка $[0, \bar{x}_1]$. Согласно сказанному ранее, отсюда следует, что любое из отображений вида $T_{i_m} T_{i_{m-1}} \dots T_{i_1}$, где каждое из i_s равно либо 1, либо 2, имеет неподвижную точку $x_{i_1, i_2, \dots, i_m}^*$.

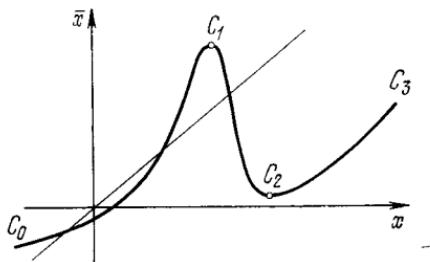


Рис. 7.36

В качестве следующего примера приведем отображение отрезка $[0, 1]$ на себя с графиком, изображенным на рис. 7.37, а. Обратное ему отображение T^{-1} двузначно, так что любому \bar{x} соответствуют два различных значения x : $x_1 = g_1(\bar{x})$ и $x_2 = g_2(\bar{x})$. Каждое из отображений T_1^{-1} и T_2^{-1} преобразует отрезок $[0, 1]$ в себя. В силу этого, как и в предыдущем примере, отображение T имеет бесчисленное множество всевозможных кратных неподвижных точек.

Конкретизируем вид этого точечного отображения. Пусть его уравнение записывается в виде

$$\bar{x} = 1 - 4 \left(x - \frac{1}{2} \right)^2. \quad (7.44)$$

Тогда обратные отображения легко находятся и имеют вид

$$x = \frac{1}{2} \pm (1 - \bar{x})^{1/2}.$$

Отображение (7.44) преобразует отрезок $[0, 1]$ на себя, имеет бесконечное число различных кратных неподвижных точек, однако, как можно обнаружить, все эти неподвижные точки неустойчивые. Действительно, согласно (7.44) $d\bar{x}/dx = -8(x - 1/2)$ и поэтому $|d\bar{x}/dx| \leq 1$ при $|x - 1/2| \leq 1/8$ и $|d\bar{x}/dx| > 1$ при $|x - 1/2| > 1/8$. Цикл m -кратных неподвижных точек x^1, x^2, \dots, x^m устойчив или неустойчив в зависимости от того, меньше или больше единицы произведение

$$\left| \frac{d\bar{x}}{dx} \right|_{x=x^1} \left| \frac{d\bar{x}}{dx} \right|_{x=x^2} \cdots \left| \frac{d\bar{x}}{dx} \right|_{x=x^m}.$$

Покажем, что эта величина всегда больше единицы. Если все сомножители этого произведения более единицы, то утверждение очевидно. Поэтому осталось рассмотреть случай, когда по крайней мере один из сомножителей (можно

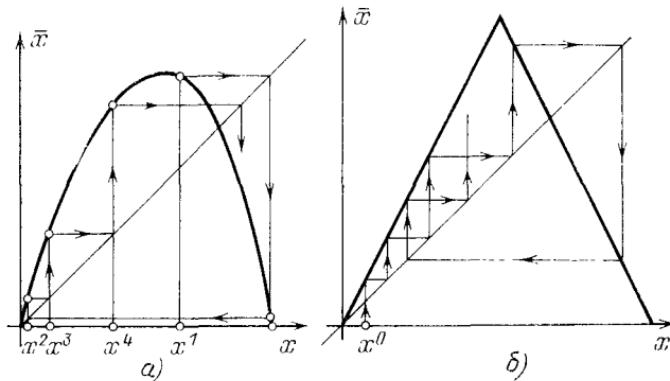


Рис. 7.37

считать, что первый) меньше единицы. Если $|d\bar{x}/dx| \leq 1$, то $|x - 1/2| \leq 1/8$. Поэтому $|\xi| = |x^1 - \frac{1}{2}| < \frac{1}{8}$. Рассмотрим последовательность (рис. 7.37, a) x^1, x^2, x^3, \dots и пусть в этой последовательности $0 < x^2, \dots, x^s < \frac{3}{8}$, а $x^{s+1} \geq \frac{3}{8}$. Тогда $4\xi^2 4^{s-1} > \frac{3}{8}$ и $\left| \frac{d\bar{x}}{dx} \right|_{x=x^1} \cdots \left| \frac{d\bar{x}}{dx} \right|_{x=x^s} > 8\xi^{3s-2}$. Используя первое из неравенств, из второго

находим, что

$$\prod_{i=1}^s \left| \frac{d\bar{x}}{dx} \Big|_{x=x_i} \right| > \left(\frac{3}{2} \right)^{s-3/2} > 1.$$

Таким образом, за каждым множителем, меньшим единицы, следует некоторое число множителей, больших единицы, и при этом их общее произведение больше единицы. Это доказывает неустойчивость всех неподвижных точек. Однако из этого вытекает и более общее утверждение о локальной неустойчивости любой последовательности точек

$$x^1, x^2 = Tx^1, x^3 = Tx^2, \dots$$

Из изложенного следует, что поведение последовательностей точечного отображения (7.44) весьма сложно и разнообразно. Описать его, опираясь на какие-то отдельные траектории, нельзя, поскольку все эти последовательности неустойчивые. Однако для всей совокупности последовательностей возможно статистическое описание. Проиллюстрируем эту возможность для графика точечного отображения, изображенного на рис. 7.37, б. Для того чтобы естественно прийти к статистическому описанию, допустим, что начальная точка не задана точно, а задано некоторое распределение вероятностей ее положения с помощью плотности вероятности $\varphi(x)$. Чем точнее задание начального значения x , тем острее плотность распределения вероятностей. Плотности вероятности $\varphi(x)$ в виде δ -функции соответствует точное задание начального значения.

Распределение плотности вероятности начальной точки x^0 порождает вполне определенное распределение вероятностей следующей точки x^1 . Распределение вероятностей точки x^1 в свою очередь определяет распределение вероятностей точек x^2 и т. д. Плотности вероятностей $\varphi(x)$ и $\bar{\varphi}(\bar{x})$ предыдущей x и последующей \bar{x} точек, как нетрудно обнаружить, связаны соотношением

$$\bar{\varphi}(\bar{x}) = \sum_i \varphi(g_i(\bar{x})) |g'_i(\bar{x})|, \quad (7.45)$$

где суммирование происходит по всем точкам $g_i(\bar{x})$, которые отображением T преобразуются в точку x .

В рассматриваемом случае

$$g_1(\bar{x}) = \frac{\bar{x}}{2}, \quad g_2(\bar{x}) = -\frac{\bar{x}}{2} + 1,$$

и поэтому это соотношение записывается в виде

$$\bar{\varphi}(x) = \frac{1}{2} \left[\varphi\left(\frac{x}{2}\right) + \varphi\left(1 - \frac{x}{2}\right) \right].$$

Пользуясь этим соотношением, по начальной плотности вероятности можно шаг за шагом найти плотность вероятности после первого преобразования, затем после второго, третьего и т. д. Оказывается, что вне зависимости от начальной функции $\varphi(x)$ функция плотности вероятности на n -м шаге $\varphi_n(x)$ стремится при неограниченном возрастании n к единице. Таким образом, после достаточно большого числа преобразований все значения x становятся равновероятными, точнее, вероятность нахождения точки x в любом интервале зависит только от его длины.

Рассмотрим более детально отображение с диаграммой на рис. 7.37, б. Это отображение отрезок $[0, 1]$ преобразует в себя. Обратное отображение двузначно и распадается на два непрерывных однозначных отображения T_1^{-1} и T_2^{-1} . Отображения, обратные T_1^{-1} и T_2^{-1} , представляют собою сужения T_1 и T_2 отображения T на отрезок $[0, 1/2]$ и соответственно $[1/2, 1]$. Возьмем любую точку x^0 и рассмотрим ее последовательные преобразования, различая случаи, когда применяется преобразование T_1 и когда T_2 . Именно, пусть

$$x^1 = T_{i_0} x^0, \quad x^2 = T_{i_1} x^1, \quad x^3 = T_{i_2} x^2, \dots, \quad (7.46)$$

где

$$i_k = \begin{cases} 1, & \text{если } x^k \in [0, 1/2], \\ 2, & \text{если } x^k \in [1/2, 1]. \end{cases}$$

Тем самым любой точке $x^0 \in [0, 1]$ поставлена в соответствие бесконечная последовательность из единиц и двоек

$$i_0, i_1, i_2, i_3, \dots \quad (7.47)$$

Так, например, точке x^0 , согласно рис. 7.37, б соответствует последовательность $1, 1, 1, 2, 2, 1, 1, \dots$. Это соответствие однозначно. Оказывается, что оно и взаимно однозначно. Более того, оказывается, что для любой последовательности (7.47) из единиц и двоек можно найти точку x^0 , которой она соответствует. Доказательство этих, на первый взгляд весьма удивительных утверждений, может быть получено сравнительно просто и опирается на довольно общие утверждения, значительно выходящие за

рамки рассматриваемого примера. Эти общие утверждения составляют основу так называемого символического описания точечного отображения и символической динамики [35], о которой применительно к рассматриваемому примеру пойдет речь.

Очень кратко это символическое описание состоит в следующем. Каждая точка $x^0 \in [0, 1]$ взаимно однозначно описывается символической последовательностью i_0, i_1, i_2, \dots , составленной из двух символов 1 и 2. Тем самым множество точек отрезка $[0, 1]$ можно рассматривать как множество всевозможных символических последовательностей (7.47). Пусть точке x^0 отвечает символическая последовательность i_0, i_1, i_2, \dots , тогда точке $x^1 = Tx^0$, как очевидно, отвечает последовательность i_1, i_2, i_3, \dots . То есть в множестве символических последовательностей точечное отображение T представляется как весьма простая операция отбрасывания первого символа.

Перейдем к доказательству сделанных утверждений. Надлежит доказать, что любой последовательности (7.47) отвечает некоторая точка x^0 и что такая точка единственная. Если бы такая точка существовала, то ее последовательные преобразования были бы связаны соотношениями (7.46), которые перепишем в виде

$$x^0 = T_{i_0}^{-1}x^1, x^1 = T_{i_1}^{-1}x^2, x^2 = T_{i_2}^{-1}x^3, \dots$$

На самом деле ни одна из точек x^i нам неизвестна, нам известно лишь, что все они лежат на отрезке $[0, 1]$. Но оказывается этого уже достаточно, чтобы их найти. Действительно, из того, что точка $x^n \in [0, 1]$, следует, что точка x^{n-1} принадлежит некоторому отрезку $[\alpha_1, \beta_1]$, лежащему внутри него и имеющему в два раза меньшую длину. Аналогично, из того, что $x^{n-1} \in [\alpha_1, \beta_1]$, следует, что $x^{n-2} \in [\alpha_2, \beta_2]$, длина которого также в два раза меньше длины предшествующего отрезка $[\alpha_1, \beta_1]$, и т. д. Таким образом, x^0 принадлежит некоторому отрезку $[\alpha_n, \beta_n]$ длины 2^{-n} . При этом из того, что точка $x^0 \in [\alpha_n, \beta_n]$, следует, что ей отвечает некоторая последовательность, n первых символов которой совпадают с n первыми символами последовательности (7.47). Если бы мы начали не с точки x^n , а с еще более далекой точки x^r ($r > n$), то аналогично пришли бы к тому, что точка $x^0 \in [\alpha_r, \beta_r] \subset [\alpha_n, \beta_n]$, где длина сегмента $[\alpha_r, \beta_r]$ равна 2^{-r} . Это рассуждение можно продолжить. Таким образом,

требуемая точка x^0 принадлежит вложенным друг в друга сегментам неограниченно уменьшающейся длины. Как известно, существует одна и только одна точка, удовлетворяющая этому требованию. Это и доказывает сделанное утверждение.

Простым примером конкретной системы, исследование движений которой приводится к отображению только что рассмотренного вида, является осциллятор с отрицательным трением и демпфирующими его колебания ударами.

При $x \neq 0$ или $x = 0$, но $\dot{x} < a$, движения осциллятора описываются уравнением

$$\ddot{x} - 2\delta\dot{x} + \omega^2 x = 0,$$

а при $x = 0$ и $\dot{x} \geq a > 0$ происходит удар, при котором координата x не меняется, а скорость \dot{x} испытывает скачок, так что послеударная скорость \dot{x}_+ и доударная \dot{x}_- связаны соотношением

$$\dot{x}_+ = \dot{x}_- - p \quad (p > 0).$$

Из этих уравнений следует, что последовательные значения y и \bar{y} скорости \dot{x} после пересечения фазовой точкой (x, \dot{x}) луча $x = 0, \dot{x} > 0$ связаны соотношением

$$\bar{y} = \begin{cases} qy & \text{при } qy < a, \\ qy - p & \text{при } qy \geq a, \end{cases}$$

где $q = \exp \frac{2\pi\delta}{\Omega}$, $\Omega^2 = \omega^2 - \delta^2$.

Эти соотношения между y и \bar{y} можно трактовать как точечное отображение прямой в себя. На рис. 7.38 его графики изображены при $a > \frac{p}{q-1}$ и при $a < \frac{p}{q-1}$. В первом случае последовательные преобразования любой точки $y \neq 0$ неограниченно возрастают. Во втором случае в зависимости от начального значения y имеет место либо возрастание последовательных преобразований, либо все последовательные преобразования, несмотря на неустойчивость ($d\bar{y}/dy > 1$), ограничены и носят стохастический характер, в общем случае всюду плотно заполняя интервал $(a-p)q < y < aq - p$.

2. Отображение окружности в окружность. Отображение окружности на окружность может рассматриваться как частный случай отображения прямой в прямую.

Поэтому все сказанное ранее об отображении прямой в прямую применимо и к отображению окружности в окружность. Однако этот частный случай обладает особенностями, заслуживающими дополнительного изучения. Впервые отображение окружности на себя изучал А. Пуанкаре [47] в связи с качественным исследованием фазовых траекторий на двумерном торе. Это исследование было

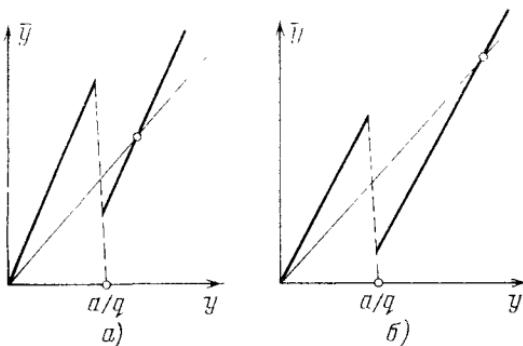


Рис. 7.38

продолжено А. Доцку и др. В работе [33] А. Г. Майера были найдены условия грубости и выяснен вид грубого отображения окружности на себя, а также установлена непрерывная зависимость числа вращения Пуанкаре от параметра. Подчеркнем, что речь идет о гладком взаимно однозначном отображении окружности на окружность, которое можно записать в виде

$$\bar{\vartheta} = \Theta(\vartheta), \quad (7.48)$$

где $\Theta(\vartheta)$ — гладкая и в силу взаимной однозначности монотонно возрастающая функция угловой переменной ϑ .

Важнейшей характеристикой такого точечного отображения является его число вращения μ . В случае, когда преобразование окружности на себя представляет собою вращение на угол α , число вращения μ равно $\alpha/(2\pi)$. В общем случае число вращения определяется как предел

$$\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha_n}{2\pi n}, \quad (7.49)$$

где α_n — угол, на который поворачивается точка ϑ окружности при ее n последовательных преобразованиях. Угол α_n зависит от выбора точки ϑ , однако значение пре-

дела от выбора начальной точки φ не зависит. Он существует при любом φ и при любом φ один и тот же. Существование предела вытекает из монотонности преобразования (7.48).

Из существования предела и его независимости от начальной точки φ вытекает, что при иррациональном μ отображение не имеет неподвижных точек, в том числе и кратных. Напротив, при рациональном $\mu = p/q$, где

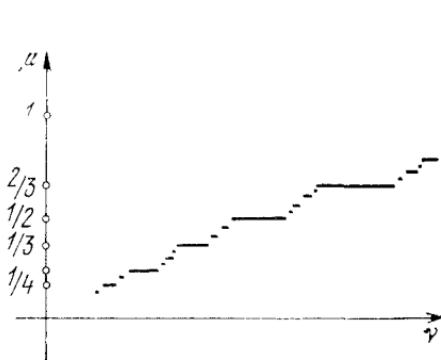


Рис. 7.39

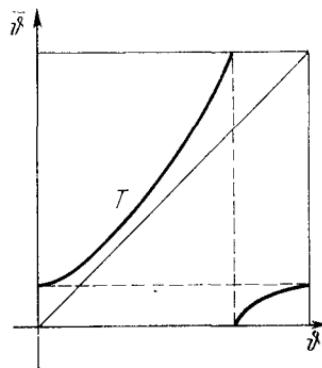


Рис. 7.40

p и q — взаимно простые целые числа, отображение имеет неподвижные точки кратности q и только такой кратности.

Дальнейшим важным фактом является непрерывная зависимость числа вращения μ от параметров, от которых само отображение зависит непрерывно.

Интересно еще отметить, что в общем случае при $\mu = p/q$ отображение имеет четное число простых (грубых) циклов по q неподвижных точек кратности q . Такая структура точечного отображения сохраняется при малых возмущениях параметров, от которых точечное отображение и его производная зависят непрерывно. Поэтому зависимость числа вращения от таких параметров такова, что каждое рациональное значение μ сохраняется неизменным в некоторых областях их изменения. На рис. 7.39 изображен примерный график зависимости числа вращения от параметра, который обозначим буквой ν , с соблюдением этого требования.

В заключение рассмотрим диаграммы взаимно однозначных точечных отображений окружности на себя. Пусть число вращения $\mu \neq 0$. Тогда точечное отображение не имеет простых неподвижных точек и его график

имеет вид, представленный на рис. 7.40. На следующем рис. 7.41 приведены диаграммы для степеней этого отображения, т. е. для отображений T^2 и T^3 в случае, когда $\mu \neq \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}$ и, следовательно, когда ни одна из этих степеней отображения T не имеет неподвижных точек.

На рис. 7.42 приведена диаграмма отображения T в случае, когда $\mu = \frac{1}{3}$. Здесь имеется два цикла, каждый из которых состоит из трех трехкратных неподвижных точек. Один цикл из устойчивых неподвижных точек и другой — неустойчивых.

3. Критерии существования неподвижной точки многомерного точечного отображения. Уже на примере точечного отображения прямой в прямую можно было видеть,

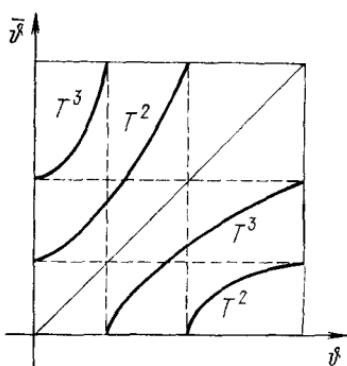


Рис. 7.41

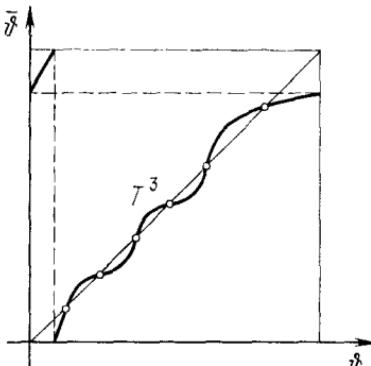


Рис. 7.42

насколько сложным может быть поведение его последовательных преобразований. С увеличением размерности, естественно, трудности исследования и возможная сложность поведения значительно возрастают. Однако все же разница между одномерными отображениями и многомерными не столь разительна, как между двумерными и многомерными дифференциальными уравнениями. Некоторое объяснение этому можно видеть в том, что рассмотрение двумерной системы дифференциальных уравнений при сведении к точечному отображению прямой в прямую всегда приводит к взаимно однозначным отображениям, структура которых очень проста. В то время как исследование многомерных дифференциальных уравнений может свестись к изучению как многомерных точечных отображений, так и невзаимно однозначных одномерных точечных отображений.

Один из важнейших вопросов, которые возникают при исследовании точечного отображения, — это вопрос о его неподвижных точках, их существовании, числе и устойчивости. Один из наиболее общих критериев существования неподвижной точки основывается на широко известной теореме Брауэра. Эта теорема утверждает, что любое непрерывное отображение T , преобразующее многомерный шар или любую гомеоморфную шару область G в себя, имеет в G по крайней мере одну неподвижную точку x^* . Под гомеоморфностью области G шару имеется в виду, что она является некоторым взаимно однозначным и взаимно непрерывным отображением шара

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 \leqslant 1.$$

Требования непрерывности отображения T и гомеоморфности области G шару существенны, т. е. нарушение любого из них может привести к отсутствию неподвижной точки.

Поясним сказанное на примере отображения T отрезка $[a, b]$ в себя. Так как отображение T преобразует отрезок $[a, b]$ в себя, то точки Ta и Tb необходимо принадлежат этому отрезку. Если $Ta = a$ или $Tb = b$, то точка a

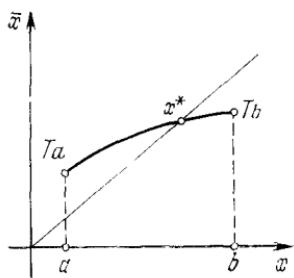


Рис. 7.43

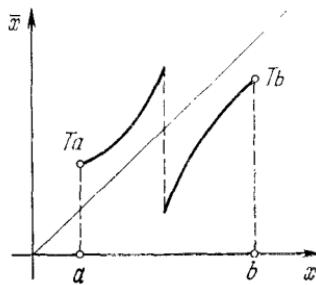


Рис. 7.44

или b являются неподвижными. Если же $Ta > a$ и $Tb < b$, то диаграмма точечного отображения имеет вид, показанный на рис. 7.43. Из нее, в силу непрерывности графика отображения T , следует, что он обязательно пересекается с биссектрисой. Заметим, что в случае разрывного точечного отображения такой точки пересечения и отвечающей ей неподвижной точки могло бы и не быть (рис. 7.44).

На рис. 7.45 изображена двумерная область G , гомеоморфная двумерному шару, которая преобразуется непрерывным отображением T в область \bar{G} . При этом, согласно теореме, хотя бы одна точка x^* этой области \bar{G} преобразуется в себя. Напротив, при непрерывном преобразовании кольцеобразной области G , изображенной на рис. 7.46,

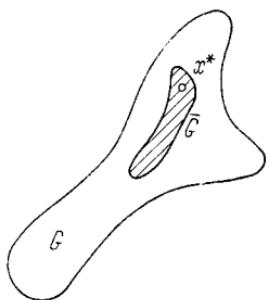


Рис. 7.45

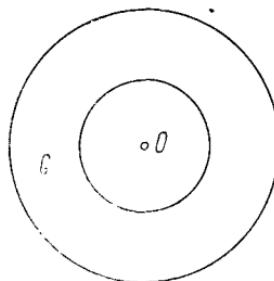


Рис. 7.46

неподвижной точки может и не быть. Для того чтобы в этом убедиться, достаточно представить себе, что отображение T состоит в повороте вокруг точки O на угол φ ($0 < \varphi < 2\pi$).

Отображение кольца в кольцо представляет значительный интерес и довольно часто встречается при исследовании конкретных динамических систем. Изучение ограниченной проблемы трех тел привело А. Пуанкаре к рассмотрению сохраняющего площадь отображения кольца на себя. Он обнаружил, что если при отображении внешний и внутренний контуры врачаются в разных направлениях, то имеется неподвижная точка. Это утверждение получило наименование последней геометрической теоремы А. Пуанкаре [43]. Ее доказательство было позднее найдено Дж. Биркгофом [19].

Может показаться, что если кольцо G преобразуется строго внутрь себя, так что область G переходит в \bar{G} , то внутри кольца существует замкнутый контур γ , преобразующийся в себя (рис. 7.47). В действительности это не всегда так. Однако можно указать довольно общие условия, при которых это имеет место *). При выполнении этих условий все точки кольца в результате повторения преобразования асимптотически приближаются к кривой

*) Эти условия можно получить из общих теорем существования устойчивого инвариантного многообразия [41].

γ . Кривая γ преобразуется сама в себя, так что на ней возникает некоторое преобразование окружности в окружность. При невыполнении этого условия отображение кольца в кольцо может иметь весьма сложный вид. Соответствующие примеры будут даны в дальнейшем. Отметим только, что такая сложная структура возникает, например, в случае, когда область G после некоторого числа преобразований переходит в область \bar{G} и при этом некоторая часть кольца σ преобразуется в область $\bar{\sigma}$, как это изображено на рис. 7.48.

Вернемся к теореме Брауэра. При выполнении ее условий в области G имеется неподвижная точка. Так как отображение T преобразует область G в себя, то можно

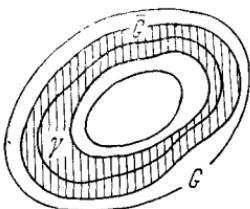


Рис. 7.47

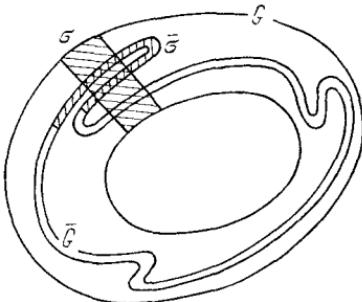


Рис. 7.48

было бы думать, что точечное отображение T имеет в G не только неподвижную точку, но и устойчивую неподвижную точку. Однако это не так. В случае отображения отрезка в отрезок это может быть не так лишь при невзаимной однозначности отображения. При взаимной однозначности отображение T отрезка в себя всегда имеет устойчивую неподвижную точку.

Для отображения круга в круг пример, опровергающий это утверждение о существовании устойчивой неподвижной точки, достаточно сложен.

Таким образом, теорема Брауэра, формулируя достаточные условия существования неподвижной точки, ничего не говорит ни об их числе, ни об устойчивости.

Следующий очень важный и общий критерий существования неподвижной точки широко известен как принцип сжимающих отображений С. Банаха. Этот критерий позволяет установить не только существование неподвижной точки, но и ее единственность. По существу он

дает достаточные условия существования единственной глобально устойчивой неподвижной точки.

Точечное отображение называется сжимающим, если оно при преобразовании уменьшает расстояние между любой парой точек, т. е. если для любой пары точек M и N и их образов \bar{M} и \bar{N} выполняется неравенство

$$\rho(\bar{M}, \bar{N}) < \rho(M, N). \quad (7.50)$$

Основное утверждение принципа сжимающих отображений применительно к конечной области G многомерного евклидова пространства состоит в том, что если сжимающее отображение T преобразует эту область G в себя, то в ней имеется единственная неподвижная точка x^* и вся область G при неограниченном повторении отображения T стягивается к ней. Из этого утверждения следует, что последовательные преобразования любой точки $x \in G$

$$x, Tx, T^2x, \dots$$

сходятся в неподвижной точке x^* . В случае, если условие сжимаемости может быть усилено, так что для любой пары точек x и y области G

$$\rho(\bar{x}, \bar{y}) < q\rho(x, y)$$

с некоторым $q < 1$, то сходимость последовательности точек к неподвижной точке x^* не медленнее, чем геометрической прогрессии с знаменателем q .

4. Метод вспомогательных отображений. Описанные выше критерии существования неподвижной точки и особенно критерий, основанный на принципе сжимающих отображений, в тех случаях, когда его удается применить, дает значительные, а иногда и исчерпывающие сведения о поведении изучаемой системы. В качестве примера можно привести произвольную механическую систему с взаимными и собственными комбинированными трениями без падающих участков характеристик трения. К такой системе возможно применение принципа сжимающих отображений, позволяющее установить глобальную устойчивость многообразия состояний равновесия или периодических движений при воздействии на такую систему внешней периодической силы. Применение принципа сжимающих отображений позволяет установить существование и единственность вынужденных колебаний в системе с так называемым конструкционным демпфи-

рованием. Соответствующие примеры могут быть продолжены, но все же они не очень многочисленны, поскольку далеко не всегда имеется сжимаемость. В настоящем разделе излагается метод вспомогательных отображений, позволяющий расширить применение критерия о существовании и единственности неподвижной точки на несжимающие отображения. Ради геометрической наглядности это изложение, как и относящиеся к нему примеры, будет ограничено двумерными точечными отображениями.

Пусть в некоторой области G плоскости (u, v) определено однозначное точечное отображение T

$$(\bar{u}, \bar{v}) = T(u, v). \quad (7.51)$$

Вспомогательным к отображению T называется отображение \tilde{T} , преобразующее точку (u, \bar{v}) в точку (\bar{u}, v) , если отображение T точку (u, v) преобразует в точку (\bar{u}, \bar{v}) .

Областью определения \tilde{G} вспомогательного отображения \tilde{T} является множество, пробегаемое точкой (u, \bar{v}) , когда точка (u, v) пробегает область

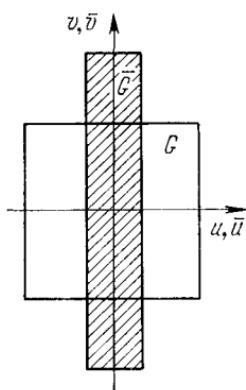


Рис. 7.49

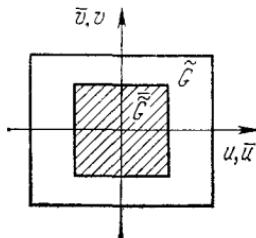


Рис. 7.50

G . При этом под \bar{v} понимается вторая компонента точки (\bar{u}, \bar{v}) , в которую отображение T преобразует точку (u, v) .

Вспомогательное отображение в своей области определения \tilde{G} может быть однозначным или многозначным. Причем многозначность вспомогательного отображения возможна и при взаимной однозначности отображения T . Приведем несколько простых примеров.

Отображение T определено в квадрате G ($|u| \leq 1$, $|v| \leq 1$) и имеет вид

$$\bar{u} = \lambda u, \bar{v} = v^{-1}v \quad (0 < \lambda < 1, 0 < v < 1). \quad (7.52)$$

Вспомогательное отображение \tilde{T} запишется в виде

$$\bar{u} = \lambda u, \quad v = v\bar{v}. \quad (7.53)$$

Его областью определения \tilde{G} будет прямоугольник $|u| \leq 1, |\bar{v}| \leq v^{-1}$. Вспомогательное отображение однозначно. Исходное отображение — седловое несжимающее, преобразующее квадрат G в прямоугольник, вытянутый по v и сжатый по u (рис. 7.49). Вспомогательное отображение — сжимающее, преобразующее прямоугольник G в лежащий в \tilde{G} меньший прямоугольник \tilde{G} ($|\bar{u}| \leq \lambda, |v| \leq v$) (рис. 7.50).

В качестве второго примера возьмем взаимно однозначное отображение T вида

$$\bar{u} = \lambda v, \quad \bar{v} = -a + cu + bv^2, \quad (7.54)$$

где все коэффициенты λ, a, b и c положительные. Вспомогательным к нему будет двузначное отображение \tilde{T} вида

$$\bar{u} = \lambda \left(\frac{\bar{v} + a - cu}{b} \right)^{1/2}, \quad v = \left(\frac{\bar{v} + a - cu}{b} \right)^{1/2}. \quad (7.55)$$

Оно получается разрешением уравнений (7.54) относительно \bar{u} и v . Области определения отображения T в виде квадрата G ($|u| \leq 1, |v| \leq 1$) соответствует область определения \tilde{G} вспомогательного отображения \tilde{T} вида, изображенного на рис. 7.51. Прямоугольник $|u| \leq 1, |\bar{v}| \leq \lambda$ двузначное вспомогательное отображение \tilde{T} преобразует в два отрезка \tilde{G}_1 и \tilde{G}_2 , изображенные на рис. 7.52, что соответствует вырожденности отображения (7.55). Отметим, что исходное отображение квадрат G ($|u| \leq 1, |v| \leq 1$) преобразует в подковообразную область \tilde{G} (рис. 7.53). При этом отрезок координатной линии fg ($u = \text{const}$) преобразуется в дугу $\bar{f}\bar{g}$ параболы.

Если точечное отображение T задано следующим образом:

$$\bar{u} = f(u, v), \quad \bar{v} = g(u, v), \quad (7.56)$$

то для получения вспомогательного отображения \tilde{T} в явном виде надлежит второе из уравнений (7.56) разрешить относительно v и записать его в виде $v = \tilde{g}(u, \bar{v})$, после чего соотношения (7.56) примут форму

$$\bar{u} = f(u, \tilde{g}(u, \bar{v})), \quad v = \tilde{g}(u, \bar{v}),$$

соответствующую искомой явной записи вспомогательного отображения \tilde{T} .

Разрешение второго из уравнений (7.56) относительно v можно геометрически представить себе как отыскание точек пересечения кривой F_u , заданной параметрическим уравнением $\bar{v} = g(u, v)$, в котором v — меняющаяся

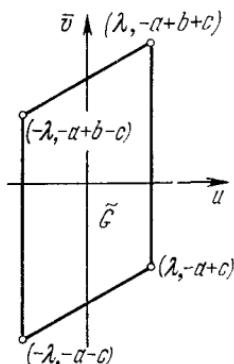


Рис. 7.51

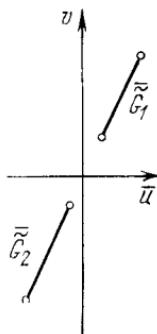


Рис. 7.52

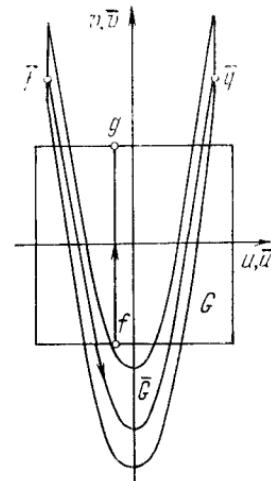


Рис. 7.53

переменная, а u — фиксированный параметр, с прямой $L_{\bar{v}}$ ($\bar{v} = \text{const}$). Значения параметра v в точках пересечения кривой F_u с прямой $L_{\bar{v}}$ определяют требуемое значение v как функцию u и \bar{v} .

Множество значений u и \bar{v} , при которых кривая F_u и прямая $L_{\bar{v}}$ пересекаются, определяет область определения вспомогательного отображения \tilde{T} .

Если кривая F_u и прямая $L_{\bar{v}}$ пересекаются при всех значениях u и \bar{v} не более чем в одной точке, то вспомогательное отображение \tilde{T} однозначное. Напротив, возможность нескольких пересечений говорит о многозначности вспомогательного отображения. При наличии нескольких точек пересечения кривой F_u и прямой $L_{\bar{v}}$ они разделяются точками максимума и минимума кривой F_u . Преобразование T прямую $u = \text{const}$ отображает в кривую F_u . Точкам максимума и минимума кривой F_u на этой прямой $u = \text{const}$ соответствуют точки (u, v) , в которых

$$g_v(u, v) = 0. \quad (7.57)$$

Пусть кривые, определяемые этим уравнением, разбивают область определения G отображения T на части G_1, G_2, \dots, G_m . Обозначим через T_s сужение отображения T на область G_s , в соответствии с чем запишем отображение T в виде

$$T(u, v) = T_s(u, v), \text{ если } (u, v) \in G_s. \quad (7.58)$$

Каждое из отображений T_s , согласно предыдущему, имеет однозначное вспомогательное отображение \tilde{T}_s . Это означает, что многозначное вспомогательное отображение \tilde{T} распадается на несколько однозначных вспомогательных отображений $\tilde{T}_1, \tilde{T}_2, \dots, \tilde{T}_m$.

Поясним сказанное на примере отображения T , преобразующего прямоугольник G в область \tilde{G} , как это показано на рис. 7.54. Соответствующие друг другу точки границ областей G и \tilde{G} обозначим буквами a, b, c, \dots и $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \dots$ соответственно. При этом координатные линии $u = \text{const}$ преобразуются в изображенные на этом рисунке кривые F_u . Минимумы кривых F_u лежат на линии $\bar{k}\bar{l}$, являющейся образом кривой kl , разбивающей область G на две части $G_1(ablk)$ и $G_2(clkd)$. В соответствии с этим вспомогательное отображение \tilde{T} двузначно и распадается на два однозначных отображения \tilde{T}_1 и \tilde{T}_2 . При этом $\tilde{T}_1(\tilde{T}_2)$ — однозначное вспомогательное отображение для сужения $T_1(T_2)$ отображения T , преобразующего область $G_1(G_2)$ в область $\tilde{G}_1(\bar{a}\bar{b}\bar{l}\bar{k})$ ($\tilde{G}_2(\bar{c}\bar{l}\bar{k}\bar{d})$). Прямоугольник G заведомо лежит внутри областей определения вспомогательных отображений \tilde{T}_1 и \tilde{T}_2 . Вспомогательные отображения \tilde{T}_1 и \tilde{T}_2 преобразуют область G в лежащие в ней области G'_1 и G'_2 (рис. 7.55). Действительно, часть координатной линии $u = \text{const}$, лежащая в области G_i , преобразуется в часть кривой F_u , лежащую в \tilde{G}_i . Для вспомогательного отображения \tilde{T}_i это соответствует преобразованию линии $u = \text{const}$ (\bar{v} меняется) в кривую, пробегаемую точкой (\bar{u}, v) , которая все время расположена внутри области G_i .

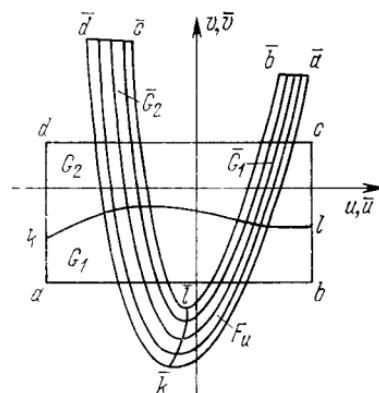


Рис. 7.54

Заметим, что изменения отображения T , приводящие к изменениям области \bar{G} и кривых F_u вне области G , не окажут влияния на вид вспомогательных отображений \bar{T}_1 и \bar{T}_2 в области G . Поэтому, в частности, эти вспомогательные отображения будут такими же и для отображений, преобразующих область G в область \bar{G} , изображенных на рис. 7.56. При изменениях вида области \bar{G} , в которую отображение T преобразует область G , изображенных

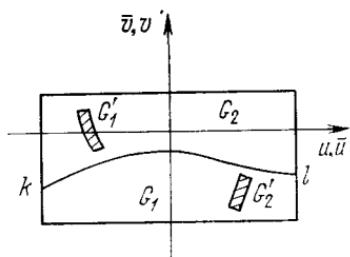


Рис. 7.55

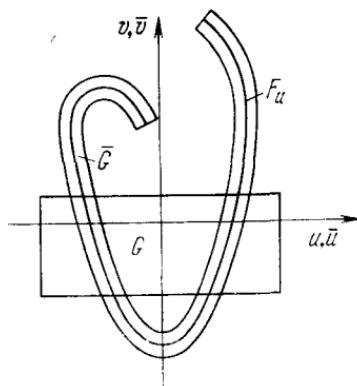


Рис. 7.56

на рис. 7.57, a, b , вспомогательное отображение \bar{T} в области G будет уже более чем двузначным. Однако по-прежнему среди однозначных отображений, на которые оно распадается, будут отображения \bar{T}_1 и \bar{T}_2 , которые преобразуют область G в расположенные в ней области \bar{G}_1 и \bar{G}_2 , и которые зависят только от той части отображения T , которая преобразует область G в нее же.

В приводимых выше примерах отображений T и вспомогательных к ним отображений \bar{T} отображение T не имеет областей, которые бы оно преобразовывало в себя, в то время как для вспомогательного отображения \bar{T} такие области имеются. Поэтому вспомогательное отображение допускает применение к нему описанных выше общих признаков существования неподвижной точки. Полезность этого применения в том, что неподвижные точки отображений T и \bar{T} одни и те же. Действительно, из того, что $T(u^*, v^*) = (u^*, v^*)$, следует, что $\bar{T}(u^*, v^*) = (u^*, v^*)$ и обратно.

Применение принципа сжимающих отображений, помимо требования преобразования некоторой области G в себя, содержит еще и требование сжимаемости. Поэтому

рассмотрим вопрос о сжимаемости вспомогательного отображения \tilde{T} . В качестве расстояния между двумя точками $M(u_1, v_1)$ и $N(u_2, v_2)$ можно принять

$$\rho(M, N) = |u_2 - u_1| + |v_2 - v_1| = |\delta u| + |\delta v|, \quad (7.59)$$

и тогда условие сжимаемости вспомогательного отображения \tilde{T} , преобразующего точку (u, v) в точку (\bar{u}, \bar{v}) , записывается при некотором $q < 1$ в виде

$$|\delta \bar{u}| + |\delta \bar{v}| < q(|\delta u| + |\delta v|). \quad (7.60)$$

Это условие сжимаемости соответствует тому, что отображение T — сжимающее вдоль оси u и, напротив, растя-

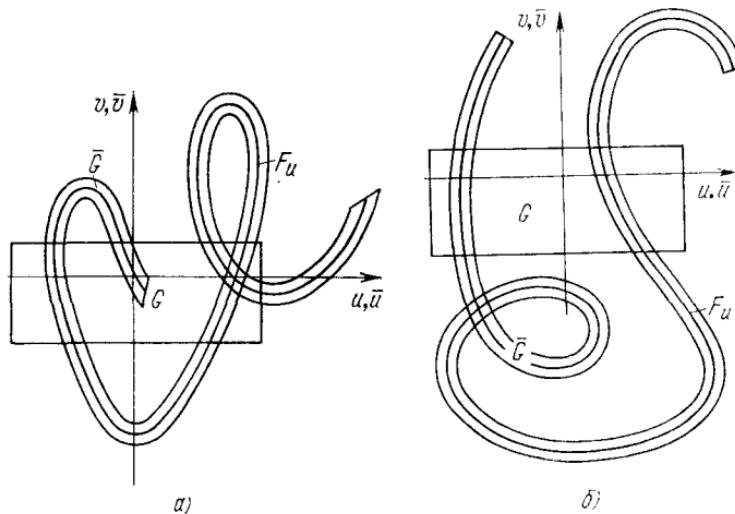


Рис. 7.57

гивающее вдоль оси v . При этом вектор $(\delta u, \delta v)$ преобразуется в вектор $(\delta \bar{u}, \delta \bar{v})$, как показано на рис. 7.58.

Точечное отображение, сжимающее по одним направлениям и растягивающее по другим, называется седловым. Простейшим примером седлового точечного отображения T может служить отображение вида

$$\begin{aligned} \bar{u} &= (\lambda + f(u, v)) u + \bar{u}_0, \\ \bar{v} &= (v^{-1} + g(u, v)) v + \bar{v}_0, \end{aligned} \quad (7.61)$$

где $|\lambda| < 1$, $|v| < 1$, а $f(u, v)$ и $g(u, v)$ — гладкие функции, обращающиеся в нуль при $u = v = 0$. Варьируя

соотношения (7.61), найдем, что

$$\delta\bar{u} = \lambda\delta u + u\left(\frac{\partial f}{\partial u}\delta u + \frac{\partial f}{\partial v}\delta v\right) + f\delta u,$$

$$\delta\bar{v} = v^{-1}\delta v + v\left(\frac{\partial g}{\partial u}\delta u + \frac{\partial g}{\partial v}\delta v\right) + g\delta v,$$

откуда

$$|\delta\bar{u}| < \left(|\lambda| + |u|\left|\frac{\partial f}{\partial u}\right| + |f|\right)|\delta u| + |u|\left|\frac{\partial f}{\partial v}\right||\delta v|,$$

$$|\delta v| < |v|\left(1 + \frac{1}{|v|}|v|\left|\frac{\partial g}{\partial v}\right| + \frac{1}{|v|}|g|\right)^{-1} \times$$

$$\times \left(|\delta\bar{v}| + |v|\left|\frac{\partial g}{\partial u}\right||\delta u|\right),$$

и поэтому

$$|\delta\bar{u}| + |\delta v| < q(|\delta u| + |\delta\bar{v}|),$$

где

$$q = \max_{u,v} \left\{ \max_{u,v} \left[|\lambda| + |u|\left|\frac{\partial f}{\partial u}\right| + \right. \right.$$

$$\left. \left. + |f| + |v|\left(1 + \frac{|v|}{|v|} + \frac{1}{|v|}|g|^{-1}\right)|v|\left|\frac{\partial g}{\partial u}\right|\right] , \right.$$

$$\left. \max_{u,v} \left[|u|\left|\frac{\partial f}{\partial v}\right| + |v|\left(1 + \frac{|v|}{|v|}\left|\frac{\partial g}{\partial v}\right| + \frac{1}{|v|}|g|\right)^{-1} \right] \right\}. \quad (7.62)$$

Из приведенной оценки для q видно, что вблизи точки $u = v = 0$ $q < 1$ (при $u = v = 0$ $q = \max(|\lambda|, |v|) < 1$).

Поэтому отображение \tilde{T} , вспомогательное к седловому отображению T , в окрестности точки $u = v = 0$ сжимающее. На рис. 7.59 даны наглядные изображения седлового отображения T и соответствующего ему сжимающего вспомогательного отображения \tilde{T} .

Теперь мы можем сформулировать утверждение, которое оказывается полезным при исследовании точечных отображений, возникающих во многих конкретных случаях.

Теорема 7.3. Пусть точечное отображение T имеет многозначное вспомогательное отображение \tilde{T} , и пусть $\tilde{T}_1, \tilde{T}_2, \dots, \tilde{T}_m$ — некоторые из составляющих его од-

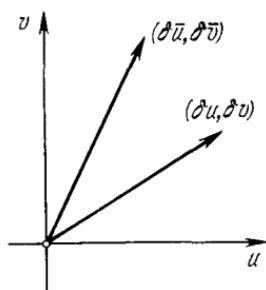


Рис. 7.58

нозначных отображений, которые определены в области G , преобразуют ее в себя и являются в ней сжимающими, тогда любому набору целых положительных чисел i_1, i_2, \dots, i_n , не больших m , соответствует своя единственная n -кратная седловая неподвижная точка отображения T .

Подчеркнем, что разным наборам целых чисел i_1, i_2, \dots, i_n отвечают различные неподвижные точки. Цикл n -кратных неподвижных точек отображения T составляют

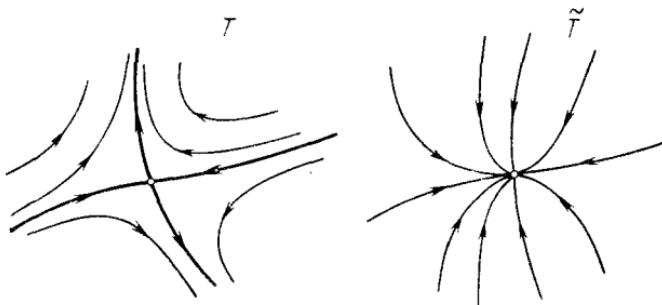


Рис. 7.59

точки, отвечающие n циклическим перестановкам чисел i_1, i_2, \dots, i_n .

Из этой теоремы следует, что удовлетворяющее ее условиям точечное отображение T обладает весьма сложной структурой и что появление этой сложной структуры связано с многозначностью вспомогательного отображения \tilde{T} и его свойством преобразования некоторой области G в себя. Свойство сжимаемости, как оказывается, не является столь существенным. Оно лишь обеспечивает взаимную однозначность соответствия неподвижных точек и числовых последовательностей i_1, i_2, \dots, i_n , а также их седловой характер.

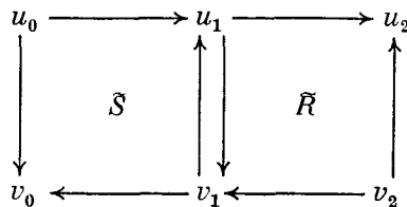
Доказательство теоремы по существу полностью подготовлено предшествующим изложением. Осталось только показать, что отображение

$$T_{i_n} T_{i_{n-1}} \dots T_{i_2} T_{i_1} \quad (7.63)$$

допускает определенное в G сжимающее вспомогательное отображение, преобразующее G в себя. Доказательство этого утверждения можно провести методом индукции, для чего достаточно убедиться, что если отображения R и S имеют определенные в G сжимающие и преобразую-

щие G в себя вспомогательные отображения \tilde{R} и \tilde{S} , то таким же свойством обладает и отображение \tilde{RS} .

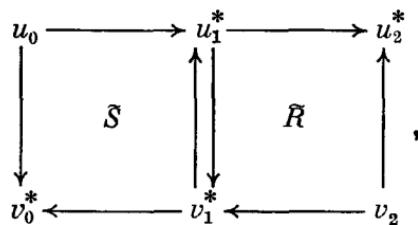
Докажем сначала, что отображение \tilde{RS} определено в области G и преобразует ее в себя. Для этого рассмотрим схему



и начнем пересчитывать входящие в нее переменные в соответствии со стрелками по формулам

$$(\bar{u}_1, \bar{v}_0) = \tilde{S}(u_0, v_1), \quad (\bar{u}_2, \bar{v}_1) = \tilde{R}(u_1, v_2).$$

Для возможности такого пересчета нужно, чтобы точки (u_0, v_1) и (u_1, v_2) принадлежали области G . Нетрудно видеть, что после пересчета новая схема также будет удовлетворять этому требованию. Каждое из применяемых при этом преобразований \tilde{S} и \tilde{R} — сжимающее, поэтому очевидно, что при неограниченном применении описанной процедуры пересчета рассматриваемая схема будет сходиться к некоторой предельной схеме



элементы которой удовлетворяют соотношению

$$(u_2^*, v_0^*) = \tilde{RS}(u_0, v_2),$$

и точка $(u_2^*, v_0^*) \in G$.

Тем самым существование в G вспомогательного отображения \tilde{RS} доказано, доказано и то, что область G преобразуется в себя. Осталось установить сжимаемость отображения \tilde{RS} . В силу сжимаемости каждого из вспо-

могательных отображений \bar{S} и \bar{R} , имеем неравенства

$$|\delta u_1^*| + |\delta v_0^*| < q(|\delta u_0| + |\delta v_1^*|),$$

$$|\delta u_2^*| + |\delta v_1^*| < q(|\delta u_1^*| + |\delta v_2|),$$

из которых непосредственно следует условие сжимаемости

$$|\delta u_2^*| + |\delta v_0^*| < q(|\delta u_0| + |\delta v_2|)$$

для вспомогательного отображения $\bar{R}\bar{S}$, что и требовалось.

В качестве примера, к которому может быть применена сформулированная и доказанная теорема, можно взять отображение рис. 7.54. Отображение, соответствующее этому рис. 7.54, получило название подковы Смейла [27]. Смайл [52] обратил внимание на наличие у такого отображения бесконечного множества различных седловых неподвижных точек, а также на то, что эти неподвижные точки сохраняются при произвольных малых

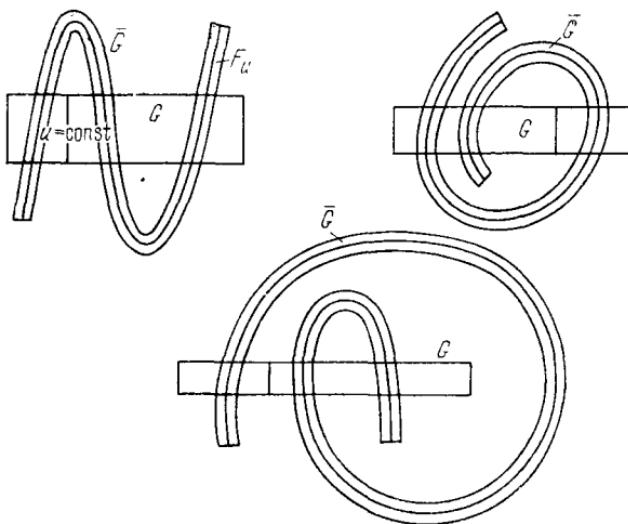


Рис. 7.60

вместе с производными возмущениями точечного отображения. Этот факт в свете существовавших в то время представлений о грубых динамических системах был неожиданным и послужил толчком к ряду работ других математиков [27].

Подкова Смейла является простейшим примером такого рода, аналогичные ей примеры точечных отображений представлены на рис. 7.60 и могут быть легко

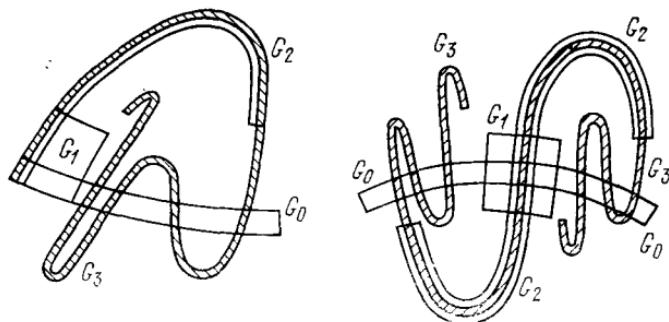


Рис. 7.61

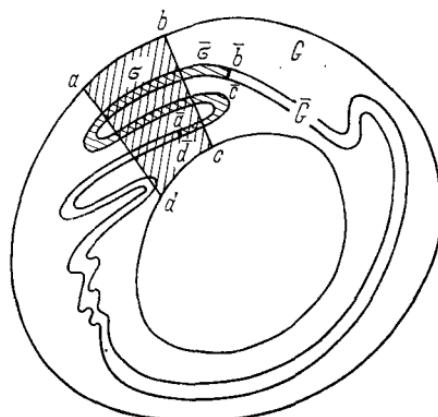


Рис. 7.62

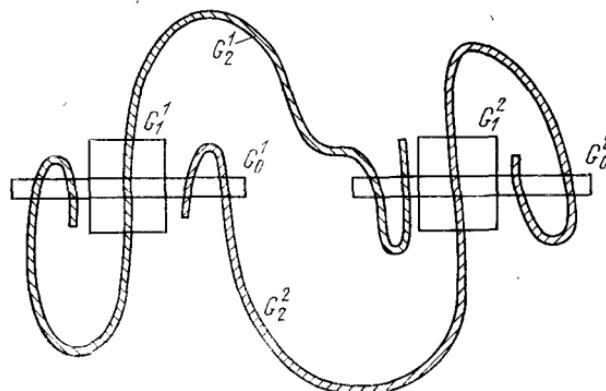


Рис. 7.63

продолжены. На рис. 7.61 — 7.63 изображены преобразования, также допускающие применение теоремы 7.3 и естественно порождаемые фазовыми траекториями дифференциальных уравнений третьего порядка. На рис. 7.61 области G_1 , G_2 и G_3 представляют последовательные преобразования области G_0 . Такого рода отображение возникает при пересечении сепаратрис седловой неподвижной точки и будет рассмотрено в следующем параграфе. На рис. 7.62 изображено отображение кольца в кольцо. При этом области G и σ преобразуются соответственно в \bar{G} и $\bar{\sigma}$. Наличие изображенного на рис. 7.62 пересечения областей σ и $\bar{\sigma}$ говорит о многозначности вспомогательного отображения, наличии бесконечного числа различных седловых кратных неподвижных точек и о сложной структуре точечного отображения. Рис. 7.63 изображает последовательные преобразования G_1^1 , G_2^1 и G_1^2 , G_2^2 областей G_1^0 и G_2^0 . Такого вида отображение порождается так называемой гомоклинической структурой, которая будет рассмотрена в следующем параграфе.

В заключение заметим, что хотя изложение ради наглядности относилось к двумерным отображениям, все сказанное легко переносится на многомерные отображения, а формулировка и доказательство основной теоремы остаются прежними [41].

§ 4. Гомоклинические структуры

Вернемся к рассмотрению многомерных динамических систем, описываемых гладкими дифференциальными уравнениями. Ранее были рассмотрены малые окрестности состояний равновесия и периодических движений. Естественным дальнейшим шагом является рассмотрение малых окрестностей нескольких фазовых траекторий, составляющих нечто целое. Одним из таких комплексов, рассмотрение которого приводит к нетривиальным результатам, является гомоклиническая структура [40].

Под гомоклинической структурой понимается некоторое множество седловых периодических движений $\Gamma_i^{p,q}$ одного и того же типа и двоякоасимптотических к ним движений γ_{ij}^k . Фазовая траектория γ_{ij}^k двоякоасимптотическая в том смысле, что при $t \rightarrow -\infty$ она асимптотически приближается к периодическому движению $\Gamma_i^{p,q}$, а при $t \rightarrow +\infty$ — к $\Gamma_j^{p,q}$. Гомоклиническая структура опре-