

§ 5. Синхронизация и стохастичность

Содержание настоящего параграфа не является традиционным для теории колебаний. В теории колебаний случайные колебания рассматривались лишь как результат случайных воздействий на колебательную систему. Возможность самогенерирования динамической системой случайных колебаний, несмотря на очевидную реальность стохастических волн и турбулентных колебаний, оставались вне рассмотрения. Отчасти это связано с тем, что основными установившимися движениями, исследуемыми в теории колебаний, были простейшие типы движений — состояния равновесия, периодические движения и в значительно меньшей мере квазипериодические. Более сложные движения представлялись не поддающимися изучению и имеющими весьма отдаленное отношение к движениям реальных систем. Нелинейное колебательное мышление, воспитанное в основном на фазовой плоскости, не допускало такой возможности и считало стохастичность уделом систем с очень большим числом степеней свободы, настолько большим, что все запутывается, становится неясным и стохастичным. Возникновение стохастичности в механике и физике также обычно связывалось с большим числом степеней свободы, с большим числом возможных колебаний или волн.

Все это не совсем так, стохастичность может возникнуть и в динамических системах с небольшим числом степеней свободы. Достаточно, чтобы фазовое пространство было более чем двумерное. Соответствующие примеры были известны давно. Казались они чем-то исключительным, плодом тонких математических измышлений. Однако это совсем не так, и стохастические движения столь же рядовое явление в системах с более чем одной степенью свободы, как и состояния равновесия и периодические движения.

Ниже будут описаны возможные общие механизмы возникновения стохастичности. Обычно в одной и той же системе в зависимости от значений ее параметров может быть, а может и не быть стохастизация. При каких-то значениях параметров ее нет и система имеет простейший установившийся режим — состояние равновесия или периодическое движение — при других значениях параметров имеют место стохастические колебания. При непрерывном переходе от первых значений параметров ко

вторым происходят сложные изменения установившегося процесса. Эти изменения могут происходить постепенно или скачком. В первом случае возникновение стохастичности естественно назвать мягким, во втором — жестким — в полной аналогии с мягким и жестким возникновением автоколебаний при потере устойчивости равновесного состояния.

Поясним, что понимается под общим механизмом возникновения стохастичности. Лучше всего это сделать на привычном примере автоколебаний.

В чем механизм автоколебаний или механизм возникновения автоколебаний? В случае мягкого возникновения он состоит в появлении неустойчивости равновесного состояния, приводящего к нарастающим колебаниям, и в одновременном ограничении этого нарастания. Как компромисс между возникшей неустойчивостью и подавлением больших колебаний и возникает устойчивый периодический режим — автоколебание. Это не единственный



Рис. 7.70

механизм, но это очень часто встречающийся общий механизм. В некоторых случаях можно указать конкретные физические причины и силовые взаимодействия, порождающие неустойчивость и ограничивающие нарастание колебаний. Особенно наглядно это обнаруживается у систем, близких к консервативным. Однако вне зависимости от природы и характера этих сил в фазовом пространстве при мягкем возникновении автоколебаний происходят изменения, показанные последовательно на рис. 7.70, соответствующие одной из описанных ранее общих бифуркаций состояния равновесия. Вот эти рисунки и описываемая ими бифуркация и составляют содержание слов — общий механизм мягкого возникновения авто-

колебаний. Подчеркнем общий механизм с точки зрения теории колебаний, изучающей динамические закономерности разной природы, отвлекаясь от конкретного их содержания.

1. Синхронизация, десинхронизация и многопериодическая стохастичность. Переходим к описанию первого возможного механизма возникновения стохастичности, который можно представлять себе одновременно как все уменьшающийся синхронизм в колебаниях отдельных парциальных степеней свободы или частей системы, как все большую хаотизацию движений парциальных частей системы. Этот процесс можно представить себе как продолжение изменений, представленных на рис. 7.70 и 7.71, состоящее в том, что возникшее периодическое движение Γ_1 теряет устойчивость и от него отделяется двумерное устойчивое интегральное многообразие Γ_2 , состоящее из двоякопериодических движений. При этом предполагается, что число

вращения Пуанкаре на родившемся торе либо иррационально, либо рационально, но с достаточно большим числителем или знаменателем. Затем, в свою очередь, это тороидальное интегральное многообразие Γ_2 теряет устойчивость и от него рождается трехмерное устойчивое тороидальное

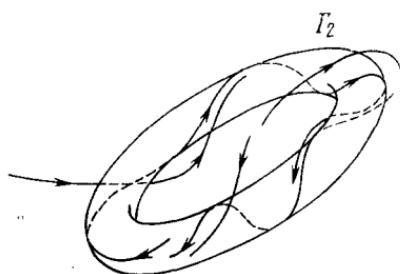


Рис. 7.71

многообразие, составленное из тройкопериодических движений и т. д., вплоть до появления устойчивого тороидального многообразия Γ_m , составленного из m -периодических движений. При m -периодическом движении закон изменения каждой из фазовых переменных может быть записан в виде

$$x = \psi(\omega_1 t + \varphi_1, \dots, \omega_m t + \varphi_m), \quad (7.84)$$

где $\psi(u_1, u_2, \dots, u_m)$ — периодическая с периодом 2π функция каждой из переменных u_1, u_2, \dots, u_m . Процесс, описываемый уравнением (7.84), не является случайным. Это либо квазипериодический процесс, либо процесс с очень большим периодом, вообще говоря, возрастающим с ростом числа m . Он обладает свойством приближительной повторяемости через достаточно большие времена $T(\varepsilon)$

(ε — точность повторения). Лишь на промежутках времени, меньших $T(\varepsilon)$, он похож на случайный процесс. При длительном наблюдении «случайность» такого процесса могла бы быть разоблачена путем обнаружения его квазипериодичности, однако этому мешает своеобразное накопление малых флуктуаций, которые неизбежны в каждой реальной системе. Время $T(\varepsilon)$ вообще много больше отдельных периодов $2\pi/\omega_1, \dots, 2\pi/\omega_m$ и с ростом числа m экспоненциально возрастает, поэтому даже очень малые в масштабе этих периодов флуктуации фаз $\Delta\varphi_1, \dots, \Delta\varphi_m$ могут привести к существенному накоплению фазовых сдвигов за время $T(\varepsilon)$, достаточных для разрушения повторяемости и стохастизации. В качестве некоторой модели описанного явления стохастизации и связи его с десинхронизацией можно взять систему большого числа слабо взаимодействующих гармонических осцилляторов, описываемую дифференциальными уравнениями вида

$$\ddot{x}_i + \omega_i^2 x_i = \mu f_i(x_1, \dots, x_n, \dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n, \mu) \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (7.85)$$

которая после введения новых переменных ρ_i и φ_i и замены

$$x_i = \rho_i \sin \varphi_i$$

приводится к виду системы с быстровращающимися фазами

$$\begin{aligned} \dot{\varphi}_i &= \omega_i + \mu \Phi_i(\varphi_1, \dots, \varphi_n, \rho_1, \dots, \rho_n, \mu), \\ \dot{\rho}_i &= \mu R_i(\varphi_1, \dots, \varphi_n, \rho_1, \dots, \rho_n, \mu). \end{aligned} \quad (7.86)$$

В такой системе возможны многопериодические движения, образующие устойчивые тороидальные многообразия. Полным синхронизмом движений всех парциальных осцилляторов естественно считать либо равновесие системы, либо ее периодическое движение. При периодическом движении все парциальные осцилляторы колеблются с общей частотой и с вполне определенными фиксированными разностями фаз. Периодическое движение можно рассматривать как тороидальное многообразие размерности единицы. С увеличением размерности тороидального многообразия в колебаниях отдельных осцилляторов все меньше и меньше согласованности и, наконец, при максимальной размерности, равной n , между ними нет никаких связей.. Вместе с уменьшением степени синхронизма все увеличивается стохастичность колебаний

системы. Размерность возникающего тороидального многообразия зависит от соотношений между частотами $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$. Наличие между частотами простых резонансных соотношений приводит, вообще говоря, к снижению размерности тороидального многообразия вплоть до возникновения синхронных колебаний. При этом под простым резонансным соотношением понимается, что при некоторых, сравнительно небольших целых числах k_1, k_2, \dots, k_n имеет место равенство

$$k_1\omega_1 + k_2\omega_2 + \dots + k_n\omega_n = 0.$$

Чем больше таких простых независимых резонансных соотношений, тем ниже размерность возможного устойчивого тороидального многообразия и больше степень синхронности колебаний парциальных осцилляторов. Наоборот, отсутствие таких простых резонансных соотношений способствует возникновению многочастотных колебаний, для которых учет флюктуаций путем добавления к правым частям уравнений (7.86) малых случайных воздействий ξ_i и η_i приводит к стохастическим дрейфам фаз $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$, пропорциональным дисперсиям случайных воздействий ξ_i и растущим с временем t как \sqrt{t} .

Описанный механизм «стохастичности» по существу совпадает с известным общим описанием Л. Д. Ландау возникновения турбулентности течения жидкости через появление большого числа неустойчивых волновых мод [28]. Если к этому добавить, что становящиеся неустойчивыми моды колебаний низкочастотные, а механизмы их ограничения вызваны диссилиацией энергии на высокочастотных модах, то придем к принятой сейчас картине слабой турбулентности. В применении к модели, описываемой уравнениями (7.85), это означает, что состояние равновесия $x_1 = x_2 = \dots = x_m = 0$ усеченной системы

$$\ddot{x}_i + \omega_i^2 x_i = \mu f_i (x_1, \dots, x_m, 0, \dots, 0, \dot{x}_1, \dots, \dot{x}_m, 0, \dots, 0, \mu) \quad (i = 1, 2, \dots, m),$$

соответствующей низкочастотной части спектра возможных частот колебаний (предполагается, что уравнения (7.85) записаны в порядке возрастания частот, так что $\omega_1 < \omega_2 < \dots < \omega_n$), многочастотно неустойчиво и, наоборот, усеченная система

$$\ddot{x}_i + \omega_i^2 x_i = \mu f_i (0, \dots, 0, x_{m+1}, \dots, x_n, 0, \dots, 0, \dots, x_{m+1}, \dots, x_n, \mu) \quad (i = m + 1, \dots, n),$$

соответствующая высоким частотам, диссипативна и имеет глобально устойчивое состояние равновесия.

В процессе взаимодействия неустойчивой и диссипативной частей системы происходит перенос энергии от низкочастотных мод колебаний к высокочастотным и устанавливается некоторый спектр колебаний — некоторое распределение амплитуд колебаний парциальных осцилляторов с частотами, близкими к $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$. Это распределение амплитуд может быть найдено, если известны усредненные взаимодействия между парциальными осцилляторами (модами колебаний) системы.

Выше были изложены общие соображения «теории квазипериодической стохастичности». Существенную роль при этом играют малые флуктуации и своеобразный механизм их накопления *), своеобразный «усилитель стохастичности». В описанном плане явление стохастизации было противоположным синхронизации. Возникновение синхронизмов приводит к подавлению стохастичности, напротив, развитие стохастичности означает все меньшую степень синхронности колебаний отдельных частей системы.

Существующая к настоящему времени теория позволяет уточнить эти общие соображения применительно к системам с так называемыми быстровращающимися фазами [23]. В предположении уже имеющейся хаотичности фаз, исследование возникающих стохастических распределений колебаний возможно с помощью так называемого кинетического уравнения [26, 49]. Соответствующие исследования привели к созданию физической теории так называемой слабой турбулентности [26].

2. Притягивающие гомоклинические структуры и стохастические колебания. Перейдем теперь к описанию возможных общих механизмов самогенерирования стохастичности динамической системой. Они связаны с появлением в фазовом пространстве динамической системы гомоклинических структур, которое, так же как и возникновение автоколебаний и многопериодических колебаний, вызвано возникновением в системе неустойчивости [24, 25, 42].

Как уже говорилось, под гомоклинической структурой понимается содержащая циклы совокупность нескольких седловых периодических движений и двоякоасимптотических к ним движений. Гомоклиническая структура в своей

*) Подобное накопление имеет место также в некоторых системах автоматического регулирования [32].

окрестности содержит очень сложную совокупность движений, которая, как было показано, допускает полное описание с помощью последовательностей символов.

Седловые движения гомоклинической структуры могут быть сжимающего или расширяющего типов в зависимости от того, происходит ли уменьшение или увеличение фазового объема в их окрестности. Седловое периодическое движение сжимающее, если сумма его характеристических показателей отрицательна, и расширяющее, если эта сумма положительна.

Движения гамильтоновых систем принадлежат к гравитирующему случаю, так как для них, согласно теореме Лиувилля, имеет место сохранение фазового объема.

Назовем гомоклиническую структуру поглощающей или устойчивой, если из некоторой ее окрестности фазовые траектории при возрастании времени не могут выходить и все близкие к ней фазовые траектории в нее входят.

Приведем примеры динамических систем с притягивающими гомоклиническими структурами.

Возьмем неавтономную систему второго порядка вида

$$\begin{aligned}\dot{q} &= \frac{\partial H}{\partial p} + \mu H \frac{\partial H}{\partial q} + \nu f(q, p, t), \\ \dot{p} &= -\frac{\partial H}{\partial q} + \mu H \frac{\partial H}{\partial p} + \nu g(q, p, t),\end{aligned}\tag{7.87}$$

где μ и ν — малые параметры, $H(p, q)$ — функция Гамильтона невозмущенной системы, $f(q, p, t)$ и $g(q, p, t)$ — периодические по времени t функции времени t . При $\mu = \nu = 0$ эта система допускает интеграл энергии

$$H(q, p) = h\tag{7.88}$$

и имеет очень простую структуру разбиения фазовой плоскости: особые точки — только центры и седла, все

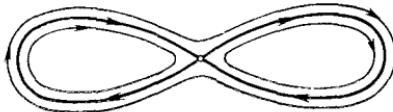


Рис. 7.72

траектории, кроме сепаратрис седел, либо замкнутые, либо уходящие в бесконечность.

Допустим, что значению $h = 0$ соответствуют сепаратрисы седла, имеющие вид восьмерки, изображенной на рис. 7.72; тогда близкие к этой восьмерке фазовые траек-

тории ведут себя, как показано на том же рис. 7.72. При $v = 0$ и $\mu < 0$ сепаратрисные кривые останутся фазовыми траекториями, так как на них $H = 0$, а близкие к ним траектории будут асимптотически к ним приближаться. Справедливость этого утверждения непосредственно следует из того, что в силу уравнений (7.87) при $v = 0$ и $\mu < 0$

$$\frac{d}{dt} (H^2) = \frac{1}{2} \lambda H^2 \left(\left(\frac{\partial H}{\partial q} \right)^2 + \left(\frac{\partial H}{\partial p} \right)^2 \right) < 0.$$

Для изучения движений системы (7.87) при μ и v , отличных от нуля, прибегнем к рассмотрению порождаемого ее

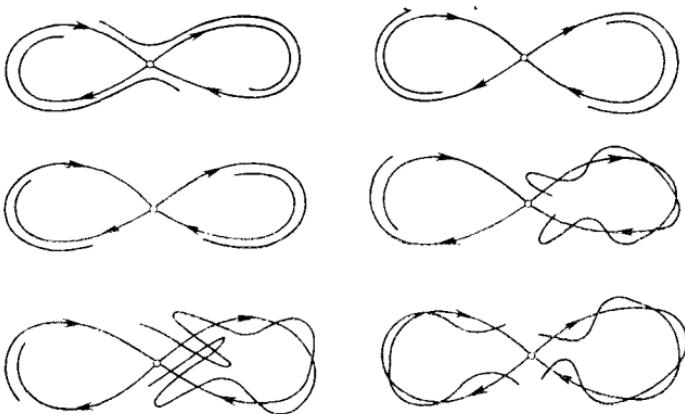


Рис. 7.73

фазовыми траекториями точечного отображения $T_{2\pi}$ плоскости $t = 0$ в плоскость $t = 2\pi$. При $v = 0$ фазовые траектории системы (7.87) являются инвариантными кривыми точечного отображения $T_{2\pi}$. В частности, седловой особой точке соответствует седловая неподвижная точка отображения $T_{2\pi}$. Ее сепаратрисные кривые, образующие восьмерку, являются инвариантными кривыми этой седловой неподвижной точки.

При $v = 0$ инвариантные кривые седловой точки идут из седла в седло. При $v \neq 0$ в отношении их поведения возможен один из шести представленных на рис. 7.73 случаев. Нетрудно видеть, что каждый из изображенных на рис. 7.73 вариантов поведения инвариантных кривых можно реализовать с помощью подбора соответствующих функций f и g и что при этом можно предполагать сколь

угодную малость добавков $v f$ и $v g$. При пересечении инвариантных кривых возникает гомоклиническая структура, состоящая из седлового периодического движения, отвечающего седловой неподвижной точке, и нескольких двоякоасимптотических к нему движений, соответствующих точкам пересечения инвариантных кривых. При достаточно малых добавках $v f$ и $v g$ эта гомоклиническая структура поглощающая, поскольку при $v = 0$ все фазовые траектории асимптотически приближаются к образуемой инвариантными кривыми восьмерке (рис. 7.74). Напомним, что μ предполагается отрицательным. Окрестность, в которую все близкие траектории входят, на

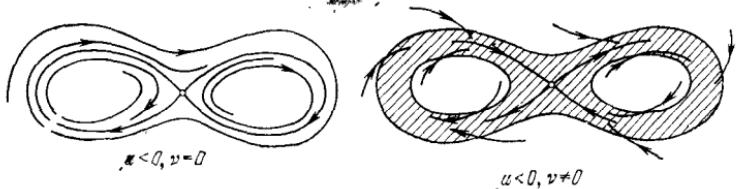


Рис. 7.74

рис. 7.74 отмечена штриховкой. Структура этой окрестности очень сложна. В малой окрестности гомоклинической структуры все движения седловые и имеют полное описание с помощью последовательностей символов. Однако малая окрестность гомоклинической структуры является лишь частью окрестности, заштрихованной на рис. 7.74.

Полное описание структуры этой более широкой поглощающей окрестности пока неизвестно. Результаты ее численного исследования приведены в работе [11] и более кратко описаны в книге [41]. Сейчас же приведем примеры гомоклинических притягивающих структур, для которых удается указать приемлемое статистическое описание движений в этой окрестности. Это описание может служить прототипом для приводимых выше примеров и для более сложных случаев. Примеры, о которых пойдет речь, строятся с помощью точечных отображений T_i вида

$$\bar{u}_i = \lambda u_i, \quad \bar{v}_i = v^{-1} v_i \quad (0 < \lambda < v < 1) \quad (7.89)$$

и отображений L_{ij}^{sk} вида

$$\bar{u}_j = \varphi(v_i), \quad \bar{v}_j = (v^m - \lambda^m) \psi(v_i) + \lambda \chi(v_i) u_i, \quad (7.90)$$

где φ , ψ и χ — гладкие, а φ и χ — еще и монотонные вместе с первыми производными функции своих аргументов, удовлетворяющие для $v \leq v_i \leq 1$ условиям

$$\begin{aligned} |\varphi(v_i)| &\leq 1, & |\psi(v_i)| &\leq 1, & |\chi(v_i)| &\leq 1, \\ \psi(v) &= v\psi(1), & \psi'(v) &= \psi'(1), & & (7.94) \\ \varphi(1) &= \lambda\varphi(v) = \lambda, & \varphi'(v) &= \lambda v\varphi'(1), & & \\ \chi(v) &= v\lambda\chi(1), & \chi'(v) &= \lambda\chi(1). & & \end{aligned}$$

Отображение T_i область G_i , определяемую неравенствами

$$|u_i| \leq 1, \quad |v_i| \leq v, \quad |u_i|^{-\ln v} |v_i|^{-\ln \lambda} \leq v^{-m \ln \lambda}, \quad (7.92)$$

где m — целое положительное число, преобразует в область \bar{G}_i , для которой

$$|u_i| \leq \lambda, \quad |v_i| \leq 1, \quad |u_i|^{-\ln v} |v_i|^{-\ln \lambda} \leq v^{-m \ln \lambda}. \quad (7.93)$$

Области G_i и \bar{G}_i изображены на рис. 7.75, где они заштрихованы в разных направлениях: G_i — горизонтальными,

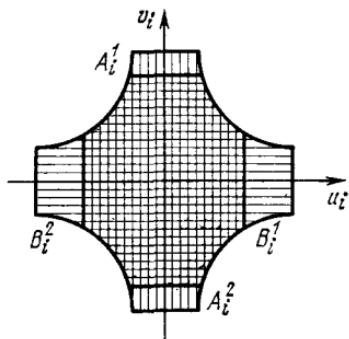


Рис. 7.75

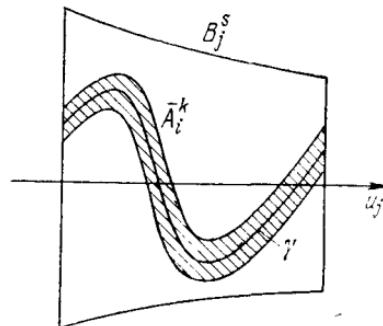


Рис. 7.76

а \bar{G}_i — вертикальными линиями. Точка O ($u_i = v_i = 0$) — седловая неподвижная точка. Прямые $u_i = 0$ и $v_i = 0$ преобразуются в себя.

Введем, как показано на рис. 7.75, односвязные области A_i^1 , A_i^2 , B_i^1 и B_i^2 . Каждая точка $(u_i, v_i) \in B_i^k$ ($k = 1, 2$, $v_i \neq 0$) после некоторого числа преобразований T_i переходит в некоторую точку либо области A_i^1 , если $v_i > 0$, либо области A_i^2 , если $v_i < 0$. Число необходимых для

этого преобразований T_i может быть любым, не меньшим m . При уменьшении $|v_i|$ это число неограниченно возрастает.

Отображение L_{ij}^{st} преобразует область A_i^k в область B_j^s . При этом образ \bar{A}_i^k области A_i^k лежит внутри области B_j^s , причем образ отрезка $u_i = 0$ в области A_i^k преобразуется в кривую γ , пересекающую ось $v_i = 0$ (рис. 7.76). Искомое отображение T строится теперь следующим образом:

$$T(u, v) = \begin{cases} T_i(u, v), & \text{если } (u, v) \in G_i, \\ L_{i,j,(i,k)}^{k,s(i,k)}(u, v), & \text{если } (u, v) \in A_i^k, \end{cases} \quad (7.94)$$

где j (i, k) и s (i, k) — некоторые целочисленные функции своих аргументов и при этом $1 \leq i \leq n$, $k = 1, 2$; $1 \leq j \leq n$, $s = 1, 2$. Это отображение T определено в области G :

$$G = \bigcup_{i=1}^n (G_i \cup \bar{G}_i) \quad (7.95)$$

и преобразует ее в себя. В силу гладкости функций φ , ψ и χ и условий (7.91) T — гладкое отображение.

Пусть $n = 1$, $j(1, 1) = 1$, $j(1, 2) = 1$, $s(1, 1) = 1$ и $s(1, 2) = 2$. Соответствующее этому случаю отображение схематически изображено на рис. 7.77. Оно может быть

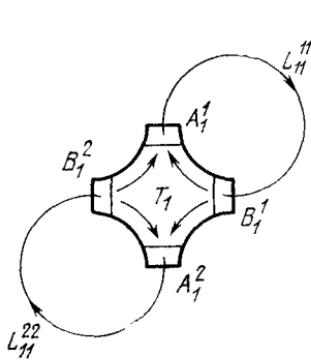


Рис. 7.77

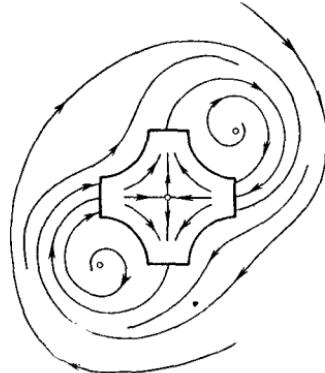


Рис. 7.78

гладко расширено на всю плоскость, как, опять же схематически, показано на рис. 7.78. При таком расширении все точки плоскости после того или иного числа преобразо-

ваний T переходят внутрь области G и там остаются. В области G отображение T имеет седловую неподвижную точку, инвариантные кривые которой пересекаются, образуя гомоклиническую структуру.

При $n = 2$ приведены два случая. Первый, когда выполняются равенства

$$j(1, 1) = 2, \quad j(1, 2) = 2, \quad j(2, 1) = 1, \quad j(2, 2) = 1,$$

$$s(1, 1) = 2, \quad s(1, 2) = 1, \quad s(2, 1) = 2, \quad s(2, 2) = 1,$$

изображен на рис. 7.79 и второй, для которого

$$j(1, 1) = 2, \quad j(1, 2) = 1, \quad j(2, 1) = 2, \quad j(2, 2) = 1,$$

$$s(1, 1) = 2, \quad s(1, 2) = 2, \quad s(2, 1) = 1, \quad s(2, 2) = 1,$$

показан на рис. 7.80.

Эти случаи соответствуют притягивающим гомоклиническим структурам, состоящим из двух седловых неподвижных точек с различным образом пересекающимися

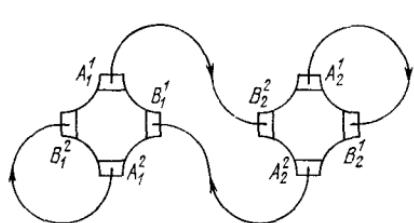


Рис. 7.79

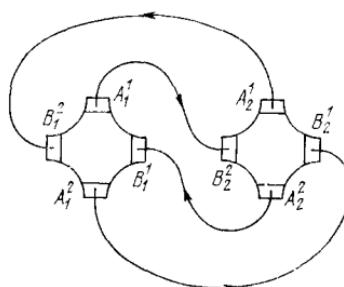


Рис. 7.80

инвариантными кривыми. Соответствующие им отображения T , так же как и в предыдущем случае, могут быть гладко распространены на всю плоскость.

Некоторые другие возможные виды отображения T представлены на рис. 7.81, a, b .

Пусть (u_0, v_0) — произвольная точка области G . Рассмотрим ее последовательные отображения

$$(u_0, v_0), (u_1, v_1), (u_2, v_2), \dots \quad (7.96)$$

Согласно (7.94), последовательность отображений T представляет собою некоторую последовательность из отображений T_i и L_{ij}^{ks} . При этом после каждого из отображений L_{ij}^{ks} следует не менее чем m отображений T_j .

Пусть ради простоты m — четное число, равное $2m'$. Тогда эта последовательность отображений может быть представлена как последовательность, составленная из

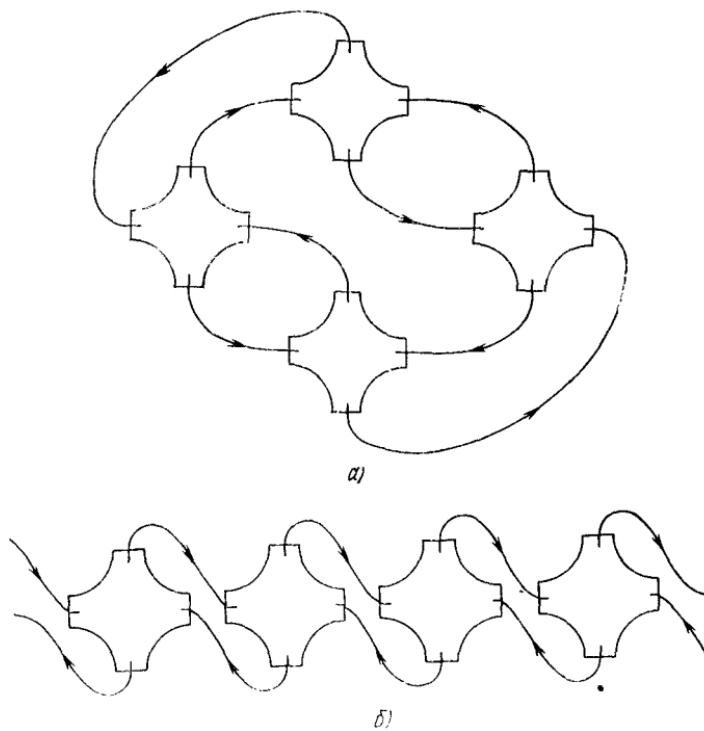


Рис. 7.81

отображений $T_i^{m'} L_{ij}^{ks} T_j^{m'}$ и T_l . Отображения T_l седловые, а отображения $T_i^{m'} L_{ij}^{ks} T_j^{m'}$ седловые при выполнении условия

$$2v^m K < 1, \quad (7.97)$$

где K — константа Липшица для вспомогательного отображения L_{ij}^{ks} . Таким образом, если все отображения L_{ij}^{ks} имеют константу Липшица, меньшую чем $\frac{1}{2} v^{-m}$, то все траектории отображения T будут седловыми.

Условие (7.97) можно выполнить, если в отображениях L_{ij}^{ks} в качестве функции $\psi(v)$ взять кусочно-гладкую

функцию такую, что график функции $\psi(\xi)$, где $\xi = \frac{1-v}{1-v}$, имеет вид, изображенный на рис. 7.82.

Отсутствие у отображения T устойчивых по Ляпунову траекторий, их седловой характер, приводят к тому, что движение фазовых точек носит блуждающий стохастический характер. Под этим, в частности, имеется в виду стохастический характер блуждания точек последовательности (7.96) по областям A_i^k и B_j^s или, что же, следования друг за другом отображений T_i и L_{ij}^{ks} .

Для гладкого отображения T условие (7.97) не выполняется. В связи с этим у отображения T возможны устойчивые устанавлившиеся движения. В некоторых случаях это так и есть, но, по-видимому, возможны и случаи, когда таких движений нет. Во всяком случае, если они и есть, то их области притяжения необычайно малы и их не удается обнаружить путем численного счета на ЭВМ.

Как уже говорилось, в некоторых случаях точки последовательности (7.96) стохастически блуждают по областям A_i^k и B_j^s . Наглядно эти блуждания можно геометрически описать следующим образом. Примем, что число m достаточно велико, а числа λ и v не слишком близки к единице.

Возьмем любую из областей B_j^s , преобразованиями T_j она превращается в тонкую полоску. По мере удлинения этой полоски и попадания ее концов в области A_j^1 и A_j^2 эти концы «отрезаются» и попадают в какие-то области $B_{j_1}^{k_1}$ и $B_{j_2}^{k_2}$. Попав в эти области, каждый из этих кусков снова вытягивается одним из отображений T_i в тонкую полоску, которая в свою очередь нарезается с концов на куски, поступающие в какие-то области B_j^s и т. д. Схематическое сказанное представлено на рис. 7.83. Блуждание фазовой точки, порождаемое описанным процессом растяжения, нарезания и распределения «направо-налево», весьма напоминает движение горошины по доске Гальтона, приводимое в учебниках как классический пример стохастического процесса,

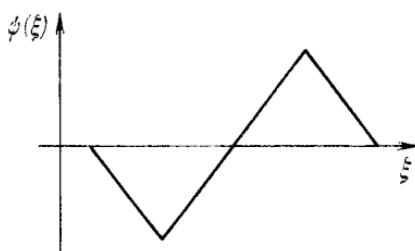


Рис. 7.82

3. Численные эксперименты на ЭВМ по изучению притягивающих гомоклинических структур. Статистические закономерности описанных выше блужданий могут быть получены путем численного эксперимента. При этом выяснилось, что с достаточным приближением эти блуждания могут быть описаны марковским процессом. Приведем

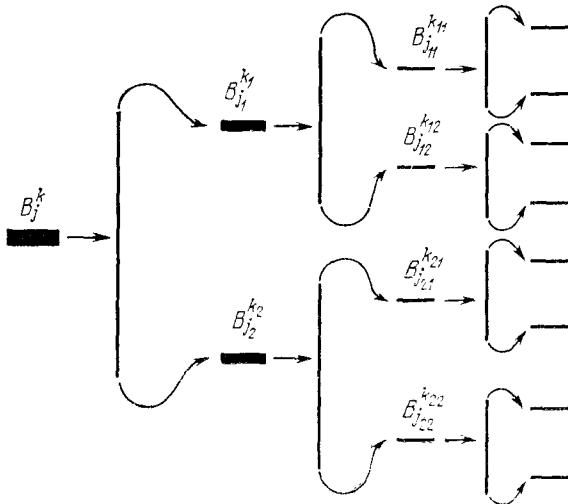


Рис. 7.83

некоторые данные численного эксперимента на ЭВМ с притягивающей гомоклинической структурой, изображенной на рис. 7.77, с $m = 3$, $\lambda = 0,8$ и $v = 0,9$. Блуждание точки при преобразованиях T

записывалось в виде последовательности нулей и единиц. При этом 0 и 1 соответствовали переходы, изображенные на рис. 7.84. Были получены четыре серии по 3240 нулей и единиц в каждой. Ниже в таблице приведены частоты каждого из символов 0 и 1 по каждой из серий. Затем частоты следования символов 0 и 1 после 0 и 1 и, наконец, частоты следования символов 0 и 1 после всевозможных попарных сочетаний 00, 01, 10 и 11. Из этой таблицы видно, что приемлемым является уже описание с помощью марковской цепи с двумя состоя-

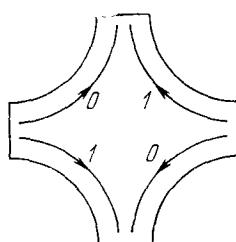


Рис. 7.84

волов 0 и 1 после всевозможных попарных сочетаний 00, 01, 10 и 11. Из этой таблицы видно, что приемлемым является уже описание с помощью марковской цепи с двумя состоя-

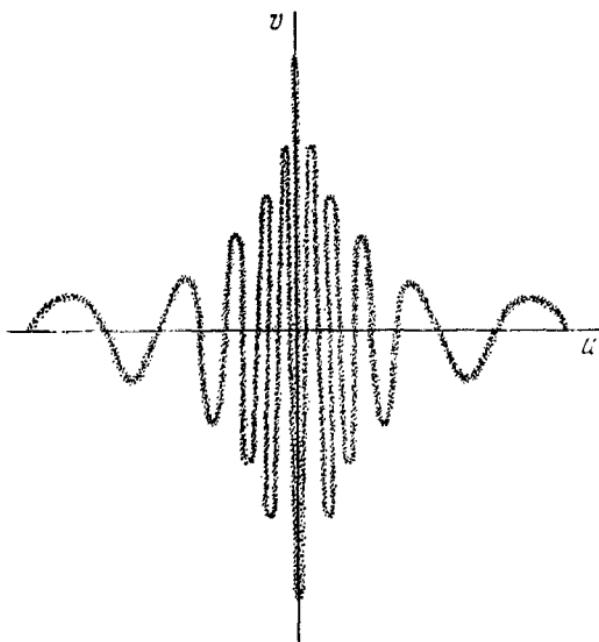


Рис. 7.85

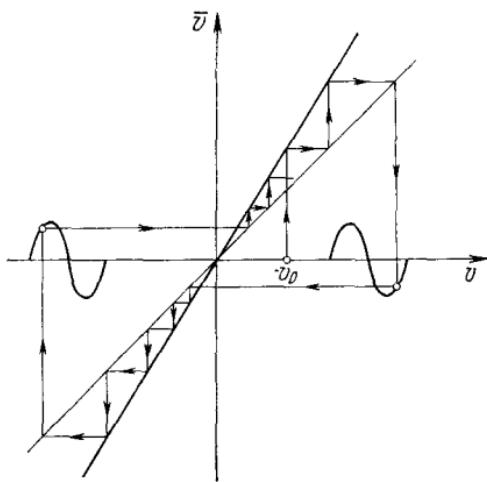


Рис. 7.86

ниями; 0 и 1. Исследование частот следования символов было продолжено и оставило этот вывод без изменений.

На рис. 7.85 изображена область точек, образованная последовательными преобразованиями отображения T . Как видно из этого рисунка и уравнений точечного отображения T , оно аппроксимируется отображением прямой

Таблица частот следования символов

Символы переходов	Серия испытаний			
	1	2	3	4
0	0,512	0,532	0,524	0,520
1	0,488	0,468	0,476	0,480
$0 \rightarrow 0$	0,530	0,564	0,556	0,560
$0 \rightarrow 1$	0,470	0,435	0,444	0,439
$1 \rightarrow 0$	0,493	0,495	0,489	0,477
$1 \rightarrow 1$	0,507	0,505	0,512	0,523
$00 \rightarrow 0$	0,526	0,556	0,544	0,538
$00 \rightarrow 1$	0,474	0,444	0,456	0,462
$01 \rightarrow 0$	0,487	0,499	0,489	0,492
$01 \rightarrow 1$	0,513	0,501	0,511	0,508
$10 \rightarrow 0$	0,534	0,575	0,572	0,591
$10 \rightarrow 1$	0,466	0,425	0,428	0,409
$11 \rightarrow 0$	0,500	0,493	0,488	0,462
$11 \rightarrow 1$	0,500	0,507	0,512	0,538

в прямую, причем тем лучше, чем больше m и меньше v^m . Это точечное отображение прямой в прямую вида

$$\bar{v} = \begin{cases} v^{-1}v & \text{при } |v| \leq v, \\ v^m \psi(v) & \text{при } v < v \leq 1, \\ -v^m \psi^m(-v) & \text{при } -1 \leq v \leq -v. \end{cases} \quad (7.98)$$

При

$$\psi(v) = \sin 2\pi \frac{v - v}{1 - v}$$

соответствующая ему диаграмма изображена на рис. 7.86. Точечное отображение (7.98) численно исследовалось. Основная цель исследования состояла в выяснении его устанавлившихся движений и, в частности, их числа. Применяемый способ исследования состоит в следующем.

Пусть в ограниченной области G задано некоторое точечное отображение T . Разобьем область G на области $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$. Пусть $\bar{\sigma}_1, \bar{\sigma}_2, \dots, \bar{\sigma}_n$ — преобразования областей $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$ и P — матрица, элемент p_{ij} которой равен нулю, если пересечение областей $\bar{\sigma}_i$ и σ_j пусто, и равен единице в противном случае. Матрице P можно сопоставить граф с n вершинами M_1, M_2, \dots, M_n и направленными ребрами, идущими из вершины M_i в M_j , если $p_{ij} = 1$.

Две вершины M_s и M_k назовем сообщающимися, если из вершины M_k , двигаясь по ребрам графа в указываемом на них направлении, можно попасть в вершину M_s , а из вершины M_s — в вершину M_k .

Назовем концевым классом множество вершин графа, каждые две вершины которого сообщающиеся и из вершин которого нельзя попасть ни в одну вершину, не принадлежащую этому множеству вершин.

Справедливы следующие утверждения. Число различных установившихся движений не менее числа различных концевых классов графа матрицы P . Это утверждение следует из того, что бласти G_1, \dots, G_m , составленные из областей σ_i , отвечающих различным концевым классам, отображением T преобразуются в себя и вся область G после достаточного числа преобразований T — в объединение областей G_1, G_2, \dots, G_m , т. е.

$$TG_i \subset G_i \quad (i = 1, 2, \dots, m) \quad (7.99)$$

и существует такое целое число p , что

$$T^p G \subset \bigcup_{j=1}^m G_j. \quad (7.100)$$

Далее для любых двух различных установившихся движений можно указать настолько малое $d > 0$, что при диаметре областей σ_i , не большем d , они будут принадлежать различным областям G_j . Это утверждение следует из того, что из принадлежности двух различных установившихся движений одному и тому же множеству G_j следует, что расстояние между ними менее d .

На основе изложенного проводилось численное исследование точечного отображения (7.98) при значениях v , равных 0,7, 0,8 и 0,9 и m , равных 6, 10, 16 и 24. Отрезок $[-1, +1]$, на котором определено точечное отображение (7.98), разбивался на $0,5 \cdot 10^3 - 2 \cdot 10^4$ равных частей. Во всех

перечисленных случаях было обнаружено, что все вершины графа образуют единственный концевой класс сообщающихся состояний.

Интересно сопоставить результаты этого численного эксперимента с аналогичным исследованием точечного отображения

$$x = \lambda \left(1 - 4 \left(x - \frac{1}{2} \right)^2 \right)$$

отрезка $[0, \lambda]$ в себя (рис. 7.87).

При $\lambda = 1$ было обнаружено, что все отрезки составляют единственный класс сообщающихся состояний. При $\lambda = 0,95$ остался один концевой класс сообщающихся состояний,

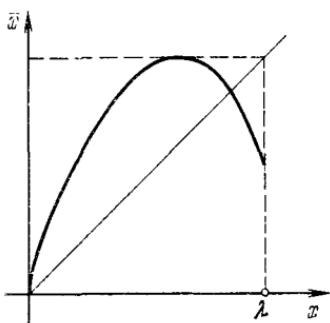


Рис. 7.87

однако в него вошла лишь некоторая небольшая часть отрезков, на которые был разбит отрезок $[0; 0,95]$. При $\lambda = 0,9$ появилось уже два концевых класса: один, состоящий из двух отрезков, и второй — из очень большого числа отрезков. Все остальные отрезки вошли в области притяжения либо первого, либо второго концевого класса. При $\lambda = 0,8$ было обнаружено два концевых класса, каждый из которых включал небольшие числа

отрезков, а все остальные отрезки попали в области их притяжения.

Отметим, что результат численного исследования при $\lambda = 1$ согласуется с проведенным ранее аналитическим исследованием этого точечного отображения.

Описанный выше способ численного изучения применялся и к двумерному точечному отображению T в случаях, изображенных на рис. 7.77, 7.79 и 7.80. При этом были обнаружены случаи с одним-единственным концевым классом, включающим очень большое число областей σ_i .

Заканчивая описание численных экспериментов притягивающих гомоклинических структур, рассмотрим еще движения, принадлежащие областям G_1, G_2, \dots, G_m , соответствующим различным концевым классам сообщающихся состояний.

Пусть $G_1 = \bigcup_{i=1}^{n_1} \sigma_i$ и пусть P_1 — матрица пересечений

областей $\sigma_1, \dots, \sigma_{n_i}$ и их преобразований $\bar{\sigma}_1, \dots, \bar{\sigma}_{n_i}$. Напомним, что матрица P_1 состоит из элементов p_{ij} , равных нулю или единице в зависимости от того, пусто или непусто пересечение областей $\bar{\sigma}_i$ и σ_j .

Пусть x_0 — произвольная точка области G_1 и

$$\dots, x_{-2}, x_{-1}, x_0, x_1, x_2, \dots \quad (7.101)$$

— проходящая через нее фазовая траектория, т. е. последовательные ее преобразования с помощью отображения T .

Вид матрицы P_1 накладывает определенные ограничения на точечную последовательность (7.101). Именно, если точка $x_s \in \sigma_i$, то точка x_{s+1} может принадлежать области σ_j , лишь если $p_{ij} = 1$.

Выполнение этих условий обязательно для фазовой траектории области G_1 . Вместе с тем выполнение их еще не означает, что такая фазовая траектория на самом деле существует. Для того чтобы такие фазовые траектории существовали, необходимо выполнение каких-то дополнительных условий. Метод вспомогательных отображений позволяет указать некоторые такие достаточные условия.

Пусть отображение $T(u_j, v_j) = T(u_i, v_i)$ допускает вспомогательное отображение \tilde{T} , преобразующее область $\tilde{\sigma}_i$ ($\|u_i\| \leq \delta_i, \|v_i\| \leq \varepsilon_i$) в область $\tilde{\sigma}_j$ ($\|u_j\| \leq \delta_j, \|v_j\| \leq \varepsilon_j$). Пусть это требование выполняется для какого-то числа пар пересекающихся областей, и пусть \tilde{P}_1 — матрица P_1 , у которой оставлены равными единице только те элементы p_{ij} , для которых соответствующая пара пересекающихся областей $\bar{\sigma}_i$ и σ_j удовлетворяет этому предположению. Тогда для любой последовательности областей

$$\dots, \sigma_{i_{-1}} \sigma_{i_0}, \sigma_{i_1}, \sigma_{i_2}, \dots \quad (7.102)$$

такой, что элементы $p_{i_s i_{s+1}}$ матрицы \tilde{P}_1 равны единице для всех s , существует фазовая траектория (7.101) такая, что $x_k \in \sigma_{i_k}$ для всех k . Это утверждение допускает применение к рассматриваемым ранее примерам.

Вернемся к общему рассмотрению притягивающих гомоклинических структур и порождаемых ими стохастических движений.

Приводимые выше примеры притягивающих структур были получены либо путем малых возмущений консервативных систем, либо путем специальным образом строящихся точечных отображений,

Очень хорошим примером конкретной системы, в которой реализуется притягивающая гомоклиническая структура, представляющаяся в виде одной из схем рис. 7.79, являются получившие широкую известность уравнения Лоренца

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -\sigma x + \sigma y, \\ \dot{y} &= rx - y - xz, \\ \dot{z} &= -bz + xy,\end{aligned}$$

возникшие как весьма упрощенное трехмодовое описание конвективного течения жидкости между двумя горизонтальными разно нагретыми плоскостями. К частному случаю уравнений Лоренца с $b = 1$ можно прийти, рассматривая циркуляцию жидкости в круговой вертикально поставленной трубке, подогреваемой снизу.

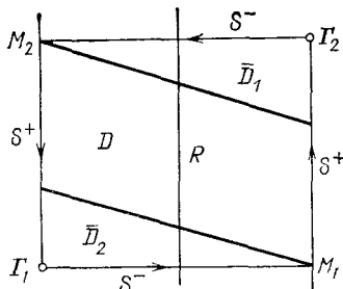


Рис. 7.88

проходят инвариантные кривые S^+ и S^- (рис. 7.88).

Важнейшей особенностью этого точечного отображения на секущей является наличие линии разрыва R , по разные стороны которой определены гладкие точечные отображения T_1 и T_2 . Точечное отображение T_1 преобразует линию R в точку M_1 , а точечное отображение T_2 — ее же в точку M_2 , так что вся четырехугольная область D , ограниченная кривыми S^+ и S^- , преобразуется в две клиновидные области \bar{D}_1 и \bar{D}_2 . Области \bar{D}_1 и \bar{D}_2 лежат внутри области D . Затем при повторном преобразовании каждая из них преобразуется в две области \bar{D}_{11} , \bar{D}_{12} и \bar{D}_{21} , \bar{D}_{22} соответственно и т. д. При каждом преобразовании какая-то часть области, лежащей вне области D , преобразуется внутрь нее. Таким образом, перед нами притягивающая гомоклиническая структура, предельное множество которой лежит внутри области D и при этом отображение внутри области D седловое.

Интересующая нас гомоклиническая структура возникает, например, при $\sigma = 10$, $b = \frac{8}{3}$, $r = 24,06$. Рассматривать ее удобно с помощью секущей плоскости $z = r - 1$. При этих значениях параметров точечное отображение на секущей имеет две седловые неподвижные точки Γ_1 и Γ_2 , через которые

Такое притягивающее и одновременно локально неустойчивое инвариантное множество получило наименование странного аттрактора — странного притягивающего множества.

Целью дальнейшего является обнаружение естественности возникновения притягивающих гомоклинических структур у многомерных динамических систем, обычности их как установившихся движений. Этой цели может служить рассмотрение малых неавтономных возмущений двумерной динамической системы. Вопрос имеет самостоятельный интерес, поскольку речь идет о простейшей модели взаимодействия динамических систем.

4. Неавтономные системы, близкие к автономным. Как известно, качественная картина разбиения фазовой плоскости грубой автономной системы второго порядка

$$\begin{aligned} \dot{x} &= X(x, y, \lambda), \\ \dot{y} &= Y(x, y, \lambda) \end{aligned} \quad (7.103)$$

полностью определяется ее состояниями равновесия, периодическими движениями и сепаратрисными кривыми седловых состояний равновесия. Переходим от автономной системы (7.103) к возмущенной неавтономной системе

$$\begin{aligned} \dot{x} &= X(x, y, \lambda) + \mu f(x, y, t, \mu), \\ \dot{y} &= Y(x, y, \lambda) + \mu g(x, y, t, \mu). \end{aligned} \quad (7.104)$$

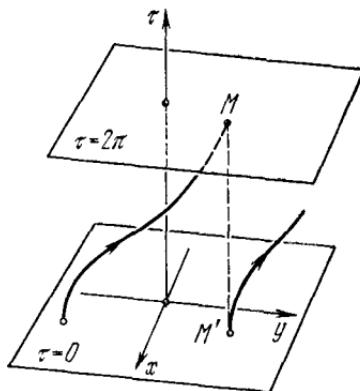


Рис. 7.89

Ее фазовое пространство трехмерно и состоит из переменных x , y и t . В силу предполагаемой периодичности по t с периодом 2π это трехмерное фазовое пространство по переменной t представляет собой слой ширины 2π с отождествленными точками граничных плоскостей. В изображенном на рис. 7.89 фазовом пространстве фазовыми переменными являются x , y и $\tau = t - [t/(2\pi)]$, где $[t/(2\pi)]$ означает целую часть числа $t/(2\pi)$. Там же изображена одна из фазовых кривых; при этом ее точки M и M' отождествлены. При $\mu = 0$ уравнения (7.104) становятся автономными. Ясно, что и их решения также можно изображать в пространстве переменных x , y , τ . При этом состояния равновесия и периодические движения изобразятся

соответственно отрезком O и цилиндрической двумерной поверхностью с отождествленными точками, т. е. замкнутой «кривой» O и тороидальной двумерной поверхностью Γ , показанными на рис. 7.90, *a*. На рис. 7.90, *b* показано изображение в пространстве переменных x , y и t седлового периодического движения и его сепаратрисных кривых, которые теперь изображаются двумерными поверхностями S_2^- и S_2^+ .

Поведение остальных кривых, изображающих решения автономного уравнения (7.103), определяется перечисленными элементами O , Γ , S^+ и S^- . Именно, всякая кривая

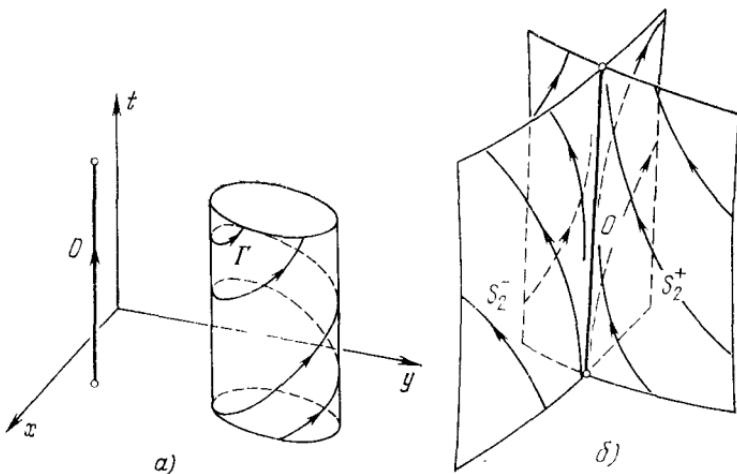


Рис. 7.90

при изменении t от $-\infty$ до $+\infty$ отходит от одного из неустойчивых элементов O или Γ и подходит к одному из устойчивых элементов O или Γ . Это позволяет все возможные движения изобразить схемой, где верхние кружочки означают неустойчивые состояния равновесия и периодические движения, нижние — устойчивые. Каждый переход от верхнего кружочка к нижнему изображает соответствующие движения. Разветвления в этих переходах соответствуют разделению потоков кривых какими-то сепаратрисными поверхностями седловых состояний равновесия. Так, структуре разбиения, изображенной на рис. 7.91, соответствует схема рис. 7.92.

До сих пор мы равнялись нулю и соответствующая автономная система была грубой. Пусть теперь μ немного изме-

нилось. Что при этом произойдет со всей описанной картиной поведения фазовых траекторий? Оказывается, ничего [15]. Точнее, отрезки прямых, изображающие состояния равновесия, немного смещаются и изогнутся, торы, изображающие периодические движения, превратятся в

близкие к ним интегральные тороидальные многообразия. Асимптотическое поведение всех остальных

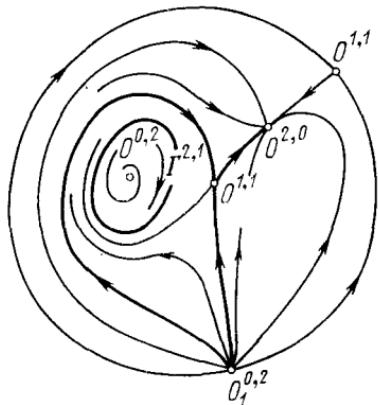


Рис. 7.91

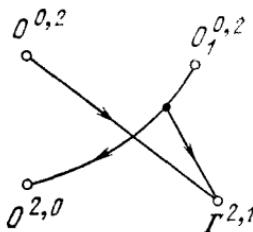


Рис. 7.92

фазовых траекторий, изображаемое соответствующей схемой (как на рис. 7.92), останется прежним. Вместе с тем поведение фазовых траекторий на интегральной поверхности, вообще говоря, претерпит существенные изменения; при этом изменится и характер приближения фазовых траекторий к устойчивым интегральным поверхностям. Пренебрегая этими изменениями, можно считать, что при малых μ и при $\mu = 0$ разбиения фазового пространства на траектории качественно одинаковы.

5. Синхронизмы разных порядков. Переайдем к вопросу о том, какова структура движений на торе Γ , соответствующем асимптотически устойчивому (в линейном приближении) периодическому движению автономной системы. После соответствующей замены переменных уравнения движения автономной системы (7.103) в окрестности периодического движения Γ могут быть записаны в виде

$$\begin{aligned}\dot{\varphi} &= \omega + r\Phi(\varphi, r), \\ \dot{r} &= -\alpha r + \beta(\varphi, r)r^2.\end{aligned}\quad (7.105)$$

Здесь $2\pi/\omega$ — период периодического движения Γ и $\alpha > 0$. Геометрический смысл переменных φ и r указан на рис. 7.93. В этих же переменных неавтономные уравнения (7.104)

в окрестности Γ запишутся в виде

$$\begin{aligned}\dot{\varphi} &= \omega + r\Phi(\varphi, r) + \mu f(\varphi, r, \tau, \mu), \\ \dot{r} &= -\alpha r + \beta(\varphi, r) r^2 + \mu g(\varphi, r, \tau, \mu).\end{aligned}\quad (7.106)$$

При достаточно малых μ у этих уравнений сохраняется существование гладкой, непрерывно зависящей от μ тороидальной интегральной поверхности. Ее уравнения имеют вид

$$r = \mu R(\varphi, \tau, \mu). \quad (7.107)$$

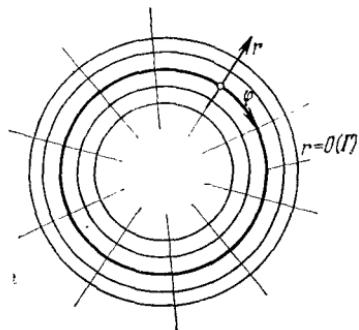


Рис. 7.93

Подставляя (7.107) в (7.106), найдем уравнение фазовых траекторий на интегральной тороидальной поверхности (7.107):

$$\dot{\varphi} = \omega + \mu \Phi_1(\varphi, \tau, \mu). \quad (7.108)$$

Уравнение (7.108) определяет точечное отображение $T_{2\pi}$ окружности $r = 0$ в себя:

$$\bar{\varphi} = \varphi + 2\pi\omega + \mu F(\varphi, \mu), \quad (7.109)$$

где $F(\varphi, \mu)$ — периодическая, периода 2π , функция φ . Такое отображение окружности в себя в грубом случае исследовалось А. Г. Майером [33]. Отображение $T_{2\pi}^q$ будет такого же вида, как и (7.109), с той лишь разницей, что $2\pi\omega$ заменится на $2\pi\omega q$. Поэтому в случае резонанса, когда $\omega = p/q$, отображение $T_{2\pi}^q$ примет вид (7.109), но без члена с ω . Преобразование (7.109) с $\omega = 0$ может быть легко изучено, как это видно из диаграммы, изображенной на рис. 7.94. При этом нужно иметь в виду, что если φ^* — неподвижная точка отображения $T_{2\pi}^q$, то и точки

$$T_{2\pi}^q \varphi^* = \varphi^* + 2\pi\omega k + \mu (\dots) \quad (k = 1, 2, \dots, q-1)$$

также будут неподвижными точками. Поэтому точечное отображение $T_{2\pi}^q$ имеет какое-то четное число $2m$ групп неподвижных точек по q точек в каждой. Эти точки в общем случае поочередно устойчивые и неустойчивые. Для исходного преобразования (7.109) это означает наличие некоторого четного числа циклов устойчивых и неустойчивых неподвижных точек кратности q . В соответствии

с выясненным q -я итерация точечного отображения (7.109) окружности в себя при $p = 1$, $q = 3$ и $m = 1$ имеет вид, показанный на рис. 7.95. Маленькие кружки соответствуют устойчивым трехкратным неподвижным точкам отображения (7.109), точки, отмеченные крестиками, неустойчивым трехкратным неподвижным точкам.

В фазовом пространстве x , y , τ циклу устойчивых q -кратных неподвижных точек соответствует устойчивое периодическое движение периода $2\pi q$ (рис. 7.96), успеваю-

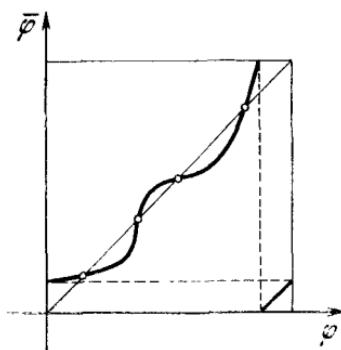


Рис. 7.94

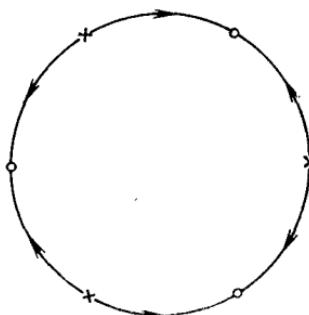


Рис. 7.95

щее за это время p раз обернуться по переменной φ . Напомним, что у соответствующего периодического движения автономной системы происходит один оборот по φ за время, равное $2\pi q/p$, и что 2π — период внешнего воздействия.

Таким образом, согласно изложенному, при достаточно малом μ возникает синхронизация автоколебательного движения и внешнего воздействия, эта синхронизация порядка p/q , когда в периоде возникшего периодического движения укладывается p периодов автоколебания автономной системы и q периодов внешней силы. Сказанное справедливо только при достаточно малых μ , вообще говоря, тем меньших, чем больше q . Поэтому для синхронизаций высокого порядка (большое q) сказанное может оказаться справедливым лишь при очень маленьких μ . Что же будет при некотором одном и том же малом μ , но для разных ω ? Этот вопрос сводится к исследованию зависимости от параметра так называемого числа вращения Пуанкаре γ . При естественном предположении общего случая число

вращения γ зависит от ω , как показано на рис. 7.97. Эта зависимость непрерывная и кусочно-постоянная. Каждому отрезку постоянства числа вращения γ соответствует синхронизм порядка p/q с некоторой областью захвата $(\underline{\omega}, \bar{\omega})$ по частоте ω собственных колебаний автономной системы.

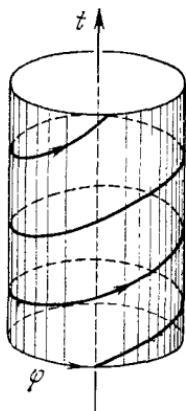


Рис. 7.96

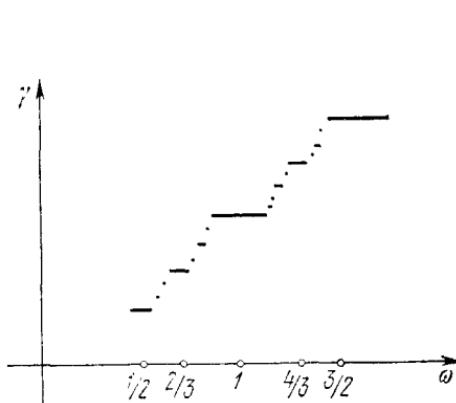


Рис. 7.97

Если бы фиксировалась частота ω и менялась частота ω_0 внешнего воздействия, которая была до этого равна единице, то характер зависимости числа вращения Пуанкаре γ от ω_0 будет такой же, как и от ω .

6. Стохастический синхронизм [42]. Рассмотрим теперь систему уравнений вида

$$\begin{aligned}\dot{\varphi} &= \omega + \mu \left\{ \frac{\partial H}{\partial r} + vH \frac{\partial H}{\partial \varphi} \right\} + \mu^2 f(\varphi, r, \tau, \mu), \\ \dot{r} &= \mu \left\{ -\frac{\partial H}{\partial \varphi} + vH \frac{\partial H}{\partial r} \right\} + \mu^2 g(\varphi, r, \tau, \mu),\end{aligned}\quad (7.110)$$

где $\omega = p/q$ и функция $H = H(\varphi, r)$ периодическая, периода $2\pi/q$, по φ . После перехода к новой переменной $\psi = \varphi - \omega\tau$ уравнения (7.110) записутся в виде

$$\begin{aligned}\dot{\psi} &= \mu \left\{ \frac{\partial H}{\partial r} + vH \frac{\partial H}{\partial \psi} \right\} + \mu^2 f(\psi, r, \tau, \mu), \\ \dot{r} &= \mu \left\{ -\frac{\partial H}{\partial \psi} + vH \frac{\partial H}{\partial r} \right\} + \mu^2 g(\psi, r, \tau, \mu),\end{aligned}\quad (7.111)$$

где $H = H(\psi + \omega\tau, r)$. Для исследования этих уравнений рассмотрим точечное отображение $T_{2\pi}$ плоскости $\tau = 0$

в себя, порождаемое его фазовыми траекториями. Это точечное отображение можно представить в виде

$$\begin{aligned}\bar{\psi} &= \psi + \mu \Phi_1(\psi, r) + \mu^2 \Phi_2(\psi, r, \tau, \mu), \\ \bar{r} &= r + \mu R_1(\psi, r) + \mu^2 R_2(\psi, r, \tau, \mu),\end{aligned}\quad (7.112)$$

причем после отбрасывания членов с μ^2 оно является точечным отображением $T_{2\pi}$ для автономных уравнений

$$\begin{aligned}\dot{\psi} &= \mu \left\{ \frac{\partial H}{\partial r} + vH \frac{\partial H}{\partial \psi} \right\}, \\ \dot{r} &= \mu \left\{ -\frac{\partial H}{\partial \psi} + vH \frac{\partial H}{\partial r} \right\}.\end{aligned}\quad (7.113)$$

Конкретизируем вид функций H . Пусть

$$H(\psi, r) = r^2 + \lambda \sin q\psi - \lambda \quad (\lambda > 0), \quad (7.114)$$

тогда при $v = 0$ разбиение фазовой плоскости на траектории имеет вид, показанный на рис. 7.98.

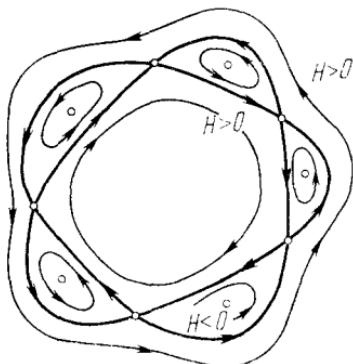


Рис. 7.98

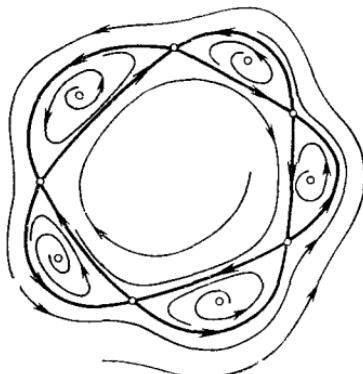


Рис. 7.99

Изображенные на рис. 7.98 фазовые траектории описываются уравнением

$$H(\psi, r) = r^2 + \lambda \sin q\psi - \lambda = \text{const.} \quad (7.115)$$

На сепаратрисах седел $H = 0$. В каждой из областей, на которые сепаратрисы разбивают плоскость, знаки H указаны на рис. 7.98.

Влияние добавочного члена в уравнении (7.113) с параметром v можно интерпретировать как поворот поля в положительном направлении при $vH > 0$ и отрицательном при $vH < 0$. В соответствии с этим при $v > 0$ фазовые

траектории имеют вид, представленный на рис. 7.99. Тем самым установлен характер точечного отображения (7.112) с точностью до членов порядка μ^2 . Сепаратрисные кривые на рис. 7.99 являются инвариантными кривыми седловых неподвижных точек отображения (7.113). За счет добавков порядка μ^2 они уже не будут идти из седла в седло. В одном

из общих случаев они будут пересекаться, образуя некоторую гомоклиническую структуру *), изображенную на рис. 7.100.

Направления движения последовательных положений фазовой точки через интервалы времени 2π в этой окрестности показаны на рис. 7.101, а. Вблизи седловых точек возможно случайное разветвление движения, в этом, собственно, и состоит в основном случайный характер ее движения

(рис. 7.101, б). При каждом проходе вблизи седловой точки фазовая точка имеет два варианта движения. Одно обозначим α , другое β . Тогда каждое движение в этой окрестности изобразится некоторой последовательностью символов вида

$$\alpha\alpha\beta\alpha\beta\alpha\beta\alpha\beta\beta\beta\alpha\dots \quad (7.116)$$

Статистическое описание этой случайной последовательности можно получить, вводя вероятности появления символов α и β после некоторого числа тех или иных символов, причем это описание будет тем более точным, чем большее число учитываемых предшествующих символов. При

*) Отметим, что это пересечение сепаратрис не может быть обнаружено асимптотическими методами ни в каком приближении, так как, согласно [41], приближение асимптотического метода состоит в замене исследования точечного отображения $T_{2\pi}$ рассмотрением отображения сдвига некоторой автономной системы. Отсюда следует и то, что ширина коридоров рис. 7.101, а при $\mu \rightarrow 0$ менее любой степени μ .

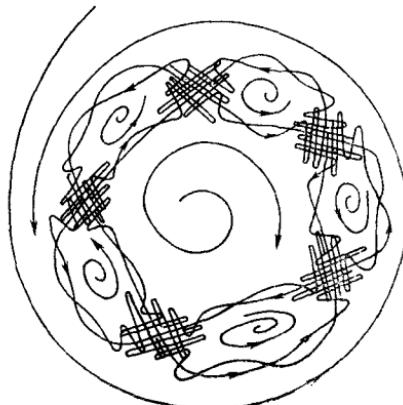


Рис. 7.100

наиболее грубом описании вводятся вероятности $p(\alpha)$ и $p(\beta)$; следующее, несколько более полное описание основывается на вероятностях

$$p(\alpha/\alpha), p(\alpha/\beta), p(\beta/\alpha) \text{ и } p(\beta/\beta), \text{ и т. д.}$$

В первом случае перед нами процесс независимых испытаний, во втором — марковский процесс с двумя состояниями.

Вернемся к исходным уравнениям (7.110) для (7.114). При $\lambda = 0$ они принимают вид

$$\begin{aligned}\dot{\varphi} &= \omega + 2\mu r + \mu^2 \bar{f}(\varphi, r, \tau, \mu), \\ \dot{r} &= -2\mu v r^3 + \mu^2 \bar{g}(\varphi, r, \tau, \mu),\end{aligned}\quad (7.117)$$

и соответствующее автономное уравнение имеет негрубый устойчивый ($\mu v > 0$) предельный цикл $r = 0$. При неавтономном периодическом его возмущении и $\lambda > 0$ возможно возникновение в его окрестности устойчивого установившегося движения, для которого переменная $\varphi = \omega t + \psi$, где изменение фазы ψ является случайным и может быть с той или иной степенью точности описано статистически. Это устойчивое установившееся движение является грубым образованием, структура которого не меняется от любых, достаточно малых гладких автономных и неавтономных периодических возмущений.

Выбранный выше специальный способ возмущений показывает возможность перехода от тороидального интегрального многообразия с каким-то синхронизмом на нем к движению, названному стохастическим синхронизмом. Этот переход в пространстве параметров можно осуществлять и другими способами.

Рассмотрим в качественном плане, какие при этом могут происходить изменения.

7. Бифуркации синхронизмов. Выбранный выше специальный путь был удобен тем, что он позволил увидеть структуру возникающего нового установившегося движения, но поскольку множество стохастических синхронизмов образует в пространстве параметров область, то переход от обычного синхронизма к стохастическому возможен и общим образом.

Итак, речь идет о том, каким образом осуществляется общий переход от картинки рис. 7.102, где изображен обычный синхронизм, к картинке рис. 7.100 с изображением стохастического синхронизма.

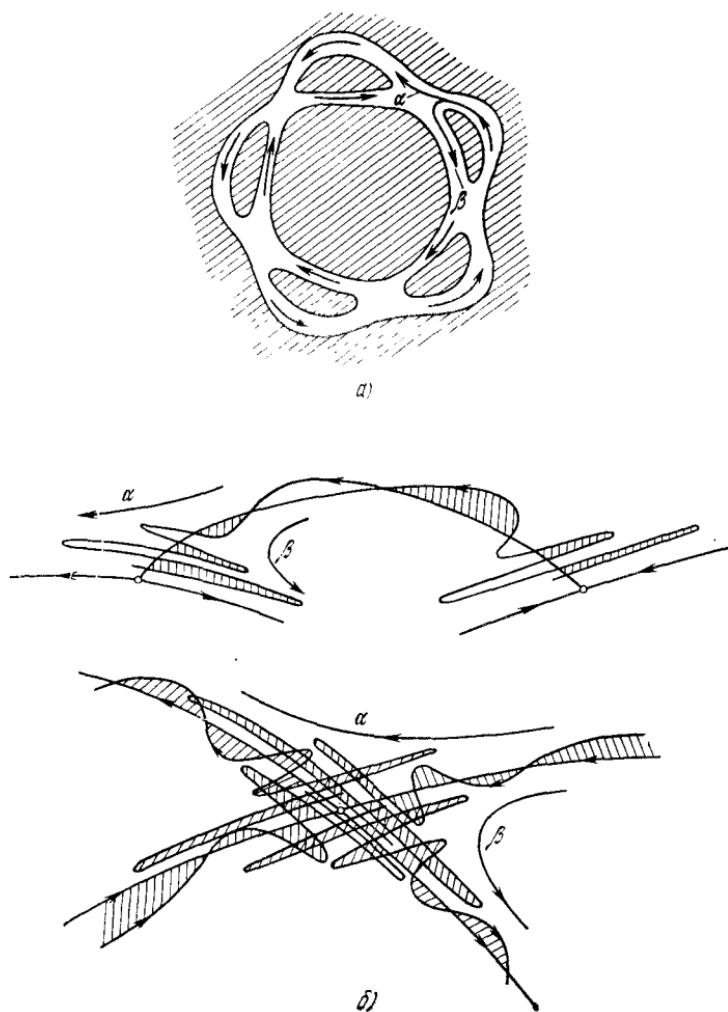


Рис. 7.101

Сделаем несколько общих замечаний, касающихся преобразования плоскости в плоскость. На рис. 7.102 и 7.100 показано поведение последовательных преобразований точек плоскости в плоскость при обычном и стохастическом синхронизмах. Эти картинки похожи на изображение разбиения фазовой плоскости на траектории. Однако на них кривые изображают не траектории движения фазовых точек. Траекторией движения точки для точечного отображения плоскости в плоскость является последовательность точек, в которой каждая следующая точка получается преобразованием предыдущей. Это инвариантные кривые точечного отображения, т. е. кривые, которые при преобразовании переходят в себя. Поэтому, если

на такой кривой лежит какая-нибудь точка последовательности, то на ней лежат и все ее точки, причем они расположены на ней с сохранением порядка. Порядок следования точек последовательности определяет некоторое направление на инвариантной кривой, которое на рис. 7.102 и 7.100 отмечено стрелками. Рис. 7.102 с изображением инвариантных кривых при обычном синхронизме можно было бы рассматривать и как разбиение фазовой плоскости системы некоторых дифференциальных уравнений. При этом неподвижные точки трактовались бы как состояния равновесия—седловые и узловые. Напротив, на рис. 7.100 имеются существенные отличия от того, что может быть на фазовой плоскости. Это отличие состоит в наличии пересечений инвариантных кривых, чего с фазовыми траекториями быть не может. Это отличие состоит еще и в том, как ведет себя сепаратрисная инвариантная кривая: она проходит вблизи себя туда и обратно, имеет сколь угодно крутые повороты. Вместе с тем сама себя она не пересекает, она пересекается с другой сепаратристной инвариантной кривой.

Таким образом, разбиение плоскости инвариантными кривыми точечного отображения дает наглядное о нем

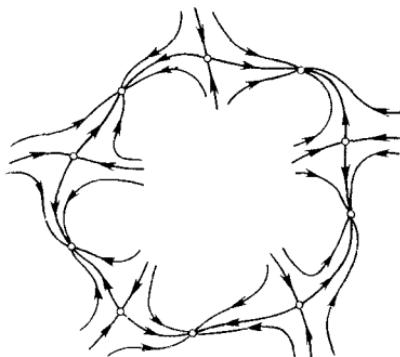


Рис. 7.102

представление и может быть полезным для его исследования. Во многом оно похоже на разбиение фазовой плоскости на траектории. Однако имеются и существенные отличия.

Сформулируем основные свойства разбиения плоскости на инвариантные кривые. Прежде всего заметим, что задание фазовой точки в случае, когда ее движение задается дифференциальными уравнениями, однозначно определяет проходящую через нее фазовую кривую. Такого положения для инвариантных кривых нет. Задание точки M_0 определяет лишь последовательность точек

$$\dots, M_{-2}, M_{-1}, M_0, M_1, M_2, \dots,$$

через которую эта инвариантная кривая должна проходить. Через эту последовательность точек проходит бесчисленное множество различных инвариантных кривых. Соединим две точки, именно M_0 и M_1 , любой кривой γ . Преобразования $T^i\gamma$ ($i = \dots, -1, 0, 1, \dots$) образуют инвариантную кривую. Какую же инвариантную кривую выбрать? Естественно выбрать ту, которая наиболее удобна для изображения точечного отображения и полезна для его исследования. Исходя из этих соображений, будем выбирать инвариантные кривые, стремясь к тому, чтобы они не самопересекались. Заметим, что из самопересечения инвариантной кривой γ в точке M следует наличие бесконечной последовательности точек самопересечения T^iM ($i = \dots, -1, 0, 1, \dots$) по одной на каждом «такте» инвариантной кривой. Тактом инвариантной кривой назван любой ее отрезок, заключенный между точками x и Tx . Аналогично из взаимного пересечения двух инвариантных кривых в одной точке следует наличие бесчисленного числа их взаимопересечений по одной на каждом такте каждой из инвариантных кривых. Далее, из наличия этих бесконечных последовательностей точек пересечения может следовать наличие еще других пересечений и т. д.

Для неподвижных точек достаточно гладкого в их окрестности точечного отображения справедливы следующие утверждения. В окрестности неустойчивой (устойчивой) узловой неподвижной точки существует заполняющее ее множество несамопересекающихся гладких выходящих (входящих) из нее инвариантных кривых. Такое же утверждение имеет место и для неподвижной точки типа фокуса, с той лишь разницей, что гладкость кривых не будет равномерной. Эти инвариантные кривые по своему

виду такие же, как фазовые траектории в окрестности узлового состояния равновесия и фокуса. В окрестности седловой неподвижной точки имеются четыре гладкие инвариантные кривые — две входящие и две выходящие. Окрестность седловой особой точки также может быть заполнена семейством гладких инвариантных кривых, однако

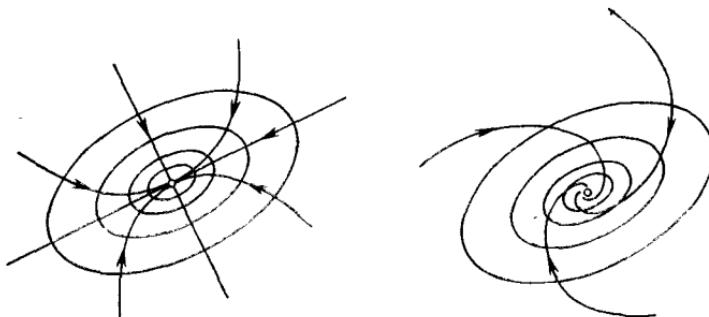


Рис. 7.103

лишь четыре из них оканчиваются или начинаются в неподвижной точке. Все это также находится в полной аналогии с фазовыми траекториями в окрестности седлового состояния равновесия. Заметим еще, что окрестности узловой неподвижной точки и фокуса можно заполнить гладкими замкнутыми преобразующимися друг в друга кривыми (рис. 7.103), а окрестность седловой неподвижной точки — семействами переходящих друг в друга гладких кривых, включающих в себя инвариантные сепаратрисные кривые (рис. 7.104).

Сказанное позволяет указать инвариантные кривые точечного отображения, которые не могут самопересекаться, — это продолжения инвариантных кривых неподвижных узловой точки и фокуса, а также сепаратрисных инвариантных кривых седловой неподвижной точки.

Перейдем теперь к вопросу о взаимных пересечениях этих инвариантных кривых. Инвариантные кривые, полученные продолжением локальных инвариантных кривых неподвижных точек, стремящихся либо в сторону возрастания времени, либо в сторону его убывания к одной и той же неподвижной точке, не взаимопересекаются. Таким образом, могут пересекаться только инвариантные кривые, имеющие различное асимптотическое поведение, как при возрастании времени, так и при его убывании.

Из этого факта следует, что динамическая система, определяемая точечным отображением плоскости в плоскость с простейшими установившимися движениями и некратными неподвижными точками, может быть описана дифференциальными уравнениями второго порядка тогда и только тогда, когда ее сепаратрисные кривые седловых неподвижных точек не взаимопересекаются. Заметим, что требованию некратности можно всегда удовлетворить, заменив отображение некоторой его степенью. На рис. 7.105 приведены точечные отображения с простейшими установившимися движениями. У одного из них сепаратрисные инвариантные кривые седловых неподвижных точек не пересекаются, и оно может быть описано дифференциальными уравнениями второго порядка, причем без периодич-

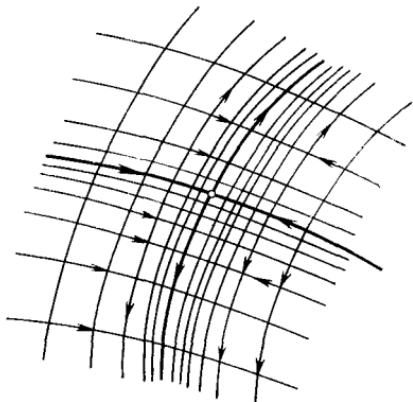


Рис. 7.104

сях движений. У второго такие пересечения имеются, и оно уже не может быть описано дифференциальными уравнениями второго порядка.

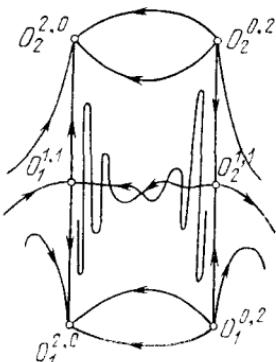
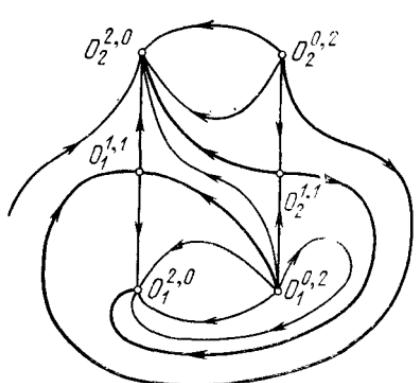


Рис. 7.105

ических движений. У второго такие пересечения имеются, и оно уже не может быть описано дифференциальными уравнениями второго порядка.

Это утверждение, очевидно, обобщается на точечные отображения любой размерности. При этом требование отсутствия взаимных пересечений сепаратрисных инвариантных кривых заменяется требованием непересекаемости всех инвариантных кривых седловых неподвижных точек.

Напомним, что от точечного отображения требуется, чтобы любая его точка при ее преобразовании как в сторону убывания, так и возрастания времени стремилась к одной из конечного числа некратных неподвижных точек.

К сказанному следует сделать одно важное добавление. Выше были сформулированы условия, при которых точечное отображение можно представить как отображение сдвига некоторого дифференциального уравнения. Однако при этом даже для сколь угодно гладкого отображения T нельзя гарантировать гладкости соответствующих дифференциальных уравнений. Объясняется это тем, что гладкие инвариантные кривые, выходящие из неустойчивых или седловых неподвижных точек, остаются гладкими при их продолжении, но эта гладкость, вообще говоря, неравномерная.

Поэтому приближение гладких инвариантных кривых к устойчивым неподвижным точкам может иметь особенности, не свойственные фазовым кривым состояний равновесия гладких дифференциальных уравнений. Рассмотрим

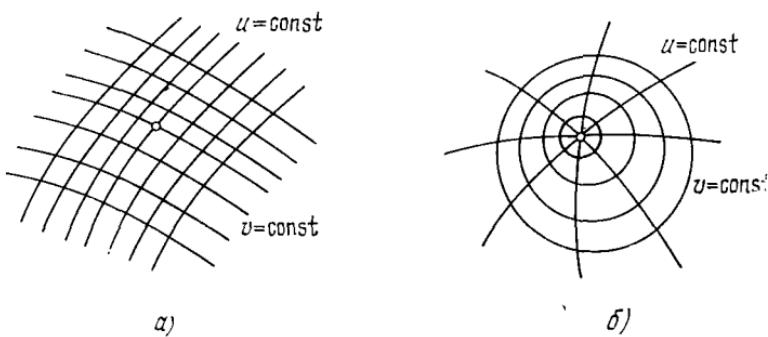


Рис. 7.106

этот вопрос несколько подробнее. Введем в окрестностях неподвижных точек приспособленные к ним локальные системы координат видов, показанных на рис. 7.106, *a* для узлов и седел и на рис. 7.106, *б* для фокусов. Координатные линии этих систем координат гладкие и перехо-

дят при преобразовании друг в друга, поэтому точечные отображения в них приобретают вид $\bar{u} = \lambda u$, $\bar{v} = v\nu$ ($|\lambda| \neq |v|$) для узлов и седел и вид $\bar{u} = u + \alpha$, $\bar{v} = \sigma v$ для фокусов.

Если из одной неподвижной точки O_1 идет инвариантная кривая γ в другую неподвижную точку O_2 , то существуют в окрестностях точек O_1 и O_2 точки M_1 и M_2 , преобразующиеся друг в друга после некоторого числа m повторений отображения T . Пусть ε — окрестность точки M_1 , частью границы которой являются переходящие друг в друга при отображении T координатные линии.

Рассмотрим отображение части $\tilde{\gamma}$ кривой γ , лежащей в окрестности ε , в окрестность точки M_2 .

Пусть точка O_2 узловая и пусть для определенности $1 > \lambda > v$. Отрезок кривой $\tilde{\gamma}$ отобразится в некоторый гладкий отрезок кривой $\tilde{\gamma}$ с уравнением $v = \varphi(u)$ (рис. 7.107). При последующем m -кратном применении

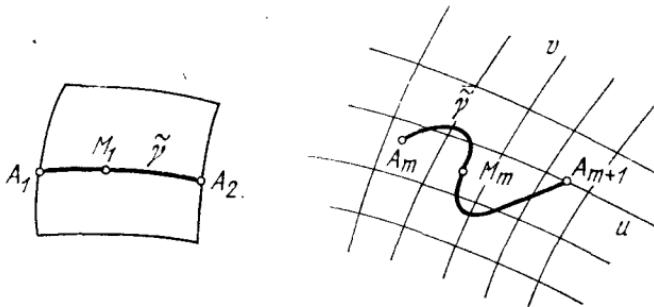


Рис. 7.107

преобразования T отрезок кривой $\tilde{\gamma}$ перейдет в отрезок кривой с уравнением $v = v^m \varphi(\lambda^{-m} u)$. При возрастании m в зависимости от того, однозначна функция φ или многозначна, возможны два разных случая. В первом случае последовательные отображения отрезка $\tilde{\gamma}$ составляют гладкую кривую, входящую в точку O_2 , касающуюся оси $v = 0$ (рис. 7.108). Напротив, во втором случае получающаяся кривая не имеет предельной касательной. Она имеет вид, показанный на рис. 7.109. При этом вспомогательное отображение \tilde{T}^m многозначное. В первом случае, напротив, это отображение однозначное.

В случае, когда неподвижная точка O_2 — фокус, также приходим к двум различным случаям в зависимости

от однозначности или многозначности вспомогательного отображения \tilde{T}^m . Таким образом, если при преобразовании T^m из локальной системы координат одной неподвижной точки в локальную систему координат другой или той же самой неподвижной точки вспомогательное отображение \tilde{T}^m многозначное, то у инвариантной кривой появляются особенности, заведомо не свойственные фазовым

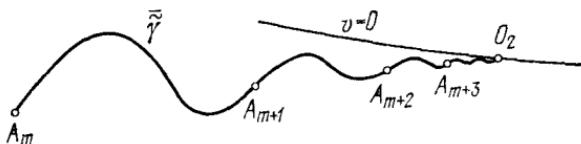


Рис. 7.108

же самой неподвижной точки вспомогательное отображение \tilde{T}^m многозначное, то у инвариантной кривой появляются особенности, заведомо не свойственные фазовым

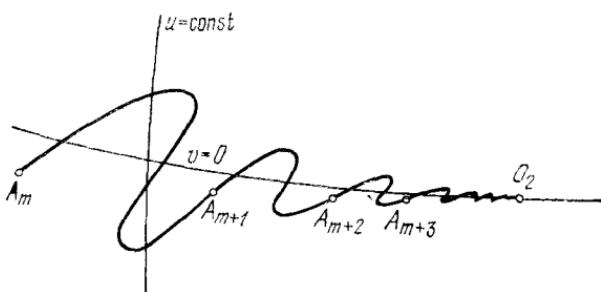


Рис. 7.109

кривым достаточно гладких дифференциальных уравнений.

Вернемся к вопросу о переходе обычного синхронизма в стохастический при общем непрерывном изменении параметров. Прежде всего заметим, что для обоих синхронизмов существенной характеристикой является число вращения ω .

Рассмотрим отдельно изменения, которые могут происходить при фиксированном ω и при изменении ω .

Пусть ω не меняется и не происходит бифуркаций слияния неподвижных точек. Тогда возможные изменения будут состоять только в изменениях неподвижных точек и расположениях сепаратрисных кривых. При этом седловые точки должны оставаться седловыми. А узлы могут переходить в фокусы и обратно. Фокус может сменить устойчивость, и при этом от него отделится либо обычный,

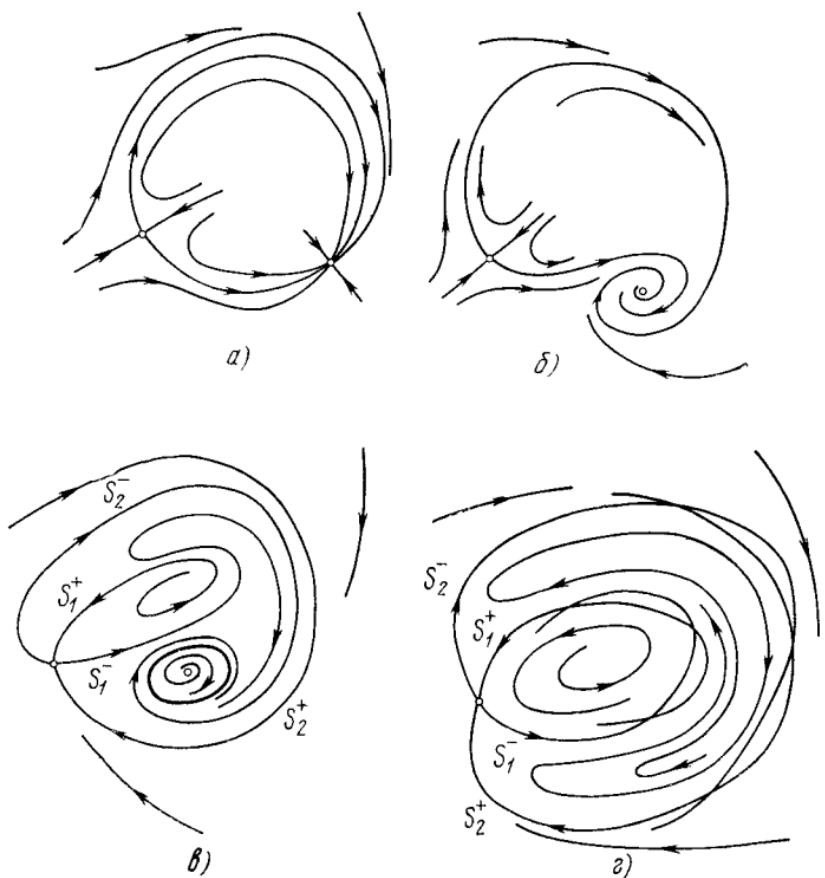


Рис. 7.110



Рис. 7.111

либо стохастический синхронизм. При смене взаимного расположения сепаратрис может произойти возникновение стохастического синхронизма. Эта бифуркация в суженном виде будет в дальнейшем рассмотрена отдельно. Сейчас же ограничимся ее изображением на рис. 7.110.

На рис. 7.110 изображены последовательные стадии перехода через общие бифуркации от обычного синхронизма к стохастическому. При переходе от рис. *a* к *b* происходит смена узла на фокус. Затем (рис. 7.110, *в*) фокус меняет устойчивость, и от него рождается устойчивый предельный цикл. Одновременно происходит сближение сепаратрис седла S_1^+ и S_1^- и соответственно S_2^+ и S_2^- . После этого (рис. 7.110, *г*) сепаратрисы пересекаются, причем вместе с пересечением сепаратрис S_2^+ и S_2^- происходит исчезновение устойчивого предельного цикла.

Помимо этих изменений, у обычного синхронизма возможно нарушение гладкости тороидальной интегральной поверхности. У соответствующего точечного отображения при этом нарушается гладкость вхождения сепаратрисных инвариантных кривых седел в узлы. Причина такого изменения была описана выше. Соответствующее изменение синхронизма видно из рис. 7.111.

Рассмотрим теперь бифуркации, происходящие при изменении ω . О сложном характере зависимости ω от параметров говорилось выше. Каждому рациональному значению ω соответствует некоторая область значений параметров. При переходе от одного рационального значения ω к другому происходит бесчисленное множество бифуркаций. Границы области постоянного рационального значения ω определяются слияниями седел и узлов синхронизма. При слиянии седла с узлом возникает сложная неподвижная точка типа седло-узел. Фрагмент изменений, происходящих со стохастическим синхронизмом при слиянии седел и узлов и образовании сложных седлоузловых точек, представлены на рис. 7.112.

Для простого синхронизма соответствующие фрагменты разбиения плоскости на инвариантные кривые изображены на рис. 7.113 и 7.114. Рис. 7.113 соответствует случаю, когда слияние седел и узлов происходит у обычного синхронизма с гладким тороидальным интегральным многообразием, а рис. 7.114 — с негладким.

При дальнейшем изменении параметров после бифуркации слияния седел с узлами происходит быстрая смена различных качественных картинок разбиения. После

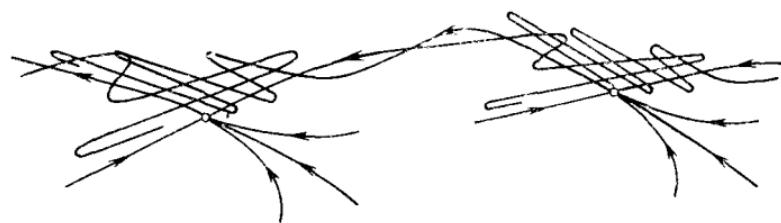


Рис. 7.112

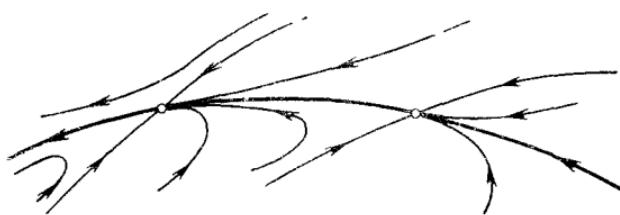


Рис. 7.113

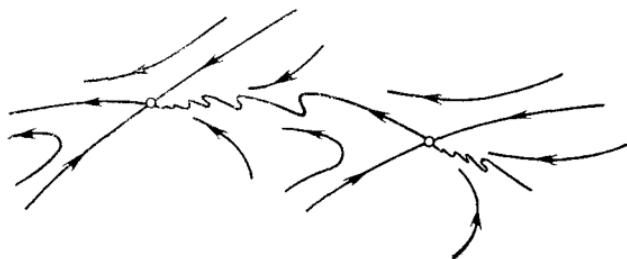


Рис. 7.114



Рис. 7.115

этого быстрого мельтешения снова на более или менее длительном интервале изменения параметров может установиться устойчивый синхронизм. Характер этой смены достаточно сложен. Для простого синхронизма он определяется зависимостью числа вращения Пуанкаре от параметров. Каждому рациональному значению числа вращения соответствует некоторый интервал по параметру существования устойчивого синхронизма. Между любыми такими интервалами существует бесчисленное множество других, причем между каждой парой этих других в свою очередь такое же бесчисленное множество. Сказанное в какой-то мере отображается рис. 7.115, где интервалам $\alpha_{p/q}$ на оси параметра μ отвечают области существования устойчивого синхронизма с числом вращения $\gamma = p/q$, где p и q — целые числа.

Между каждой парой интервалов α_{p_1/q_1} и α_{p_2/q_2} имеется бесчисленное множество интервалов $\alpha_{p/q}$, для которых p/q заключено между p_1/q_1 и p_2/q_2 .

Можно думать, что характер бифуркаций стохастического синхронизма при изменении параметров такой же. Вернемся к рис. 7.112, 7.113 и 7.114. Рис. 7.113 соответствует обычному синхронизму, расположенному на гладкой тороидальной поверхности в момент его бифуркаций. При непрерывном изменении параметров существование этой гладкой инвариантной поверхности может нарушиться либо благодаря потере ею устойчивости, либо благодаря разрушению гладкости. Эти бифуркации непосредственно не связаны с теми изменениями, которые рассматриваются, и поэтому, если они не имеют места, то смена синхронизмов происходит, как было описано выше, на сохраняющем свою устойчивость и гладкость двумерном торе. Стохастический синхронизм в момент бифуркации, изображенной на рис. 7.112, порождает в кольце точечное отображение вида, изображенного на рис. 7.48, и поэтому не может перейти в обычный синхронизм. Это же относится к отображению кольца, частично показанному на рис. 7.114.

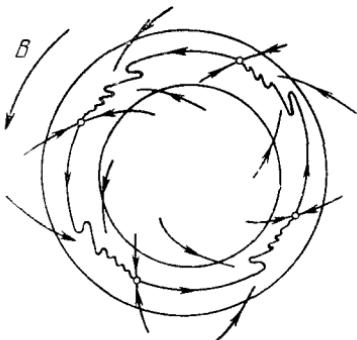


Рис. 7.116

Именно, если к отображению кольца в себя добавить малое вращение кольца, как это показано стрелкой B на рис. 7.416, то придет к точечному отображению вида рис. 7.48. Это отображение будет удовлетворять требуемому существованию области σ , указанным образом пересекающейся со своим отображением $\bar{\sigma}$. Поэтому дальнейшее изменение рис. 7.114 не может сохранить обычный синхронизм и приводит к его стохастизации.

Как следует из всего сказанного, общий переход от обычного синхронизма к стохастическому может происходить двумя способами. По первому способу переход происходит в результате изменения хода сепаратрисных кривых седловых неподвижных точек и происходит через их

касание (см. рис. 7.110). По второму — в результате нарушения гладкости тороидального многообразия синхронизма и последующего слияния седел и узлов (рис. 7.111 и 7.114).

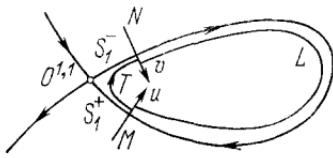


Рис. 7.117

8. Бифуркация от сепаратрисы седла.

Перейдем к рассмотрению малого неавтономного возмущения автономной системы, описываемой уравнениями (7.103), с сепаратрисой, идущей из седла в него же. Предварительно опишем бифуркацию, возникающую при малом автономном возмущении, изученную в работах А. А. Андронова и Е. А. Леонтович [5].

На рис. 7.117 изображено седло $O^{1,1}$ с сепаратрисой, идущей из седла в седло. Эта картинка имеет место при $\lambda = 0$. Нас интересует, что будет при непрерывном изменении λ . Для выяснения этого вопроса пересечем ортогонально сепаратрису вблизи от седла $O^{1,1}$ двумя отрезками M и N и введем на них координаты u и v так, чтобы в точках пересечения с сепаратрисами, выходящими из седловой точки $O^{1,1}$ и соответственно v равнялись нулю. Положительные направления отсчета выберем внутрь петли сепаратрисы, как показано на рис. 7.117. При малом изменении параметра λ сепаратриса уже не будет идти из седла в седло. Примем, что при $\lambda > 0$ и соответственно $\lambda < 0$ имеют место поведения сепаратрисы, показанные на рис. 7.118.

Фазовые траектории, близкие к седлу и сепаратрисам, порождают точечные отображения T и L отрезка M в N

и отрезка N в M соответственно. На рис. 7.119 изображены диаграммы точечных отображений T и L при $\lambda = 0$. Поведение графика отображения T в точке $u = 0$ зависит от седловой величины σ , равной $\sigma = \exp(\alpha + \beta)$, где α и β — характеристические корни седлового равновесия $O^{1,1}$.

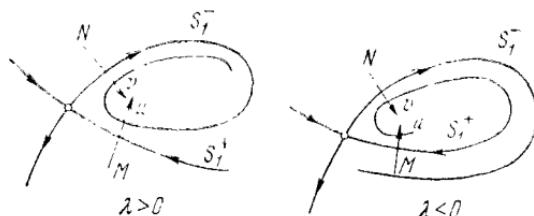


Рис. 7.118

При $\sigma > 1$ и соответственно $\sigma < 1$ график отображения T касается координатной оси v или u . График отображения L в общем случае имеет в точке $v = 0$ производную, отличную от 0 и ∞ . При малом изменении λ диаграмма рис. 7.119 изменится, как показано на рис. 7.120.

Как видно из этих рисунков, в случае $\sigma < 1$ при возрастании параметра λ от $\lambda = 0$ происходит рождение устойчивого периодического движения Γ , в соответствии с чем при $\lambda > 0$ фазовые траектории располагаются так, как это показано на рис. 7.121.

При $\sigma > 1$ при обратном изменении λ рождается неустойчивый предельный цикл.

Теперь рассмотрим, что произойдет при неавтономном возмущении сепаратрисы, идущей из седла в седло, что соответствует переходу от системы (7.103) к системе (7.104). В этом случае следует заменить рассмотрение фазовых траекторий дифференциальных уравнений рассмотрением инвариантных кривых точечного отображения плоскости $\tau = 0$ в себя и рассматривать картинки на рис. 7.117 и 7.118 как изображения поведения последовательных итераций этого точечного отображения при $\mu = 0$.

Подлежащее изучению точечное отображение $T_{2\pi}$ порождается фазовыми траекториями дифференциальных

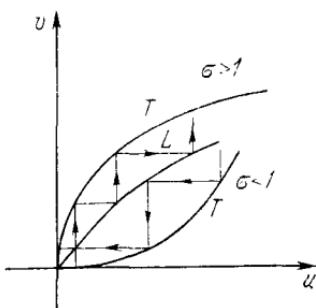


Рис. 7.119

уравнений (7.104). Поэтому точечное отображение $T_{2\pi}$ зависит от параметров λ и μ , причем при $\mu = 0$ оно порождается фазовыми траекториями автономной системы, которая при $\lambda = 0$ имеет идущую из седла $O^{1,1}$ в него же сепаратрису $S_1^- \equiv S_1^+$.

При гладкой зависимости правых частей уравнений (7.104) от параметров λ и μ и переменных x и y точечное

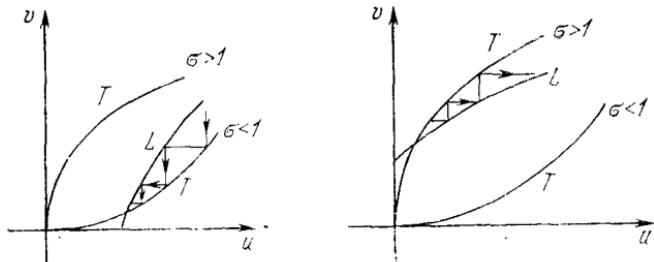


Рис. 7.120

отображение $T_{2\pi}$ и сепаратрисные кривые S_1^+ и S_1^- также гладко зависят от параметров λ и μ и сами кривые S_1^+ и S_1^- являются гладкими.

Пусть $\mu = \lambda = 0$ и m — отрезок прямой, ортогонально пересекающий сепаратрису S_1^+ в некоторой точке M , близкой к седловой точке $O^{1,1}$. Отображение $T_{2\pi}$ преобразует отрезок m в некоторый отрезок кривой \bar{m} , а точку M —

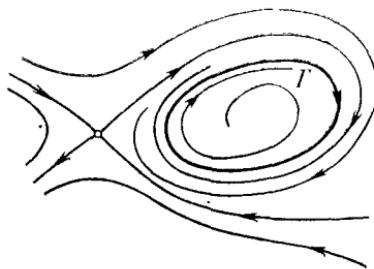


Рис. 7.121

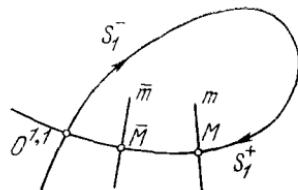


Рис. 7.122

в некоторую точку \bar{M} (рис. 7.122). Точки M и \bar{M} будем рассматривать как точки сепаратрисы S_1^+ и как точки совпадающей с ней сепаратрисы S_1^- . При изменении параметров λ и μ первые от седла $O^{1,1}$ точки M^+ и M^- пересечения сепаратрис S_1^+ и S_1^- с отрезком m уже не будут совпадать.

Также не будут совпадать и первые от седла точки пересечения \bar{M}^+ и \bar{M}^- сепаратрис S_1^+ и S_1^- с отрезком \bar{m} . При этом очевидно, что $\bar{M}^+ = T_{2\pi} M^+$ и $\bar{M}^- = T_{2\pi} M^-$. Точки M^+ , M^- , \bar{M}^+ и \bar{M}^- , как и отрезки S_1^+ и S_1^- заключенных между ними сепаратрис S_1^+ и S_1^- , зависят от параметров μ и λ гладко. Для любой точки P , близкой к отрезку S_1^+ (S_1^-) и лежащей между m и \bar{m} , можно ввести понятие расстояния до этого отрезка

$$\rho(P, \tilde{S}^+) = \min_{Q \in \tilde{S}^+} \rho(P, Q). \quad (7.118)$$

Примем, что это расстояние положительно или отрицательно в зависимости от того, по какую сторону от сепаратрисы S_1^+ (S_1^-) лежит точка P . Введем величины ρ^+ и ρ^- согласно формулам

$$\rho^+ = \max_{P \in \tilde{S}^-} \rho(P, \tilde{S}^+), \quad \rho^- = \min_{P \in \tilde{S}^-} \rho(P, \tilde{S}^+). \quad (7.119)$$

Величины ρ^+ и ρ^- определяют взаимное расположение сепаратрис S_1^- и S_1^+ . Именно, при $\rho^+ = \rho^- = 0$ сепаратрисы S^- и S^+ совпадают. При $\rho^+ \geq \rho^- > 0$ они расположены,

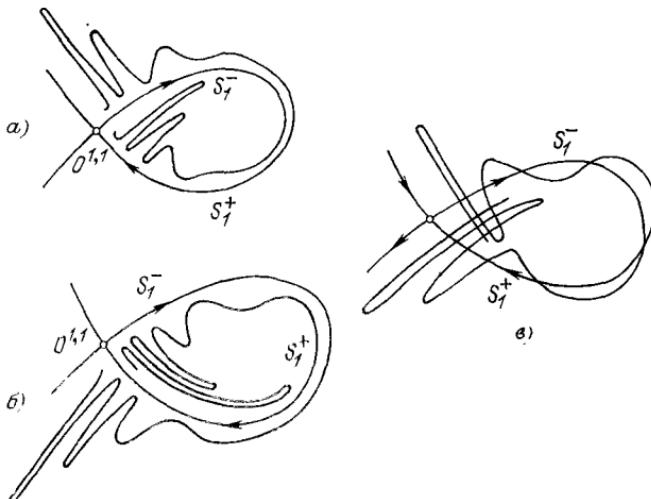


Рис. 7.123

как на рис. 7.123, *a* и 7.118 с $\lambda > 0$, при $\rho^- \leq \rho^+ < 0$ — как на рис. 7.123, *б* и 7.117 с $\lambda < 0$, при $\rho^+ > 0 > \rho^-$ — как на рис. 7.123, *в*.

Перейдем к некоторым выводам, которые можно сделать из гладкой зависимости ρ^+ и ρ^- от параметров λ и μ . В силу предположений: при $\mu = 0$ и $\lambda > 0$ $\rho^+ \geq \rho^- > 0$ и при $\mu = 0$ и $\lambda < 0$ $\rho^- \leq \rho^+ < 0$. Поэтому через точку $\mu = \lambda = 0$ проходят две кривые $\rho^+ = 0$ и $\rho^- = 0$ со взаимным расположением друг относительно друга, показанным на рис. 7.124. Кривые $\rho^- = 0$ и $\rho^+ = 0$ разбивают окрестность точки $\lambda = \mu = 0$ на три области: D^{++} , D^{-+} и D^{--}

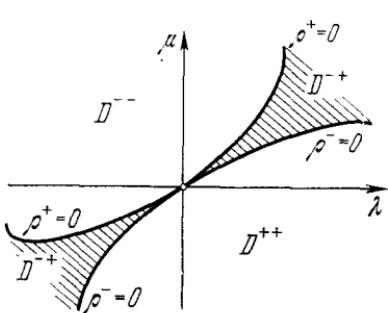


Рис. 7.124

в зависимости от знаков величин ρ^- и ρ^+ . В области D^{++} имеет место случай рис. 7.123, *а*, в области D^{-+} — рис. 7.123, *в* и в области D^{--} — рис. 7.123, *б*. Из рис. 7.124 следует, что область D^{-+} , в которой происходит пересечение сепаратрис (на рис. 7.124 она заштрихована), ограничена касающимися кривыми $\rho^- = 0$ и $\rho^+ = 0$.

Выше была рассмотрена зависимость поведения сепаратрисных кривых S_1^+ и S_1^- седловой неподвижной точки точечного отображения $T_{2\pi}$ от параметров.

Перейдем к дальнейшему исследованию точечного отображения $T_{2\pi}$. При $\mu = 0$ в окрестности петли сепаратрис $S_1^+ \equiv S_1^-$ оно было изучено. При этом изучение свелось к рассмотрению преобразования прямой в прямую. В области D^{-+} между кривыми $\rho^- = 0$ и $\rho^+ = 0$ (рис. 7.124) сепаратрисные кривые пересекаются, образуя гомоклиническую структуру. Отображение $T_{2\pi}$ в этом случае рассматривалось ранее в § 4. На кривых $\rho^- = 0$ и $\rho^+ = 0$ имеет место касание сепаратрисных кривых.

Рассмотрим отображение $T_{2\pi}$ в случаях таких касаний и к ним близких. Случай касания изображен на рис. 7.125. Для исследования точечного отображения $T_{2\pi}$ в случае, близком к изображенному на рис. 7.125, прибегнем к методу вспомогательных отображений. Сепаратрисные кривые вблизи седловой неподвижной точки O примем за оси координат u и v . Точки M и N выбираем достаточно близко к точке O (рис. 7.125). Точка M преобразуется в точку N некоторой степенью отображения $T_{2\pi}$. Обозначим это отоб-

ражение через L . Для точек M и N , изображенных на рис. 7.125,— это $T_{2\pi}^5$. В соответствии с поведением сепаратрис окрестность точки M , изображенная на рис. 7.126, преобразуется в подковообразную область $\bar{\delta}(M)$, показанную на том же рисунке. При $n \geq n^*$ отображение T^n тонкую полоску e вдоль оси u , изображенную на рис. 7.127, преобразует в полоску \bar{e}_n , расположенную вдоль оси v . Найдем в соответствии с этим вспомогательные отображения \tilde{L} и \tilde{T} .

Вспомогательное отображение \tilde{L} двузначно, и область τ , показанную на рис. 7.128, преобразует в некоторую окрестность $\bar{\tau}$ точки с координатами (u_0, v_0) , если точки M и N имеют координаты $(0, v_0)$ и $(u_0, 0)$ соответственно. Вспомогательное отображение \tilde{T}^n преобразует область G в область \bar{G}_n , призывающую к началу координат. При этом окрестность $\bar{\tau}$ преобразуется в зависимости от числа n в области v_n (рис. 7.129). В зависимости от величины σ последовательности этих областей v_n для возрастающих целых чисел $n \geq n^*$ уменьшаются и асимптотически приближаются к началу координат по-разному, как это показано на рис. 7.130.

Рассмотрим теперь произвольную последовательность точек

$$\dots (u_{-1}, v_{-1}), (\bar{u}_{-1}, \bar{v}_{-1}), (u_0, v_0), (\bar{u}_0, \bar{v}_0), \dots, \quad (7.120)$$

связанных соотношениями

$$\begin{aligned} (\bar{u}_i, \bar{v}_i) &= T^{ni} (u_i, v_i) \quad (n \geq n^*), \\ (u_{i+1}, v_{i+1}) &= L (u_i, v_i), \end{aligned} \quad (7.121)$$

и такую, что

$$(u_i, v_i) \equiv e, \quad (\bar{u}_i, \bar{v}_i) \equiv \delta(M). \quad (7.122)$$

Сказанное можно записать в виде схемы

$$\begin{array}{ccccccccc} \dots & \rightarrow & u_{i-1} & \rightarrow & \bar{u}_{i-1} & \rightarrow & u_i & \rightarrow & \bar{u}_i & \rightarrow \dots \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\ & & \tilde{L} & | & \tilde{T}^{ni-1} & | & \tilde{L} & | & \tilde{T}^n & | & \tilde{L} \\ & & \dots & \leftarrow & v_{i-1} & \leftarrow & \bar{v}_{i-1} & \leftarrow & v_i & \leftarrow & \bar{v}_i & \leftarrow \dots \end{array} \quad (7.123)$$

в которой стрелки указывают связи, определяемые вспомогательными отображениями \tilde{L} и \tilde{T}^n и условиями

$$(u_{i-1}, \bar{v}_{i-1}) \in G, \quad (\bar{u}_{i-1}, v_{i-1}) \in \tau. \quad (7.124)$$

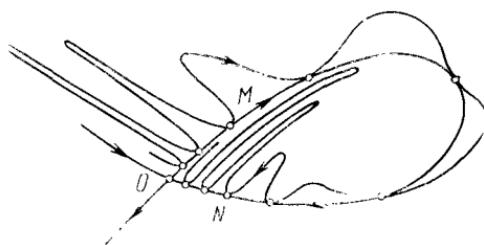


Рис. 7.125

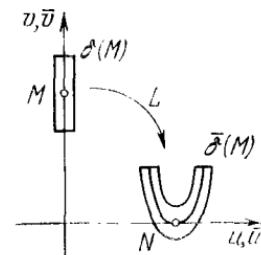


Рис. 7.126

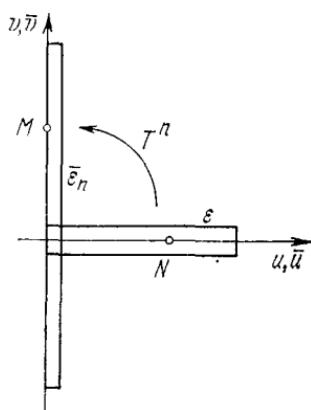


Рис. 7.127

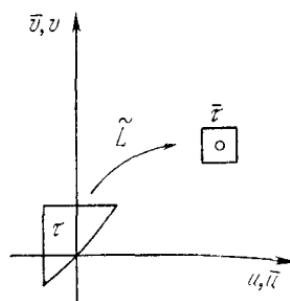


Рис. 7.128

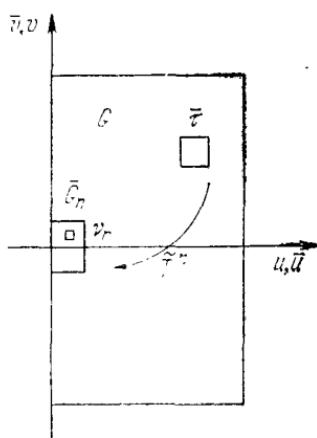


Рис. 7.129

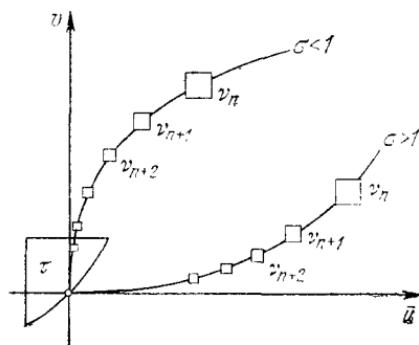


Рис. 7.130

Выполнение этих требований заведомо невозможно, если хотя бы для одного i

$$v_{n_i} \not\equiv \tau. \quad (7.125)$$

Этот случай имеет место, как следует из рис. 7.128 и 7.130, при $\sigma > 1$. Поэтому в этом случае последовательностей (7.120) не существует. Этот вывод естественно предполагает, что полоска ε достаточно тонкая. Напротив, при $\sigma < 1$ такие последовательности заведомо существуют, поскольку существуют схемы (7.123) без соблюдения требуемых их стрелками связей, но удовлетворяющие условиям (7.124) и продолжающие удовлетворять этим условиям при применении в них последовательно всех преобразований L и затем T^{n_i} .

Таким образом, при $\sigma < 1$ имеется бесчисленное множество последовательностей вида (7.120) при сколь угодной тонкости полосы ε .

Изложенные выше соображения позволяют получить более полные результаты. С ними можно ознакомиться по работам [21, 22].

Подведем некоторый итог. Ради определенности пусть для рассматриваемого нами седлового равновесия при $\mu = 0$ и $\lambda = 0$ седловая величина $\sigma < 1$. Тогда при возрастании λ вдоль оси $\mu = 0$ появится устойчивый предельный цикл с некоторой областью притяжения. Исходя из точки $\lambda > 0$, $\mu = 0$, будем увеличивать μ . При этом предельный цикл превратится сначала в устойчивый обычный синхронизм. Затем он трансформируется в стохастический синхронизм. При этом область притяжения предельного цикла последовательно будет переходить в область притяжения обычного и стохастического синхронизмов и затем по пересечению границы $\rho^- = 0$ в область притяжения какого-то нового установившегося движения. Структура разбиения плоскости параметров λ , μ в окрестности точки $\lambda = \mu = 0$ очень сложная. Достаточно заметить, что при монотонном изменении λ в сторону возрастания вдоль оси $\mu = 0$ число вращения γ монотонно убывает от значения *) $\gamma = \infty$. Сказанное основывается на предположении об общем характере бифуркаций и полученных ранее сведениях о точечном отображении $T_{2\pi}$, согласно которым между кривыми $\rho^- = 0$ и $\rho^+ = 0$ имеет место слож-

*) Имеется в виду, что при $\mu = 0$ и $\lambda \rightarrow 0$ ($\lambda > 0$) $\gamma \rightarrow \infty$.

ная структура, связанная с наличием гомоклинических точек и тем, что к кривой $\rho^- = 0$ снизу прилегает область, в которой точечное отображение $T_{2\pi}$ допускает притягивающую кольцеобразную область с бесчисленным множеством разнообразных седловых многократных неподвижных точек.

Проведенное рассмотрение малых неавтономных периодических возмущений автономной системы второго порядка обнаружило естественность появления с переходом от двумерных к многомерным динамическим системам притягивающих гомоклинических структур и, в частности, стохастических синхронизмов.

Таким образом, основное отличие многомерных динамических систем от двумерных состоит в появлении у них нового типа установившихся движений, движений очень сложных, неустойчивых по Ляпунову и имеющих стохастический характер. Можно, не вдаваясь в тонкую структуру этих движений, говорить об их возникновении, переходе друг в друга и в другие более простые установившиеся движения так же, как об этом говорилось ранее. При этом их области притяжения трансформируются непрерывно при мягких переходах и скачком при жестких. Сложным установившимся движениям можно дать при достаточно грубом подходе приближенные стохастические описания в виде некоторых марковских процессов.

§ 6. Заключение

Выше были изложены общие сведения о многомерных динамических системах. Эти сведения неполные и в ряде мест отрывочные. Объясняется это не только краткостью изложения очень сложного вопроса, но и тем, что разработка теории многомерных систем продолжается и далека от завершения. Это прежде всего относится к исследованию хаотических и стохастических колебаний, т. е. того, что является принципиально новым у многомерных динамических систем по сравнению с хорошо изученными и привычными одномерными и двумерными системами.

Открытие хаотических и стохастических движений произошло сравнительно недавно, но уже существенно обогатило наши общие представления о динамических системах и описываемых ими эволюционных процессах. Велико влияние этого открытия и на наши общие глу-