ная структура, связанная с наличием гомоклинических точек и тем, что к кривой $\rho^- = 0$ снизу прилегает область, в которой точечное отображение $T_{2\pi}$ допускает притягивающую кольцеобразную область с бесчисленным множеством разнообразных седловых многократных неподвижных точек.

Проведенное рассмотрение малых неавтономных периодических возмущений автономной системы второго порядка обнаружило естественность появления с переходом от двумерных к многомерным динамическим системам притягивающих гомоклинических структур и, в частности, стохастических синхронизмов.

Таким образом, основное отличие многомерных динамических систем от двумерных состоит в появлении у них нового типа установившихся движений, движений очень сложных, неустойчивых по Ляпунову и имеющих стохастический характер. Можно, не вдаваясь в тонкую структуру этих движений, говорить об их возникновении, переходе друг в друга и в другие более простые установившиеся движения так же, как об этом говорилось ранее. При этом их области притяжения трансформируются непрерывно при мягких переходах и скачком при жестких. Сложным установившимся движениям можно дать при достаточно грубом подходе приближенные стохастические описания в виде некоторых марковских процессов.

§ 6. Заключение

Выше были изложены общие сведения о многомерных динамических системах. Эти сведения неполные и в ряде мест отрывочные. Объясняется это не только краткостью изложения очень сложного вопроса, но и тем, что разработка теории многомерных систем продолжается и далека от завершения. Это прежде всего относится к исследованию хаотических и стохастических колебаний, т. е. того, что является принципиально новым у многомерных динамических систем по сравнению с хорошо изученными и привычными одномерными и двумерными системами.

Открытие хаотических и стохастических движений произошло сравнительно недавно, но уже существенно обогатило наши общие представления о динамических системах и описываемых ими эволюционных процессах. Велико влияние этого открытия и на наши общие глу-

бинные представления о детерминированном и случайном. Еще совсем недавно случайное было отделено высоким забором от детерминированного, а случайные колебания детерминированных динамических систем рассматривались и изучались только в плане внешних случайных возмущений. Сейчас после открытия хаотических и стохастических движений детерминированных динамических систем нельзя отрицать, что не только случайное может порождать закономерное практически детерминированное поведение, но и детерминированное поведение может приводить к случайности. Ранее такая возможность признавалась в молекулярной физике и объяснялась непостижимо большим числом частиц. Как оказалось, это не так — случайность возможна и в системах малой размерности (большей двух) и даже в системе с одной частицей.

Открытие стохастических и хаотических движений указало выход из тупика в теории турбулентности жидкости, газов и плазмы, привело к обнаружению стохастических и хаотических колебаний в самых разнообразных механических, физических, химических и биологических системах.

Все это сделало открытие хаотических и стохастических колебаний детерминированных динамических систем одной из научных сенсаций нашего времени. Но вместе с тем выяснилось, насколько сложна и многогранна проблема изучения многомерных динамических систем, насколько мало надежд на прежние аналитические методы их исследования. Стало ясно, что не обойтись без численных методов и современных вычислительных машин, без целенаправленных и продуманных математических экспериментов. Для того чтобы проводить такие численные расчеты и математические эксперименты, необходимо знать, что может быть и что с чем связано и как связано. Именно эти необходимые общие сведения дает качественная теория дифференциальных уравнений и возникший и развитый в связи с ней метод точечных отображений.

Каковы же основные общие выводы этой теории? Пожалуй, первый и самый важный вывод — это наличие двух различных тенденций в эволюции динамической системы, которые можно охарактеризовать как порядок и регулярность, с одной стороны, и хаос и стохастичность, — с другой. Порядок и регулярность имеют своим адек-

ватным образом устойчивые состояния равновесия и устойчивые периодические движения. Возникновение порядка и регулярности имеет в своей основе устойчивость. Устойчивость делает необходимым приход всякого ограниченного движения к состоянию равновесия или периодическому движению. У систем с размерностью меньшей трех устойчивость — единственная возможность. Наличие отдельных изолированных неустойчивых движений можно не принимать во внимание. Их роль заключается лишь в разделении устойчивых движений, стремящихся к различным устойчивым состояниям равновесия и устойчивым периодическим движениям. Такая же ситуация может иметь место в многомерных системах. Выше (§ 2 этой главы) такие многомерные системы названы динамическими системами с простейшими установившимися движениями. Но в многомерных системах размерности большей двух неустойчивость может проявиться не только в плане разделяющих движений, но и в плане порождения хаотических и стохастических движений, в виде притягивающих гомоклинических структур.

Такие образования из неустойчивых движений, в целом образующих притягивающее множество, получили название странных аттракторов — странных притягивающих множеств. Странных тем, что они состоят из неустойчивых экспоненциально разбегающихся фазовых траекторий, но вместе с тем в целом образуют притягивающее множество, к которому асимптотически приближаются все соседние фазовые траектории. Движения в странном аттракторе носят стохастический, случайный характер. Они непредсказуемы и случайны потому, что малейшее неконтролируемое возмущение начальных условий или постоянно действующие возмущения приводят к конечным расхождениям с невозмущенным движением. В силу этого странный аттрактор можно назвать стохастическим аттрактором. Стохастический аттрактор — притягивающее множество, и поэтому в его окрестности происходит сжатие фазового объема. Это необходимое условие.

Притягивающая гомоклиническая структура может породить не только стохастический аттрактор, но и своеобразное сочетание неустойчивых движений с устойчивыми движениями, имеющими очень тонкие области притяжения. При этом движения в притягивающей гомоклинической структуре тоже непредсказуемы и слу-

чайны, но эта случайность другого рода: она вызывается пусть и очень малыми, но все же бо́льшими некоторого порога возмущениями. Эти непредсказуемость и случайность происходят за счет выходов из узкой области притяжения под влиянием неконтролируемых возмущений. При этом стохастические свойства возникающего движения определяются случайными возмущениями. Отметим, что в предыдущем случае стохастического аттрактора они определялись только самой динамической системой, а случайные малые возмущения могли лишь незначительно их изменить. В силу этих различий установившиеся движения притягивающей гомоклинической структуры, содержащей устойчивые движения с тонкими областями притяжения, можно назвать хаотическим аттрактором. Заметим, что достаточным условием тонкости областей притяжения устойчивых периодических движений является достаточно большая длина соответствующих им фазовых траекторий. А свойство притяжения хаотическим аттрактором обусловлено не столько устойчивыми периодическими движениями, сколько множеством седловых неустойчивых движений притягивающей гомоклинической структуры и сжатием вблизи них фазового объема.

Таким образом, притягивающие гомоклинические структуры могут породить как стохастические, так и хаотические аттракторы. Пример стохастического аттрактора может дать система, описанная на с. 284, и система Лоренца (с. 334). Хаотический аттрактор имеет место у квадратичного точечного отображения прямой в прямую вида $\bar{x} = ax(1 - x)$ (при $a = 4$ оно было рассмотрено на с. 279—281), а также в неавтономных нелинейных системах второго порядка, например, вида

$$\ddot{\varphi} + 2\delta\dot{\varphi} + (\nu + \mu \sin t) \sin \varphi = 0$$

и других.

Различение хаотических и стохастических колебаний при нахождении их с помощью ЭВМ весьма затруднительно, так как и в том и в другом случае получается сложная, спутанная в клубок фазовая траектория.

Следующим важным моментом в изучении многомерных динамических систем являются закономерности зависимости фазовых траекторий и фазового портрета от параметров или, короче,— теория бифуркаций. Теория бифуркаций простейших установившихся движений —

состояний равновесия и периодических движений — носит законченный характер. Во всяком случае, все основные бифуркации состояний равновесия и периодических движений изучены. Они были изложены выше (§ 1 этой главы). В отношении стохастических и хаотических аттракторов этого сказать нельзя. Многое известно, но многое и неизвестно. Кроме того, все настолько сложно, что с прежней полнотой едва ли может быть изучено. Так что, по-видимому, от этой полноты изучения придется отказаться.

Прежде всего интересно, как возникают хаотические и стохастические аттракторы, как они могут меняться и исчезать. В общих чертах возникновение хаотического и стохастического аттракторов является проявлением неустойчивости и притягивающей гомоклинической структуры. При этом какие-то существовавшие ранее устойчивые состояния равновесия и устойчивые периодические движения должны потерять свою устойчивость или исчезнуть. Однако возможно и жесткое возникновение хаотических и стохастических колебаний. Именно такую возможность демонстрирует рис. 7.38. Здесь появление стохастического аттрактора не сопровождается потерями устойчивости: все движения и до этого были неустойчивые. Относительно хорошо изучено возникновение притягивающей гомоклинической структуры и стохастического аттрактора у уравнения Лоренца (с. 334), несколько хуже — хаотического аттрактора от петли сепаратрисы седловой неподвижной точки (п. 8 § 5 этой главы), хорошо изучен и очень прост широко известный механизм хаотизации и сохастизации движений в результате бесконечной серии бифуркаций удвоения периода устойчивого периодического движения. При каждой бифуркации этой серии устойчивое периодическое движение теряет устойчивость и одновременно рождает устойчивое периодическое движение удвоенного периода (см. с. 249—250), в результате чего период единственного устойчивого движения неограниченно возрастает, что приводит к хаотизации и стохастизации движений в его окрестности. Для последовательных значений μ_s параметра, с изменением которого происходят бифуркации удвоения периода, имеет место закон Фейгенбаума

$$\lim_{s\to\infty} (\mu_{s+1} - \mu_s)(\mu_{s+2} - \mu_{s+1})^{-1} = 4{,}6692\ldots$$

Некоторые другие примеры возникновения притягивающих гомоклинических структур и хаотических и стохастических аттракторов были описаны в § 5 этой главы. С более полными описаниями бифуркаций, приводящих к хаотическим и стохастическим движениям, можно познакомиться по литературе, приведенной в дополнительном списке. Наконец, необходимо отметить, что в настоящее время интенсивно разрабатываются количественные характеристики стохастических и хаотических движений. Об одной из таких характеристик — предельной плотности вероятностей — говорилось (с. 280—283). С остальными можно познакомиться по источникам, содержащимся в дополнительном списке литературы.