§ 9. Зарядовое пространство и изотопический спин. Изотопический спин системы нуклонов

Подобно тому как операторы обычного спина σ_x, σ_y, σ_z образуют спиновый векторный оператор $\hat{s} = {}^1/_2\,\boldsymbol{\sigma}$, так и операторы $\hat{\tau}_1$, $\hat{\tau}_2$, $\hat{\tau}_3$, обладающие математическими свойствами компонент оператора спина, образуют векторный оператор $\hat{\boldsymbol{t}} = {}^1/_2\,\hat{\boldsymbol{\tau}}$ в некотором абстрактном пространстве, которое называют *зарядовым пространством* или *пространством изотопического* (изобарического) *спина.* Координатные оси 1, 2, 3 этого пространства не имеют никакого отношения к осям координат обычного пространства, а изотопический спин t не имеет отношения к вращению в обычном пространстве, а определяет вращения в абстрактном, зарядовом пространстве.

Итак, нуклон можно рассматривать как частицу, обладающую изотопическим спином $t = {}^1/_2$. В состояниях, в которых заряд имеет определенное значение, при определении оператора заряда формулой (8,4) необходимо выбирать матрицы (8,2) в таком представлении, в котором диагональна $\hat{\tau}_3$. Тогда значения третьей компоненты изотопического спина $t_3 = {}^1/_2$, $-{}^1/_2$ будут определять соответственно протонное и нейтронное состояния нуклона. Состояние антинейтрона характеризуется значением $t_3 = {}^1/_2$, а состояние антипротона значением $t_3 = -{}^1/_2$.

Операторы изотопических векторов можно складывать по правилам векторного сложения и умножать друг на друга. В частности, скалярное произведение двух векторов $\boldsymbol{t}(1)$ и $\boldsymbol{t}(2)$ приводит к величине

$$\boldsymbol{t}(1)\,\boldsymbol{t}(2) = t_1(1)\,t_1(2) + t_2(1)\,t_2(2) + t_3(1)\,t_3(2),$$

остающейся неизменной при операциях поворота в зарядовом пространстве.

Определим оператор изотопического спина ядра, состоящего из A нуклонов, соотношением

$$\hat{\boldsymbol{T}} = \sum_{i=1}^{A} \hat{\boldsymbol{t}}\,(i). \tag{9,1}$$

Оператор заряда ядра будет согласно (8,4) иметь вид

$$\hat{q} = e\sum_{i=1}^{A}\left(\frac{1}{2} + \hat{t}_3\,(i)\right) = e\left(\frac{A}{2} + \hat{T}_3\right), \tag{9,2}$$

где $\hat{T}_3 = \sum\limits_i \hat{t}_3\,(i)$. Собственное значение $\hat{T}_3$ определяется числом нейтронов и протонов в ядре

$$T_3 = \frac{Z-N}{2} = Z - \frac{A}{2}.$$

Операторы $\hat{T}_3$ и $\hat{\boldsymbol{T}}^2$ коммутируют между собой, поэтому соответствующие им физические величины могут иметь одновременно определенные значения.

Выясним, при каких условиях T_3 и $\boldsymbol{T}^2$ будут интегралами движения в стационарных состояниях ядра. Для этого надо выяснить вопрос о возможности коммутации $\hat{T}_3$ и $\hat{\boldsymbol{T}}^2$ с оператором Гамильтона ядра. Поскольку в стационарном состоянии число нуклонов и заряд остаются неизменными, то собственные значения T_3 должны быть интегралами движения, соответствующими закону сохранения заряда системы *). Следовательно, оператор Гамильтона H, описывающий состояние ядра, должен коммутировать с $\hat{T}_3$.

Полный оператор Гамильтона ядра можно записать в виде

$$H = \hat{K} + W + V_Q + V_{я}, \tag{9,3}$$

где оператор кинетической энергии

$$\hat{K} \equiv -\frac{\hbar^2}{2}\sum_{\alpha=1}^{A}\left\{\frac{\hat{\tau}_p(\alpha)}{M_p} + \frac{\hat{\tau}_n(\alpha)}{M_n}\right\}\nabla_\alpha^2 = \\ = -\frac{\hbar^2(M_n+M_p)}{4M_nM_p}\sum_\alpha \nabla_\alpha^2 - \frac{\hbar^2(M_p-M_n)}{2M_pM_n}\sum_\alpha \hat{t}_3(\alpha)\nabla_\alpha^2; \tag{9,4}$$

оператор энергии покоя свободных протонов и нейтронов

$$W \equiv \sum_{\alpha=1}^{A}\{M_p\hat{\tau}_p + M_n\hat{\tau}_n\}c^2 = \frac{A}{2}(M_n+M_p)c^2 - (M_n - M_p)c^2\hat{T}_3; \tag{9,5}$$

оператор кулоновского взаимодействия протонов

$$V_Q \equiv \frac{e^2}{2}\sum_{\alpha,\beta}{}' \frac{\hat{\tau}_p(\alpha)\hat{\tau}_p(\beta)}{r_{\alpha\beta}} = \frac{e^2}{2}\sum{}' \frac{\left(\frac{1}{2}+\hat{t}_3(\alpha)\right)\left(\frac{1}{2}+\hat{t}_3(\beta)\right)}{r_{\alpha\beta}}. \tag{9,6}$$

Здесь и в дальнейшем знак штрих у суммы указывает, что суммирование производится по α и β при условии $\alpha \neq \beta$. $V_я$ — оператор потенциальной энергии специфического ядерного взаимодействия между нуклонами. Согласно *гипотезе зарядовой независимости ядерных сил* оператор $V_я$ должен коммутировать как с оператором $\hat{T}_3$, так и с оператором $\hat{\boldsymbol{T}}^2$.

Полный гамильтониан (9,3) коммутирует с $\hat{T}_3$, но не коммутирует с оператором $\hat{T}^2$. Однако при $e=0$ и $M_p = M_n$ полный гамильто-

*) Мы не будем рассматривать явлений при очень больших энергиях, когда в реакциях принимают участие нестабильные частицы (тяжелые мезоны и гипероны). Эти явления могут происходить с нарушением закона сохранения T_3, но обязательно с сохранением заряда системы. При описании таких явлений оператор заряда и оператор T_3 должны рассматриваться как независимые операторы.

ниан H перейдет в гамильтониан *)

$$H_0 = -\frac{\hbar^2}{4}\left(\frac{M_n+M_p}{M_nM_p}\right)\sum_a \nabla_\alpha^2 + V_я + A\frac{M_n+M_p}{2}c^2. \qquad (9,7)$$

Гамильтониан H_0 коммутирует с оператором квадрата полного изотопического спина ядра $\hat{T}^2$ и оператором его проекции $\hat{T}_3$.

Итак, полный гамильтониан ядра может быть представлен в виде

$$H = H_0 + H' + H'', \qquad (9,8)$$

где

$$H' \equiv -c^2(M_n - M_p)\hat{T}_3 \qquad (9,9)$$

и

$$H'' \equiv \frac{e^2}{2}\sum_{\alpha,\beta}{}' \frac{\left(\frac{1}{2}+\hat{t}_3(\alpha)\right)\left(\frac{1}{2}+\hat{t}_3(\beta)\right)}{r_{\alpha\beta}} + \frac{\hbar^2(M_n-M_p)}{2M_nM_p}\sum_{\alpha=1}^{A}\hat{t}_3(\alpha)\nabla_\alpha^2 \qquad (9,9а)$$

— операторы, стремящиеся к нулю при $e \to 0$ и $M_n - M_p \to 0$. Оператор H'' не коммутирует с $\hat{T}^2$, поэтому в общем случае оператор Гамильтона ядра (9,8) не коммутирует с $\hat{T}^2$ и квадрат изотопического спина ядра не является интегралом движения. Однако в случае легких ядер оператор H'' мал и в первом приближении может быть отброшен. В следующих приближениях эффект оператора H'' может быть учтен методом теории возмущений.

Будем далее называть *приближением зарядовой независимости гамильтониана* такое приближение, при котором полный гамильтониан ядра (9,8) заменяется гамильтонианом H_0. Тогда полный изотопический спин ядра T^2 будет интегралом движения, и следовательно, наряду с другими интегралами движения E, J, T_3 и т. д. стационарное состояние ядра будет определяться значениями T.

При данном значении полного изотопического спина T ядра возможны $2T+1$ различных значений T_3. Наборы состояний с одним T и разными значениями T_3 называют *зарядовыми мультиплетами*. При $T=0$ имеем *зарядовый синглет*, при $T={}^1/_2$ — *зарядовый дублет*, при $T=1$ — *зарядовый триплет* и т. д. В приближении зарядовой независимости гамильтониана разным составляющим одного зарядового мультиплета будут соответствовать состояния с одинаковой энергией, спином, четностью и т. д., так как оператор H_0 не содержит оператора $\hat{T}_3$. Учет члена H' в следующих приближениях приведет

*) Согласно современной квантовой электродинамики разница масс протона и нейтрона обусловлена их взаимодействием с электромагнитным полем; поэтому при $e \to 0$ и $M_n - M_p \to 0$. Последний член в гамильтониане (9,7) не зависит от координат и может быть опущен при изменении начала отсчета энергии.

к расщеплению мультиплета на отдельные составляющие. В тяжелых ядрах оператор H'' не является малой величиной, поэтому T^2 не будет сохраняться и нельзя использовать полный изотопический спин для характеристики стационарных состояний.

Операторы изотопического спина $\hat{T}$ в зарядовом пространстве соответствуют операциям поворота. Поэтому приближение зарядовой независимости гамильтониана соответствует неизменности физических свойств системы при операциях поворота в зарядовом пространстве. При операциях поворота волновая функция нейтрона (или протона) переходит в линейную комбинацию волновых функций нейтрона и протона. Поскольку в приближении зарядовой независимости нейтрон и протон физически эквивалентны, то линейная комбинация нейтронной и протонной волновых функций должна давать те же результаты, что и волновые функции протона и нейтрона в отдельности. Следует, конечно, помнить, что зарядовая независимость не является строгой даже в случае легких ядер. Слабые электромагнитные взаимодействия и разность масс протона и нейтрона, хотя и действуют в противоположных направлениях, компенсируют друг друга только в особых случаях. Электромагнитное взаимодействие (и разность масс M_p и M_n) выделяют одно из направлений (ось 3) в зарядовом пространстве, т. е. делают различимыми протоны и нейтроны.

Гамильтониан H_0 инвариантен относительно одновременной перестановки всех пяти координат (x, y, z, t_3, s_z) любых двух нуклонов. Поэтому оператор $P(\boldsymbol{r}, s, t)$ одновременной перестановки пяти координат двух любых нуклонов коммутирует с H_0. Следовательно, собственные значения оператора $P(\boldsymbol{r}, s, t)$, равные ± 1, будут интегралами движения в приближении зарядовой независимости гамильтониана. Собственному значению -1 соответствуют антисимметричные волновые функции относительно одновременной перестановки пяти координат пары нуклонов; собственному значению $+1$ — симметричные функции. Поскольку протоны и нейтроны в отдельности удовлетворяют принципу Паули, то одновременная перестановка пяти координат пары протонов (или нейтронов), соответствующая перестановке только спиновых и пространственных координат, должна приводить к изменению знака волновой функции. Таким образом, волновые функции системы нейтронов и протонов должны быть антисимметричны относительно одновременной перестановки пяти координат пары нуклонов одного типа. Поскольку в приближении зарядово независимого гамильтониана перестановка пары нейтронов или протонов не должна отличаться от перестановки пяти координат протона и нейтрона, то в этом приближении волновая функция ядра должна быть антисимметричной относительно перестановки пяти координат любой пары нуклонов в ядре. Если состояния системы нуклонов описываются волновыми функциями, антисимметричными относительно перестановки пяти координат любой пары нуклонов, то говорят, что система удовлетворяет *обобщенному принципу Паули*.