ГЛАВА III

ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЕ СОСТОЯНИЯ ЛЕГКИХ ЯДЕР

§ 11. Элементарная теория дейтрона

Ядро тяжелого водорода называется *дейтроном*. Дейтрон состоит из нейтрона и протона. Из эксперимента известно, что энергия связи дейтрона равна 2,23 *Мэв*; спин равен 1, магнитный момент $\mu \approx 0{,}86\,\mu_0$; квадрупольный электрический момент $Q_0 = 2{,}74 \cdot 10^{-27}$ *см*^{2}.

Для построения элементарной теории дейтрона предположим, что ядерные силы, действующие между протоном и нейтроном, можно описать потенциалом $V(r)$. Как мы увидим ниже, величина ядерных сил и их радиус действия зависят от взаимной ориентации спинов нуклонов. Опыт показывает, что ядерные силы между двумя нуклонами очень велики при малых расстояниях и практически равны нулю при расстояниях, превышающих их радиус действия d.

Вследствие малого радиуса действия ядерных сил и их большой величины результаты расчета основного состояния дейтрона, соответствующего малой энергии связи, слабо зависят от деталей зависимости потенциала $V(r)$ от расстояния. Поэтому можно выбрать простейшую зависимость в виде прямоугольной потенциальной ямы:

$$V(r) = \begin{cases} -V_0, & \text{если } r < d, \\ 0, & \text{если } r > d. \end{cases}$$

Энергетические состояния системы двух нуклонов в системе центра инерции могут быть получены из уравнения Шредингера:

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2\mu}\Delta + V(r) - E\right)\psi(\boldsymbol{r}) = 0,$$

где $\mu = \frac{M}{2}$ — приведенная масса. Будем искать решение в виде

$$\psi(\boldsymbol{r}) = \sum_{l,\,m} \frac{u_l(r)}{r} Y_{lm}(\theta, \varphi);$$

тогда для функции u_l получим уравнение

$$\frac{d^2u_l}{dr^2} + \frac{2\mu}{\hbar^2}\left\{E - V(r) - \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2\mu r^2}\right\}u_l = 0 \qquad (11,1)$$

с граничным условием

$$u_l(0) = 0. \tag{11,2}$$

Связанные состояния возможны при $E < 0$, из них нижайшее энергетическое состояние соответствует $l = 0$, так как при $l \neq 0$ появляется дополнительная положительная энергия $\frac{\hbar^2 l(l+1)}{2\mu r^2}$, соответствующая «центробежному» отталкиванию нуклонов.

Поскольку координатная волновая функция основного состояния нейтрона ($l = 0$) соответствует S-состоянию (функция симметрична относительно перестановки пространственных координат), а спиновая функция должна соответствовать триплетному спиновому состоянию $S = 1$, так как полный момент дейтрона J равен 1, то функция изотопического спина должна быть антисимметричной относительно перестановки зарядовых переменных, т. е. принадлежать зарядовому синглету ($T = 0$).

Введем обозначения:

$$\varepsilon = -E, \quad \frac{2\mu}{\hbar^2}[V_0 - \varepsilon] = \alpha^2, \quad \frac{2\mu\varepsilon}{\hbar^2} = \beta^2. \tag{11,3}$$

Тогда при $l = 0$ и $r < d$ уравнение (11,1) примет следующий вид:

$$\frac{d^2u}{dr^2} + \alpha^2 u = 0;$$

его решением будет

$$u = A \sin \alpha r + B \cos \alpha r.$$

Из граничного условия (11,2) следует, что $B = 0$, поэтому при $r < d$ получим:

$$u = A \sin \alpha r. \tag{11,4}$$

В области $r > d$ уравнение (11,1) имеет вид

$$\frac{d^2u}{dr^2} - \beta^2 u = 0,$$

а его решение

$$u = ce^{-\beta r} + c'e^{\beta r}.$$

Из условия стремления к нулю $u(r)$ при $r \to \infty$ следует, что $c' = 0$. Таким образом, при $r > d$

$$u = c \exp(-\beta r). \tag{11,5}$$

Величина $\beta^{-1} = \hbar(M\varepsilon)^{-1/2}$ определяется только энергией связи дейтрона; при $\varepsilon = 2{,}23$ *Мэв* $\beta^{-1} \approx 4{,}31 \cdot 10^{-13}$ *см*. Из (11,5) следует, что величину β^{-1} можно рассматривать как *эффективный радиус дейтрона*.

Приравнивая логарифмические производные решений (11,4) и (11,5) на границе двух областей, при $r = d$ получим равенство

$$\alpha \operatorname{ctg} \alpha d = -\beta \quad \text{или} \quad \alpha d \operatorname{ctg} \alpha d = -\beta d.$$

Полагая $\xi = \alpha d$, $\eta = \beta d$, находим:

$$-\xi \operatorname{ctg} \xi = \eta, \tag{11,6}$$

где

$$\xi^2 + \eta^2 = \frac{2\mu V_0 d^2}{\hbar^2}. \tag{11,6a}$$

Уравнение (11,6) можно решить графически (рис. 2). Из рисунка видно,

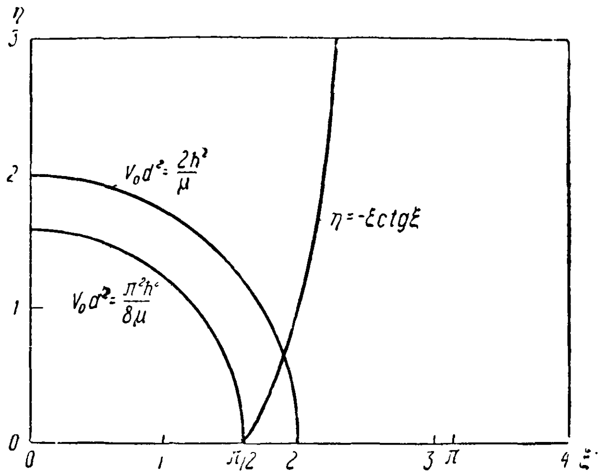

Рис 2. Графическое решение трансцендентного уравнения $\eta = -\xi \operatorname{ctg} \xi$.

что уравнение (11,6) будет иметь одно решение, если $\frac{\pi^2}{4} \leqslant \xi^2 + \eta^2 \leqslant \pi^2$, или, учитывая (11,6а), получим:

$$\frac{\pi^2\hbar^2}{8\mu} \leqslant V_0 d^2 \leqslant \frac{\pi^2\hbar^2}{2\mu}. \tag{11,7}$$

Из неравенства (11,7) видно, что при заданном радиусе действия ядерных сил первый связанный уровень появляется только при глубине ямы, превышающей $V_{\text{кр}} = \frac{\pi^2\hbar^2}{4M \cdot d^2}$. Если принять $d = 2 \cdot 10^{-13}$ *см*, то $V_{\text{кр}} = 25$ *Мэв*. Зная энергию связи ε дейтрона, можно определить только произведение $V_0 d^2$, а не V_0 и d в отдельности.

При ядерных силах нулевого радиуса волновая функция дейтрона в основном состоянии имела бы вид:

$$\psi(r)=\frac{u(r)}{r}Y_{00}=\sqrt{\frac{\beta}{2\pi}}\frac{\exp(-\beta r)}{r}\;{}^{*}). \tag{11,8}$$

Эффективный радиус дейтрона β^{-1} превышает радиус действия ядерных сил d, т. е. дейтрон представляет собой сравнительно «*рыхлую*» систему. Вследствие малого радиуса действия ядерных сил, энергия связи не равна по порядку величины энергии взаимодействия V_0, а значительно меньше ее.

Можно легко показать, что в предположении центрального характера ядерных сил у дейтрона не существует состояний с $l \neq 0$; действительно, для грубой оценки положения уровня с орбитальным моментом $l \neq 0$ вычислим значение энергии отталкивания $\frac{\hbar^2 l(l+1)}{2\mu r^2}$, возникающей из-за центробежных эффектов при $r=\beta^{-1}$. Полагая, например, $l=1$, имеем $\left\{\frac{\hbar^2}{\mu r^2}\right\}_{r=\beta^{-1}}=\frac{\hbar^2\beta^2}{\mu}=2\varepsilon$. Таким образом, если силы взаимодействия между протоном и нейтроном центральные, уже P-состояние должно лежать в области непрерывного спектра

Опыт показывает, что связанное состояние в дейтроне наблюдается только для случая, если полный спин дейтрона равен 1 (триплетное спиновое состояние), в синглетном же спиновом состоянии нет состояний с отрицательной энергией. Это указывает на отличие (при $l=0$) ядерных сил взаимодействия в синглетном и триплетном спиновых

---

*) Функция (11,8) нормирована к единице. Вследствие экспоненциального убывания этой функции в интеграле $\int_0^\infty |\psi|^2 r^2 dr$ наиболее существенную роль играет область интегрирования $r \approx 0$. Именно в этой области функция (11,8) сильно отличается от действительной функции. Поэтому лучше проводить нормировку дейтронной функции не к единице, а таким образом, чтобы приближенная функция совпадала с точной функцией на больших расстояниях. Для этого, как показал Я. Смородинский [8], надо положить

$$4\pi\int_0^\infty |\psi r|^2 dr=\{1{,}23\sqrt{2\beta}\}^{-2}.$$

Поэтому состояние дейтрона в приближении сил нулевого радиуса следует описывать волновой функцией

$$\psi=\frac{u(r)}{r\sqrt{4\pi}},$$

где

$$u(r)=1{,}23\sqrt{2\beta}\exp(-\beta r)\approx\sqrt{3\beta}\exp(-\beta r).$$

состояниях. Из неравенства (11,7), определяющего условия образования связанного состояния, следует:

$$(V_0 d^2)_t > \frac{\pi^2\hbar^2}{4M} \text{ — для триплетного спинового состояния;}$$

$$(V_0 d^2)_s < \frac{\pi^2\hbar^2}{4M} \text{ — для синглетного спинового состояния.}$$

Наиболее общим видом центрального потенциала взаимодействия между нуклонами, зависящим от координат и спинов нуклонов, является выражение

$$V(r_1,\ \sigma_1;\ r_2,\ \sigma_2) = \alpha(r_{12}) + \beta(r_{12})\,\boldsymbol{\sigma}_1\boldsymbol{\sigma}_2. \qquad (11,9)$$

Выражая полный спин системы через $\boldsymbol{\sigma}_1$ и $\boldsymbol{\sigma}_2$ с помощью равенства $\boldsymbol{S} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{\sigma}_1 + \boldsymbol{\sigma}_2)$, находим:

$$\boldsymbol{\sigma}_1\boldsymbol{\sigma}_2 = \begin{cases} -3 & \text{в синглетном спиновом состоянии;} \\ 1 & \text{в триплетном спиновом состоянии.} \end{cases}$$

Итак, потенциал взаимодействия между нуклонами в синглетном и триплетном спиновых состояниях выражаются через функции $\alpha(r_{12})$ и $\beta(r_{12})$ простыми соотношениями:

$$V_s = \alpha(r_{12}) - 3\beta(r_{12}),$$
$$V_t = \alpha(r_{12}) + \beta(r_{12}).$$

Если ограничиться простейшей формой зависимости потенциала от радиуса (в виде прямоугольной ямы определенного радиуса), то из значения энергии связи дейтрона можно определить только произведение квадрата радиуса на «глубину» потенциальной ямы для триплетного спинового взаимодействия.

Более полные сведения о потенциале взаимодействия двух нуклонов можно получить при изучении рассеяния нуклонов на нуклонах (см. главу VII).

§ 12. Нецентральный характер ядерных сил

Наличие квадрупольного момента $Q = 2{,}74 \cdot 10^{-27}\ см^2$ у основного состояния дейтрона указывает на то, что это состояние не может быть чистым S-состоянием, а должно содержать и состояния с орбитальным моментом не ниже $l = 2$. Отличие магнитного момента дейтрона ($\mu_d = 0{,}86\mu_0$) от суммы магнитных моментов протона и нейтрона ($\mu_p + \mu_n = 0{,}88\mu_0$) также указывает на то, что в значение магнитного момента дейтрона вносит небольшой вклад орбитальное движение нуклонов, чего не было бы в чистом S-состоянии.

Для объяснения квадрупольного момента дейтрона приходится допустить, что ядерные силы между двумя нуклонами не являются