

Полученные результаты легко обобщаются на случай нечетных ядер. Спин K нечетного аксиально-симметричного ядра в основном состоянии определяется суммой проекций моментов количества движения нуклонов на аксиальную ось ядра $K = \sum_i \Omega_i$. Полный момент ядра определяется квантовым числом $J \geq K$. В этом случае удобно нормировать энергию (19,21) так, чтобы при $J = K$ она равнялась нулю, т. е. положить

$$E_{\text{вр}} = \frac{\hbar^2}{2I} \{J(J+1) - K(K+1)\}. \quad (19,23)$$

Тогда полная энергия коллективных движений ядра примет вид

$$E = \frac{B}{2} \dot{\beta}^2 + W_k(\beta) + \frac{\hbar^2 \{J(J+1) - K(K+1)\}}{2I}, \quad (19,24)$$

где

$$W_k(\beta) = W_{\gamma_0}(\beta) + \frac{\hbar^2 K(K+1)}{2I}$$

— потенциальная энергия, зависящая от β и от состояния движения внешних нуклонов.

§ 20. Вращательная энергия и момент инерции несферических ядер

Возможность выделения энергии вращения ядра из общей энергии возбуждения осуществляется только у ядер, значительно отличающихся от сферических. В самом деле, как показал Вигнер [50], волновая функция любой системы частиц, соответствующая полному моменту J , его проекции M на некоторое выделенное направление и другим возможным интегралам движения, которые мы для краткости обозначим одной буквой α , может быть представлена в виде

$$\Psi_{JM\alpha}(r_1, r_2, \dots, r_N) = \sum_K \varphi_{MK,\alpha}(\dots, q_i, \dots) D_{MK}^J(\theta_i),$$

где $D_{MK}^J(\theta_i)$ — волновая функция, зависящая от эйлеровых углов θ_i , определяющих ориентацию осей координат $\xi\eta\zeta$, связанных с системой частиц; $\varphi_{MK,\alpha}(\dots, q_i, \dots)$ — волновые функции, зависящие от координат частиц относительно подвижной системы координат $\xi\eta\zeta$. Квантовое число K определяет проекцию момента J на ось ζ подвижной системы координат.

Если система частиц в состоянии J, α обладает аксиальной осью симметрии и значительно отличается от сферической формы, то K будет хорошим квантовым числом. В этом случае система частиц может находиться в состояниях, определяемых квантовыми числами α, J, M, K , которым будет соответствовать волновая функция

$$\Psi_{\alpha, JM}(\dots, r_i, \dots) = \varphi_{MK,\alpha}(\dots, q_i, \dots) D_{MK}^J(\theta_i), \quad (20,1)$$

а энергия системы будет равна сумме энергии вращения и внутренней энергии.

Если система частиц обладает кроме оси симметрии еще и центром симметрии, то координатная система $\xi\eta\zeta$ определяется только с точностью до инверсии направления осей ξ, η, ζ (положение осей ξ, η при этом остается вообще неопределенным). Волновая функция (20,1) должна быть инвариантной относительно таких преобразований осей ξ, η, ζ (следовательно, и эйлеровых углов θ_i). Операции инверсии осей ξ, η, ζ соответствует преобразование эйлеровых углов $\{\theta_i\} \equiv \varphi, \theta, \psi \rightarrow \varphi + \pi, \pi - \theta, \pi - \psi$ и волновых функций $D'_{MK} \rightarrow (-1)^{J+K} D'_{M, -K}$. Поскольку физические результаты не должны зависеть от неоднозначности в выборе направлений осей ξ, η, ζ , то волновую функцию (20,1) следует писать в виде

$$\Psi_{\alpha, JM}(\dots r_i \dots) = \varphi_{MK\alpha}(q) \{D'_{MK}(\theta_i) + (-1)^{J+K} D'_{M, -K}(\theta_i)\}. \quad (20,1a)$$

В этом случае четность волновой функции (20,1a) относительно преобразования инверсии всех координат частиц будет зависеть только от четности волновой функции $\varphi_{MK, \alpha}(\dots q \dots)$, определяющей внутреннее движение. Из (20,1a) следует непосредственно, что при $K=0$ (четно-четные ядра) возможны только состояния с четным значением полного момента, т. е. $J=0, 2, 4, \dots$

Таким образом, энергии вращения

$$E_{\text{вр}} = \frac{\hbar^2}{2I} \{J(J+1) - K(K+1)\} \quad (20,2)$$

аксиально-симметричного ядра будет соответствовать волновая функция типа (20,1a)*. Если возможно выделение коллективных степеней свободы, соответствующих колебательному состоянию ядра, то волновую функцию внутреннего движения можно приближенно написать в виде произведения волновой функции $\Phi(\beta)$, определяющей колебания поверхности ядра, на волновую функцию $\chi_{K, \alpha}$, определяющую конфигурацию нуклонов.

Формула (20,2) определяет энергию вращения ядра только в случае, когда спин ядра больше $1/2$. При $K=1/2$, как было показано выше, средняя энергия взаимодействия внешнего нуклона с поверхностью ядра равна нулю. В этом случае энергия вращения, как показали О. Бор и Моттельсон [44], определяется формулой

$$E_{\text{вр}} = \frac{\hbar^2}{2I} \left\{ J(J+1) + a(-1)^{J+1/2} \left(J + \frac{1}{2} \right) \right\}, \quad (20,3)$$

где a — постоянная, зависящая от внутреннего состояния ядра.

* Энергия вращения неаксиальных четно-четных ядер вычислялась в работе А. Давыдова и Г. Филиппова (ЖЭТФ 34, вып. 8, 1958).

Примером вращательной полосы ядра со спином $\frac{1}{2}$ является изображенная на рис. 12 схема уровней Pu^{239} , которая хорошо описывается формулой (20,3), если положить

$7/2^+ \text{ ————— } 75,67$
 $5/2^+ \text{ ————— } 67,25$

$$\frac{\hbar^2}{2I} = 6,25 \text{ кэв}, \quad a = -0,58.$$

$3/2^+ \text{ ————— } 7,65$
 $1/2^+ \text{ ————— } 0$

Рис. 12. Схема вращательных уровней энергии ядра Pu^{239} .

Используя экспериментальные данные о вращательных уровнях энергии, можно с помощью формулы (20,2) вычислить момент инерции ядра.

На рис. 13 приведены значения моментов инерции ядер, вычисленные из данных о первом возбужденном $E(2^+)$ -состоянии четно-четных ядер. Рисунок изображает зависимость величины моментов инерции от числа нейтронов в интервале между двумя заполненными нейтронными оболочками (82 — 126N). Экспериментальные данные взяты из работ [51, 52].

В § 18 показано, что в гидродинамическом приближении момент инерции I связан с параметром деформации β соотношением

$$I = 3B\beta^2, \quad \text{где } B = \frac{3}{8\pi} MAR_0^2.$$

Учитывая связь момента инерции с энергией первого вращательного уровня четно-четного ядра $E(2^+) = \frac{3\hbar^2}{I}$, можно написать

$\beta^2 = \frac{8\pi\hbar^2}{3MAR_0^2 E(2^+)}$. Полагая $R_0 = 1,2A^{1/3} \cdot 10^{-13}$ см и вычисляя числовой множитель, получим формулу

$$\beta^2 \approx \frac{2,4 \cdot 10^5}{A^{1/3} E_{(кэв)}(2^+)}, \quad (20,4)$$

позволяющую найти β^2 для ядра с массовым числом A , если известна энергия $E(2^+)$ первого вращательного состояния.

На рис. 14 приведены значения β_0^2 , полученные с помощью формулы (20,4). Эти значения отмечены кружками и отсчитываются по левой шкале. На том же рисунке приведены значения β_Δ^2 , отмеченные треугольниками и отсчитываемые по правой шкале. Эти значения получены из данных о внутренних квадрупольных моментах ядер, если предположить, что заряд равномерно распределен по объему ядра.

Сравнение значений β_0^2 и β_Δ^2 показывает, что поведение обеих величин в зависимости от числа нейтронов в ядре весьма похоже: обе

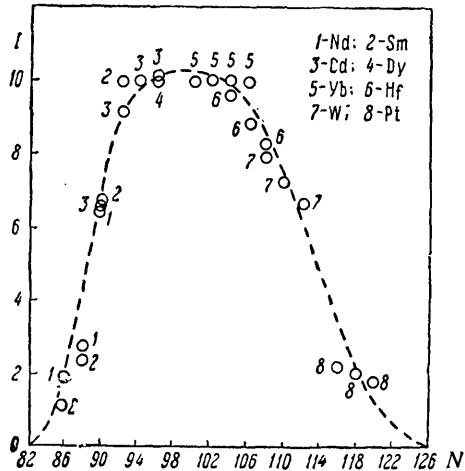


Рис. 13. Эффективный момент инерции четно-четных ядер (в единицах $10^{-46} \text{ з.с.м.}^2$) как функция числа нейтронов.

величины имеют максимум в области $N \sim 95$ и 145 . Однако абсолютные значения β_0^2 и β_Δ^2 не совпадают. Для ядер с числом нейтронов $85-115$ значение β_0^2 примерно в 5 раз превышает значение β_Δ^2 ; в области же $N > 135$ это превышение еще больше.

Значение β_Δ^2 характеризует распределение (квадрупольного типа) заряда внутри ядра. Неравенство $\beta_0^2 \neq \beta_\Delta^2$ может указывать либо на неприменимость гидродинамического описания для вычисления момента инерции, либо на отличие распределения массы от распределения заряда внутри ядра. В свете современных данных вторая интерпретация маловероятна.

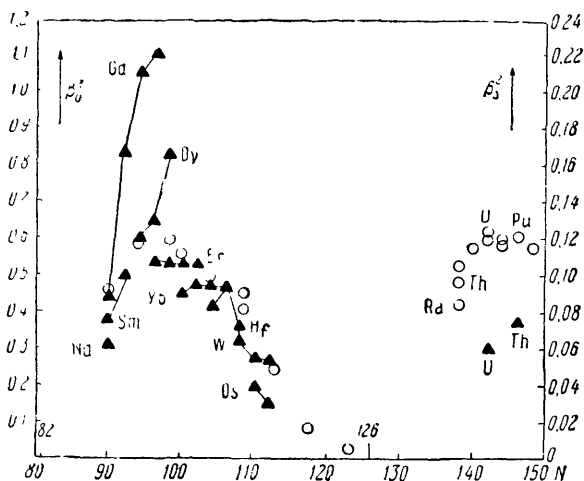


Рис. 14. Значения квадрата параметра, характеризующего отклонение формы ядра от сферы. Значения β_0^2 , отмеченные кружками, отсчитываются по левой шкале. Они получены из данных о энергии возбуждения первого уровня. Значения β_Δ^2 , отмеченные треугольниками, отсчитываются по правой шкале. Они получены из данных о квадрупольных электрических моментах при измерении вероятности возбуждения.

Если предположить, что распределение заряда и массы одинаково, то значение β_Δ^2 будет характеризовать отклонение формы ядра от сферы. Вычислив момент инерции ядра по формуле гидродинамического приближения $I = 3B\beta_\Delta^2$ для данного значения β_Δ^2 и сравнив его с экспериментальным значением, полученным из данных о энергии первого вращательного уровня, можно сделать заключение о применимости гидродинамического приближения к ядру. Такое сравнение делается на рис. 15, где пунктирной линией изображено отношение момента инерции, вычисленного по формуле $I = 3B\beta_\Delta^2$, к моменту инерции твердого тела $I_{\text{тверд}}$, а точками изображено отношение момента инер-

ции, определенного из значения энергии $E(2^+)$ для ядра с заданным значением β_{Δ}^2 , к моменту инерции твердого тела.

В связи с большой грубостью гидродинамической модели ядра для описания вращения в последнее время появились работы, в которых делаются попытки вычисления момента инерции ядра при использова-

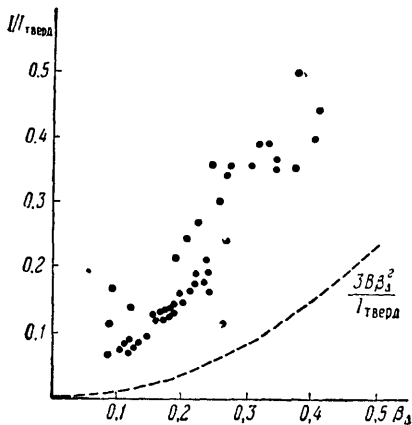


Рис. 15. Точки изображают отношение момента инерции, вычисленного из данных о первом возбужденном уровне, к моменту инерции твердого тела в зависимости от параметров деформации, полученных из данных о времени жизни уровня. Пунктирной линией изображено отношение момента инерции гидродинамической теории к моменту инерции твердого тела.

нии других модельных представлений. Наиболее строгая постановка задачи заключалась бы в вычислении энергии системы нуклонов в состояниях, имеющих определенные значения момента количества движения, и в приближенном представлении этой энергии в виде суммы внутренней энергии относительно системы координат, связанной с ядром, и энергии вращения ядра. Практическое решение этой задачи осуществить трудно (см., например, работу А. С. Давыдова и Г. Ф. Филиппова [53] и работы Тамура, Натафа, Липкина и др. [54]). Менее строгая постановка задачи была предложена Инглисом [55]. Для вычисления момента инерции ядра Инглис рассматривает систему частиц, находящихся в медленно вращающемся с постоянной угловой скоростью поле, которое выбирается в виде трехмерного аксиально-симметричного осциллятора. Вычислив

изменение энергии системы, обусловленное вращением, можно определить эффективный момент инерции такой системы частиц. Модель Инглиса часто кратко называют «*моделью принудительного вращения*» (Cranking model). В этом названии отмечается основной недостаток модели, заключающийся в том, что координаты, описывающие поле, являются лишними переменными задачи и их изменение во времени (вращение) задается извне.

Для иллюстрации метода Инглиса рассмотрим простейший случай системы, состоящей из одной частицы, находящейся во вращающемся вокруг оси z с угловой скоростью ω поле V . Состояние системы в неподвижной системе координат будет определяться уравнением Шредингера

$$\left[i\hbar \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)_{\varphi} - K - V(r, \theta, \varphi - \omega t) \right] \psi(r, \theta, \varphi, t) = 0, \quad (20,5)$$

где значок φ у производной по времени означает, что эта производная

берется при условии, что φ является независимой переменной. Преобразуем уравнение (20,5) к вращающейся вместе с полем системе координат:

$$r' = r, \quad \theta' = \theta, \quad \varphi' = \varphi - \omega t. \quad (20,6)$$

В этой системе независимыми переменными будут r' , θ' , φ' ; дифференцирование по времени при этих условиях обозначим $\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_{\varphi'}$. Учитывая (20,6), имеем:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_{\varphi} = \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_{\varphi'} + \omega \frac{\partial}{\partial \varphi'}.$$

Таким образом, уравнение (20,5) во вращающейся системе координат можно записать в виде

$$\left[i\hbar \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_{\varphi'} - H' + \omega \frac{\partial}{\partial \varphi'} \right] \psi(r', \theta', \varphi', t) = 0, \quad (20,7)$$

где

$$H' = K + V(r', \theta', \varphi')$$

— оператор Гамильтона, не зависящий явно от времени. Вводя оператор проекции на ось z момента количества движения

$$j_z = -i\hbar \frac{\partial}{\partial \varphi'},$$

перепишем уравнение (20,7) в виде

$$\left[i\hbar \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_{\varphi'} - H' - \omega j_z \right] \psi(r', \theta', \varphi', t) = 0. \quad (20,8)$$

Рассмотрим стационарные решения уравнения (20,8) во вращающейся системе координат, т. е. положим

$$\psi = \Phi(r', \theta', \varphi') \exp\left(-i \frac{E't}{\hbar}\right). \quad (20,9)$$

Подставляя (20,9) в (20,8), находим уравнение для Φ :

$$(H' - E') \Phi = -\omega j_z \Phi. \quad (20,10)$$

При малой скорости вращения правая часть (20,10) мала и задачу можно решать методом теории возмущений. В нулевом приближении

$$(H' - \epsilon_n) \Phi_n^0 = 0. \quad (20,11)$$

Если ϵ_0 соответствует нижней энергии системы при $\omega = 0$, то при малом ω волновая функция может быть записана в виде

$$\Phi = a_0 \Phi_0^0 + \sum_{n \neq 0} a_n \Phi_n^0,$$

где

$$|a_0|^2 = 1 - \sum_{n \neq 0} |a_n|^2, \quad a_n = \omega \frac{(0|J_z|n)}{\epsilon_0 - \epsilon_n} \ll 1.$$

Энергия системы в штрихованной системе координат теперь определится равенством

$$E' = \int \Phi H \Phi d\tau = |a_0|^2 \epsilon_0 + \sum_{n \neq 0} |a_n|^2 \epsilon_n = \epsilon_0 - \omega^2 \sum_{n \neq 0} \frac{|(0|J_z|n)|^2}{\epsilon_n - \epsilon_0}.$$

Если согласно Инглису [55] изменение энергии частицы, обусловленное вращением поля, рассматривать как энергию вращения, т. е. для энергии в неподвижной системе координат написать:

$$E = \epsilon_0 + \omega^2 \sum_{n \neq 0} \frac{|(0|J_z|n)|^2}{\epsilon_n - \epsilon_0},$$

то из равенства

$$\frac{\omega^2 I}{2} = \omega^2 \sum_{n \neq 0} \frac{|(0|J_z|n)|^2}{\epsilon_n - \epsilon_0}$$

получим формулу, определяющую эффективный момент инерции*):

$$I = 2 \sum_{n \neq 0} \frac{|(0|J_z|n)|^2}{\epsilon_n - \epsilon_0}. \quad (20,12)$$

Если потенциал $V(r, \theta, \varphi)$ имеет аксиальную ось симметрии и ось z направлена вдоль этой оси, то все недиагональные матричные элементы $(0|J_z|n)$ равны нулю. Таким образом, (20,12) определяет момент инерции для вращения, перпендикулярного к оси симметрии ядра.

Простым обобщением приведенного выше вывода можно получить выражение для эффективного момента инерции системы частиц, движущихся во внешнем вращающемся поле. Момент инерции системы частиц также выражается формулой (20,12), если \hat{J}_z понимать как сумму проекций моментов количества движения всех частиц системы, а Φ_n и ϵ_n — как собственные функции и собственные значения энергии системы частиц в неподвижном поле.

Выражение (20,12) для момента инерции исследовалось в работе А. Бора и Моттельсона [56]; они показали, что момент инерции, вычисляемый по формуле (20,12), больше момента инерции, вычисляемого в гидродинамическом приближении, и приближается в пределе многих частиц к значению момента инерции твердого тела. Этот неудовле-

*) Момент количества движения ωI , как известно, выражается через энергию тела E' во вращающейся системе координат с помощью соотношения $\omega I = -\frac{\partial E'}{\partial \omega}$. Это соотношение позволяет получить момент инерции (20,12) непосредственно из E' .

творительный результат А. Бор и Моттelson [56] пытались исправить учетом остаточного взаимодействия между нуклонами. Под остаточным взаимодействием при этом понимается разность между истинным взаимодействием нуклонов и их взаимодействием с самосогласованным полем. К такому взаимодействию относится, например, эффект спаривания нуклонов в четно-четных ядрах, вследствие которого расстояние между уровнями энергии одночастичных состояний в четно-четных ядрах увеличивается. Соответственно увеличивается разность энергии $\epsilon_n - \epsilon_0$ в знаменателе формулы (20,12) по сравнению со случаем независимых частиц в самосогласованном поле. Это приводит к уменьшению момента инерции (20,12) по сравнению с моментом инерции твердого тела. С количественной стороны этот вопрос изучен еще недостаточно.

§ 21. Электрические квадрупольные моменты и обобщенная модель ядра

В обобщенной модели ядра предполагается, что полный квадрупольный момент ядра равен сумме квадрупольного момента $Q_{\text{колл}}$, обусловленного деформацией остова ядра, и квадрупольного момента Q_p , обусловленного несферическим распределением внешних нуклонов:

$$Q = Q_{\text{колл}} + Q_p.$$

Для ядер, далеких от магических, $Q_{\text{колл}}$ иногда превышает Q_p более чем в 20 раз. Учет $Q_{\text{колл}}$ позволяет объяснить существенные особенности экспериментально наблюдаемых квадрупольных моментов некоторых атомных ядер.

Оператор внутреннего квадрупольного момента ядра определяется выражением (см. приложение II)

$$\hat{Q} = 2 \sqrt{\frac{4\pi}{5}} \sum_{i=1}^Z r_i^2 Y_{20}(\vartheta_i, \varphi_i), \quad (21,1)$$

где Z — заряд ядра; $r_i, \vartheta_i, \varphi_i$ — сферические координаты i -го протона относительно системы координат, связанной с ядром. Согласно А. Бору и Моттelsonу [44] при равномерном распределении нуклонов коллективные координаты a_μ определяются координатами индивидуальных нуклонов с помощью соотношения

$$a_\mu = \frac{4\pi}{3A} \sum_{i=1}^A \left(\frac{r_i}{R}\right)^2 Y_{2\mu}(\vartheta_i, \varphi_i).$$

Если электрический заряд в ядре распределен равномерно, то последнее равенство можно переписать в виде

$$a_\mu = \frac{4\pi}{3Z} \sum_{i=1}^Z \left(\frac{r_i}{R}\right)^2 Y_{2\mu}(\vartheta_i, \varphi_i).$$