

спин  $J=3$  и отрицательную четность. Уровни, соответствующие одновременному возбуждению квадрупольных и октупольных колебаний, будут иметь спин  $J=1^-, 2^-, \dots, 5^-$ . Если вследствие октупольных колебаний ядро теряет центр симметрии, то становятся возможными вращения с нечетными моментами количества движения ( $1^-, 3^-, \dots$ ). Состояния с нечетными моментами смещены относительно состояний с четными моментами на величину, равную энергии октупольных колебаний.

### § 24.\* Вращательно-вибрационный спектр четно-четных ядер

Хорошо выраженные вращательные состояния наблюдаются только у ядер с массовыми числами  $A > 225$ ,  $150 < A < 185$  и  $A \sim 25$ . Для ряда других ядер, хотя первые возбужденные состояния и можно отнести к коллективным возбуждениям, их последовательность не соответствует вращательным состояниям. Так, в работе Шарф-Гольдгабер и Веннер [77] была указана большая группа четно-четных ядер в области массовых чисел  $66 < A < 150$ , у которых первый возбужденный уровень имеет спин  $2^+$  и энергию возбуждения ( $E_1$ ) от 300 кэв и выше, а второй возбужденный уровень ( $E_2$ ) имеет спин  $2^+$ ,  $4^+$  или  $0^+$ . Отношение энергии второго возбужденного состояния к энергии первого для этих ядер находилось в интервале значений от 2 до 2,5. По-видимому, у таких ядер отклонение от сферической симметрии не очень велико и возбужденное состояние нельзя разделить на вращательное и колебательное.

Для исследования (см. работу А. С. Давыдова и Г. Ф. Филиппова [78]) таких возбужденных состояний четно-четных аксиально-симметричных ядер\*) будем исходить из классического выражения энергии коллективных движений ядра

$$E = \frac{B}{2} \dot{\beta}^2 + W_{\tau_0}(\beta) + \frac{R^2}{6B\beta^2}, \quad (24,1)$$

\*) Вращательно-вибрационный спектр нечетных ядер исследован в работе А. Давыдова и Б. Мурашкина (ЖЭТФ 34, 1619, 1958).

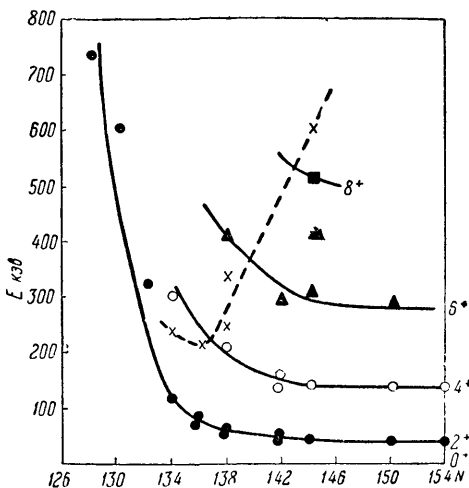


Рис. 20. Зависимость энергии первых возбужденных уровней четно-четных ядер от числа нейтронов в ядре.

полученной в § 19 (см. (19,22)). Потенциальная энергия  $W_{\gamma_0}(\beta)$  согласно (19, 20) определяется формулой

$$W_{\gamma_0}(\beta) = \frac{C}{2} \beta^2 + A\beta \cos \gamma_0 + \frac{\hbar^2 F}{6B\beta^2}, \quad (24,2)$$

где  $\gamma_0 = 0$  или  $\pi$ . Величины  $A, B, C, F$ , входящие в (24,1) и (24,2), следует рассматривать как параметры теории.

Потенциальная энергия (24,2) имеет полюс в точке  $\beta = 0$ . Наличие этого полюса соответствует тому факту, что момент инерции ядра стремится к нулю при стремлении  $\beta$  к нулю. Если в ядре имеются нуклоны вне заполненных оболочек, то даже при равном нулю полном моменте количества движения ядра момент количества движения остова и суммарный момент количества движения внешних нуклонов не являются интегралами движения и не равны нулю в отдельности, поэтому член  $\frac{\hbar^2 F}{6B\beta^2}$  всегда присутствует в потенциальной энергии (24,2).

При  $\gamma_0 = 0$  минимум потенциальной энергии (24,2) соответствует  $\beta_0$ , определяемому уравнением

$$\beta_0 = -\frac{A}{C} + \frac{\hbar^2 F}{3CB\beta_0^3}.$$

Разлагая (24,2) в ряд относительно отклонений от  $\beta_0$  и ограничиваясь квадратичными членами, имеем согласно (24,1):

$$\varepsilon \equiv E - W_0(\beta_0) = \frac{B}{2} \dot{\beta}^2 + \frac{R^2}{6B\beta_0^2} + \frac{C_0}{2} (\beta - \beta_0)^2, \quad (24,3)$$

где

$$C_0 = C + \frac{\hbar^2 F}{B\beta_0^4}.$$

Для перехода от (24,3) к квантовому уравнению учтем, что квадрат момента количества движения в системе координат  $\beta, \theta, \varphi$  с массовым коэффициентом  $B$  равен

$$R^2 = 9B^2\beta^4 (\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta).$$

Если обозначить через  $T$  кинетическую энергию коллективных движений ядра, то

$$2T dt^2 = B d\beta^2 + 3\beta^2 d\theta^2 + 3\beta^2 \sin^2 \theta d\varphi^2.$$

Теперь можно написать оператор кинетической энергии в виде (см. [79, стр. 68])

$$\hat{T} = -\frac{\hbar^2}{2B\beta^2} \left\{ \frac{\partial}{\partial \beta} \left( \beta^2 \frac{\partial}{\partial \beta} \right) + \frac{1}{3 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{3 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right\}.$$

Уравнение Шредингера, определяющее энергию коллективных движений четно-четного ядра, примет вид

$$\left[ \hat{T} + \frac{C_0}{2} (\beta - \beta_0)^2 - \varepsilon \right] \psi(\beta, \theta, \varphi) = 0. \quad (24,4)$$

Решение уравнения (24,4) можно искать в виде

$$\psi(\beta, \theta, \varphi) = \sum_J \frac{u_J(\beta)}{\beta} Y_{JM}(\theta, \varphi),$$

где  $J$  пробегает только четные значения, так как функция не должна зависеть от выбора направления аксиальной оси ядра. Функция  $u_J(\beta)$  должна удовлетворять уравнению

$$-\frac{\hbar^2}{2B} \frac{d^2 u_J}{d\beta^2} + V_J(\beta) u_J - \varepsilon u_J = 0, \quad u_J(0) = 0, \quad (24,5)$$

где

$$V_J(\beta) \approx V_J(\beta_J) + \frac{C_J}{2} (\beta - \beta_J)^2, \quad (24,6)$$

$$\beta_J = \beta_0 + \frac{\hbar^2 J(J+1)}{3BC_0 \beta_J^3}, \quad (24,7)$$

$$C_J = C_0 \left( 1 + \frac{\hbar^2 J(J+1)}{B \beta_J^4 C_0} \right). \quad (24,8)$$

Введем безразмерные параметры:

$$\delta = \beta_0 \left( \frac{BC_0}{\hbar^2} \right)^{1/4} \quad \text{и} \quad \xi = \frac{\beta_J}{\beta_0} \geq 1; \quad (24,9)$$

тогда соотношения (24,6)–(24,8) перейдут соответственно в

$$V_J(\beta_J) \approx \hbar \omega_0 \left\{ \delta^2 (\xi - 1)^2 + \frac{J(J+1)}{6c^2 \xi^2} \right\}, \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{C_0}{B}}, \quad (24,6a)$$

$$\xi^3 (\xi - 1) = \frac{J(J+1)}{3\delta^4}, \quad (24,7a)$$

$$C_J = C_0 \left( 1 + \frac{J(J+1)}{\delta^4 \xi^4} \right). \quad (24,8a)$$

Для исследования решений уравнения (24,5) введем новую переменную

$$\zeta = \frac{\xi \delta_1 (\beta - \beta_J)}{\beta_J}, \quad \delta_1 = \delta_0 \left( \frac{C_J}{C_0} \right)^{1/4} \approx \delta, \quad (24,10)$$

изменяющуюся в пределах  $-\xi \delta_1 \leq \zeta < \infty$ , и новую функцию  $v(\zeta)$  с помощью соотношения

$$u(\beta) = v(\zeta) \exp\left(-\frac{\zeta^2}{2}\right). \quad (24,11)$$

Тогда согласно (24,5) получим уравнение, определяющее функцию  $v(\zeta)$ :

$$v''(\zeta) - 2\zeta v'(\zeta) + 2\gamma v(\zeta) = 0, \quad (24,12)$$

при граничных условиях

$$v(-\delta \xi) = 0 \quad \text{и} \quad v(\zeta) \exp\left(-\frac{\zeta^2}{2}\right) \rightarrow 0, \quad \text{если} \quad \zeta \rightarrow \infty. \quad (24,13)$$

Вращательно-колебательная энергия ядра будет определяться собственным числом  $\nu$  уравнения (24,12) с помощью формулы

$$\frac{\epsilon_\nu(J)}{\hbar\omega_0} = \left(\nu + \frac{1}{2}\right) \sqrt{1 + \frac{J(J+1)}{\delta^2\xi^4}} + \frac{\delta^2}{2} (\xi - 1)^2 + \frac{J(J+1)}{6\delta^2\xi^2}. \quad (24,14)$$

Уравнение (24,12) совпадает с уравнением одномерного гармонического осциллятора. Однако вследствие граничных условий (24,13) число  $\nu$  не является целым числом. Общее решение (24,12) при нецелом  $\nu$  выражается [80, стр. 352] через функцию Эрмита первого рода:

$$\psi_\nu(\zeta) = aH_\nu(\zeta) + bH_\nu(-\zeta),$$

которая может быть представлена в виде ряда

$$H_\nu(\zeta) \equiv \frac{1}{2\Gamma(-\nu)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \Gamma\left(\frac{k-\nu}{2}\right)}{k!} (2\zeta)^k,$$

здесь  $\Gamma(x)$  — гамма-функция.

Учитывая асимптотическое поведение функции Эрмита при больших  $\zeta$ , мы убедимся, что для выполнения граничного условия (24,13)

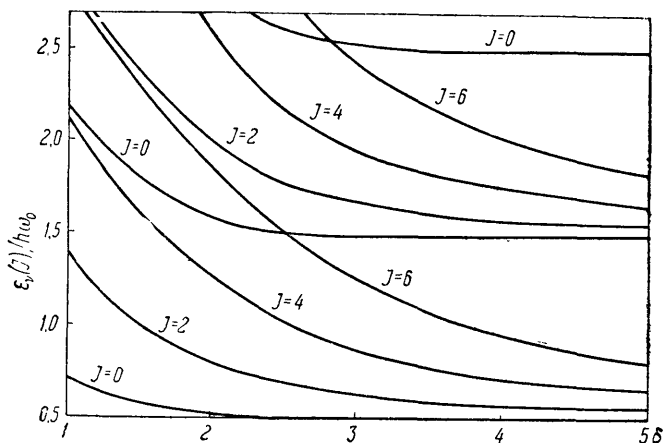


Рис. 21. Зависимость энергии возбуждения первых коллективных уровней четно-четных ядер от параметра деформации ядра.

при  $\zeta \rightarrow \infty$  необходимо положить  $b=0$ . Тогда собственные числа  $\nu$  будут определяться из условия

$$\psi(-\delta\xi) = aH_\nu(-\delta\xi) = 0. \quad (24,15)$$

Поскольку  $\xi$  при данном значении  $J$  однозначно определяется уравнением (24,7а) как функция параметра  $\delta$ , то из (24,15) и (24,14) следует, что энергия вращательно-колебательных возбуждений аксиально-симметричных четно-четных ядер зависит только от двух параметров  $\hbar\omega_0$  и  $\delta$ .

Для  $\delta \leq 1$  и  $J = 0, 2, 4$  энергия (24,14) рассчитывалась в работе А. С. Давыдова и Г. Ф. Филиппова [78], для  $\delta > 1$  энергия (24,14) рассчитывалась в работе А. С. Давыдова и А. А. Чабана [81]. На рис. 21 приведен график зависимости  $\epsilon_v(J)/\hbar\omega_0$  от параметра  $\delta$ . Из рисунка видно, что при  $\delta > 2,5$  энергетический спектр коллективных возбуждений четно-четных ядер разбивается на систему вращательно-колебательных полос. Для  $\delta < 2,5$  последовательность возбужденных состояний четно-четного ядра значительно отличается от последовательности, соответствующей вращению тела с определенным моментом количества движения. В таблице 14 приведено сравнение полученных

Таблица 14. Коллективные возбуждения некоторых четно-четных атомных ядер

Ядро	J	Энергетический уровень, кэВ		$\hbar\omega_0$ , кэВ	$\delta$	Литература
		Теория	Эксперимент			
W <sup>182</sup>	2	100,09	100,09	1001	3,48	[82,83]
	4	320,3	329,36			
	6	641,6	677,6			
	0	1001	—			
	2	1222	1222			
	4	1481	1478			
Th <sup>232</sup>	2	50	50	710	3,93	[83]
	4	163	165			
	6	332	—			
	0	710	—			
	2	770	770			
	4	901	—			
U <sup>234</sup>	2	43	43	806	4,48	[83]
	4	141	143,2			
	6	290	297			
	0	806	806			
	2	855	—			
	4	966	—			
Pu <sup>238</sup>	2	44,2	44,2	935	4,73	[83]
	4	147,7	146			
	6	304,8	309			
	0	935	935			
	2	986	986			
	4	1100	—			

теоретических значений энергии возбуждения первой и второй вращательных полос возбужденных состояний некоторых ядер с экспериментальными данными. Там же приведены значения параметров  $\hbar\omega_0$  и  $\delta$ , которые использовались при вычислении теоретических значений энергии возбуждения.

В таблице 15 приведены отношения  $\epsilon_{111}/\epsilon_{11}$ ,  $\epsilon_{21}/\epsilon_{11}$ ,  $\epsilon_{211}/\epsilon_{11}$  в зависимости от значения  $\delta$ , где  $\epsilon_{11}$ ,  $\epsilon_{21}$ ,  $\epsilon_{111}$ ,  $\epsilon_{211}$  — соответственно энергии первого и второго (1, 2) вращательных подуровней в первой и второй (I, II) полосе вращательных состояний ядра.

Т а б л и ц а 15. Отношения энергий некоторых уровней четно-четных атомных ядер

$\delta$	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0	4,5	5
$\epsilon_{111}/\epsilon_{11}$	1,48	1,39	1,36	1,31	1,26	1,21	1,16	1,13	1,11
$\epsilon_{21}/\epsilon_{11}$	2,17	2,38	2,70	2,87	2,92	3,21	3,27	3,29	3,33
$\epsilon_{211}/\epsilon_{111}$	1,76	2,16	2,43	2,52	2,94	3,16	3,25	3,27	3,31

При  $\delta > 2$  функция

$$\xi = F\left(\frac{J(J+1)}{3\delta^2}\right)$$

мало отличается от 1. Разлагая эту функцию в ряд и ограничиваясь первыми членами разложения, можно переписать (24,14) в виде

$$\epsilon_J = \epsilon_0 + \hbar\omega_0 \left\{ \frac{J(J+1)}{6\delta^2} - a \frac{J^2(J+1)^2}{\delta^6} \right\}. \quad (24,16)$$

Учитывая (24,9) и вводя момент инерции  $I = 3B\beta_0^2$ , можно переписать (24,16) в виде

$$\epsilon_J = \epsilon_0 + AJ(J+1) - BJ^2(J+1)^2, \quad (24,17)$$

где

$$A = \frac{\hbar^2}{2I}, \quad B = \frac{a}{(\hbar\omega_0)^2} \left(\frac{\hbar}{I}\right)^2. \quad (24,17a)$$

Формула типа (24,17) была предложена впервые О. Бором и Моттelsonом [44]. Как известно, она дает хорошее согласие с экспериментом, если  $A$  и  $B$  рассматривать как параметры теории. В таблице 16 приведены значения  $A$  и  $B$ , полученные из данных о вращательных уровнях энергии некоторых ядер.

Таблица 16. Значения параметров, определяющих вращательные состояния некоторых четно-четных ядер

Ядро	$A, кэв$	$B, кэв$	$\delta$
$Hf^{180}$	15,58	0,0703	3,3
$Tl^{226}$	12,16	0,043	3,7
$Pu^{238}$	7,37	0,0033	4,7

Используя (24,9) и  $I = 3B\beta_0^2$ , можно выразить параметр  $\delta$  через момент инерции и  $\hbar\omega_0$  с помощью соотношения

$$\delta^2 = \frac{\hbar\omega_0 I}{3\hbar^2} = \frac{\hbar\omega_0}{A}. \quad (24,18)$$

В четвертом столбце таблицы 16 приведены значения  $\delta$ , полученные с помощью (24,18), если положить  $\hbar\omega_0 \approx 1 Мэв$  и использовать соответствующие значения  $A$  из таблицы.

## § 25. Высокие возбужденные состояния ядер. Составное ядро

При высокой энергии возбуждения ( $> 6-7 Мэв$ ) квазистационарные возбужденные состояния ядер уже нельзя рассматривать как движения отдельного нуклона и коллективные движения определенного типа. Одной и той же энергии возбуждения будет соответствовать много различных типов возбужденных состояний. Эти возбуждения взаимно независимы только в первом приближении. В следующих приближениях из-за взаимосвязи возбуждений разного типа возникнут спонтанные переходы между ними, что приведет к значительному расширению уровней. Когда уширение уровней сравняется с расстоянием между ними, спектр возбуждения перейдет в непрерывный.

Итак, при высоких возбужденных состояниях ядра одному возбуждению соответствует много различных типов движений в ядре. Связь между этими движениями приводит к такому усложнению состояний ядра, что возникает возможность применения статистических и термодинамических методов для описания этих возбужденных состояний.

Возбуждения, значительно превышающие энергию первых ядерных уровней, возникают во многих случаях при присоединении нуклона к ядру в результате ядерных столкновений (кроме случаев столкновений с самыми легкими ядрами и магическими ядрами), так как энергия присоединения нуклона порядка  $6-7 Мэв$ , а энергия первых возбужденных уровней  $40-200 кэв$ . Сильное взаимодействие между сталкивающимися ядром и нуклоном приводит к тому, что очень скоро после столкновения (см. § 54, 58) падающий нуклон передает значительную часть своей энергии другим нуклонам ядра. В результате такого пере-