ГЛАВА VII

ЭЛЕМЕНТЫ ОБЩЕЙ ТЕОРИИ РАССЕЯНИЯ ЧАСТИЦ ПОТЕНЦИАЛЬНЫМ ПОЛЕМ

§ 42. Лабораторная система и система центра инерции

При использовании явлений рассеяния двух частиц пользуются обычно двумя координатными системами: лабораторной системой (система L), в которой одна из частиц до рассеяния покоится, а другая движется по отношению к ней, и системой центра инерции (система C), в которой покоится общий центр инерции обеих сталкивающихся частиц. В системе центра инерции обе частицы движутся до рассеяния навстречу друг другу и разлетаются в противоположные направления после рассеяния. В экспериментах все величины измеряются в лабораторной системе, теоретическое же исследование процессов рассеяния удобнее проводить в системе центра инерции. Поэтому необходимо уметь переводить величины из одной системы в другую.

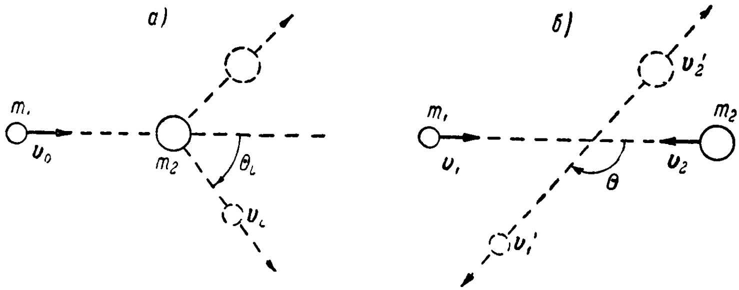

Рис. 48. Столкновение частиц массы m_1 и m_2 в лабораторной системе (*а*) и в системе центра инерции (*б*).

На рис. 48 изображен процесс столкновения двух частиц с массами m_1 и m_2 в лабораторной системе (*а*) и в системе центра инерции (*б*).

В лабораторной системе до столкновения частица массы m_1 движется со скоростью V_0, частица m_2 покоится. После столкновения частица массы m_1 движется под углом θ_L к первоначальному направлению движения. Центр инерции обеих частиц движется со скоростью

$$V_c = \frac{m_1 V_0}{m_1 + m_2}. \tag{42,1}$$

В системе центра инерции до столкновения частицы m_1 и m_2 движутся навстречу друг другу со скоростями

$$\boldsymbol{v}_1 = \frac{m_2 V_0}{m_1 + m_2}, \quad \boldsymbol{v}_2 = -\frac{m_1 V_0}{m_1 + m_2}. \tag{42,2}$$

Их относительная скорость $\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_2 = V_0$. После столкновения частицы движутся в противоположных направлениях со скоростями $\boldsymbol{v}_1'$ и $\boldsymbol{v}_2'$, причем $|\boldsymbol{v}_1'| = |\boldsymbol{v}_1|$ и $|\boldsymbol{v}_2'| = |\boldsymbol{v}_2|$. Скорость $\boldsymbol{v}_1'$ составляет угол θ с первоначальным направлением движения.

Соотношение между углами θ и θ_L определяется из условия, что скорость V_L частицы массы m_1 после столкновения в лабораторной системе должна равняться сумме скоростей $\boldsymbol{v}_1'$ в системе центра инерции и скорости центра инерции V_c, т. е.

$$V_L = \boldsymbol{v}_1' + V_c, \tag{42,3}$$

или

$$\left.\begin{aligned} V_L \cos\theta_L &= v_1' \cos\theta + V_c, \\ V_L \sin\theta_L &= v_1' \sin\theta, \\ \varphi_L &= \varphi. \end{aligned}\right\} \tag{42,3a}$$

Исключая из этих соотношений V_L, находим:

$$\operatorname{tg}\theta_L = \frac{\sin\theta}{\gamma + \cos\theta}, \tag{42,4}$$

где

$$\gamma = \frac{V_c}{v_1'} = \frac{m_1}{m_2}\,^{*)}. \tag{42,4a}$$

Из соотношения (42,4) следует, что при $\gamma < 1$ угол рассеяния θ_L в лабораторной системе монотонно увеличивается от 0 до π, когда угол θ в системе центра инерции увеличивается от 0 до π (рис. 49). При $\gamma = 1$ угол рассеяния в лабораторной системе всегда в 2 раза меньше угла рассеяния в системе центра инерции $\theta_L = \frac{\theta}{2}$. При $\gamma > 1$ угол рассеяния θ_L в лабораторной системе всегда меньше $\pi/2$. Он монотонно возрастает от нуля до максимального значения, определяемого равенством

*) Если происходит неупругое рассеяние в результате которого образуются две другие частицы с массами m_1' и m_2' и выделяется ($Q > 0$) или поглощается ($Q < 0$) энергия Q, то $\gamma = \left(\frac{m_1 m_1'}{m_2 m_2'} \frac{\varepsilon}{\varepsilon + Q}\right)^{1/2}$, где $\varepsilon = \frac{m_1 m_2}{2(m_1 + m_2)} V_0^2$ — энергия относительного движения.

$(\sin\theta_L)_{\max}=\frac{1}{\gamma}=\frac{m_2}{m_1}$, при увеличении θ от нуля до $\arccos\left(-\frac{1}{\gamma}\right)$. При дальнейшем увеличении θ до значения π θ_L уменьшается до нуля (рис. 49).

Соотношение между эффективными сечениями в обеих системах координат может быть получено из условия равенства числа рассеянных

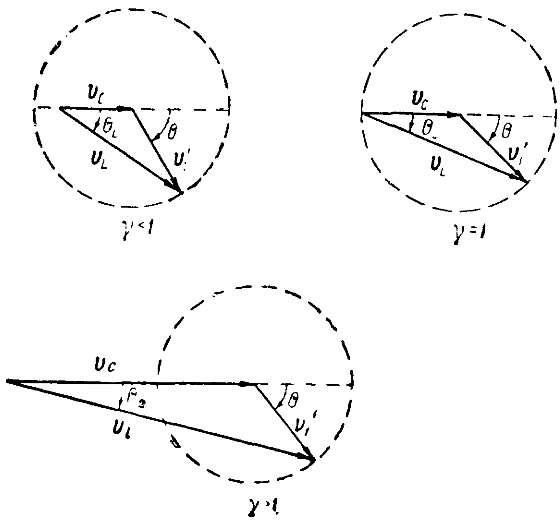

Рис. 49. Соотношение между углами рассеяния в лабораторной системе (θ_L) и системе центра инерции (θ) в зависимости от отношения масс ($\gamma=m_1/m_2$) сталкивающихся частиц.

частиц в одном и том же пространственном направлении. Это условие имеет вид

$$\sigma_L(\theta_L,\varphi_L)\sin\theta_L\,d\theta_L\,d\varphi_L=\sigma(\theta,\varphi)\sin\theta\,d\theta\,d\varphi. \qquad (42,5)$$

Из (42,4) следует

$$\cos\theta_L=\frac{\gamma+\cos\theta}{\sqrt{1+2\gamma\cos\theta+\gamma^2}},$$

откуда

$$\sin\theta_L\,d\theta_L=\frac{1+\gamma\cos\theta}{(1+\gamma^2+2\gamma\cos\theta)^{3/2}}\sin\theta\,d\theta.$$

Подставляя полученное равенство в (42,5) и учитывая, что $\varphi_L=\varphi$, имеем:

$$\sigma_L(\theta_L,\varphi_L)=\frac{(1+\gamma^2+2\gamma\cos\theta)^{3/2}}{|1+\gamma\cos\theta|}\sigma(\theta,\varphi). \qquad (42,6)$$

Полное сечение рассеяния, естественно, в обеих системах координат должно быть одинаковым.

В частном случае $\gamma = 1$ из (42,6) следует

$$\sigma_L(\theta_L, \varphi_L) = 2^{3/2}(1+\cos\theta)^{1/2}\,\sigma(\theta, \varphi). \tag{42,7}$$

Поскольку $\theta_L = \frac{\theta}{2}$, то из (42,7) получим:

$$\sigma_L(\theta_L, \varphi_L) = 4\sigma(\theta, \varphi)\cos\theta_L. \tag{42,8}$$

Если $E_0 = \frac{m_1 V_0^2}{2}$ — энергия частицы с массой m_1 в лабораторной системе координат до столкновения, то энергия относительного движения частицы с приведенной массой $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ в системе центра инерции будет равна

$$E = \frac{\mu V_0^2}{2} = \frac{m_2}{m_1 + m_2} E_0. \tag{42,9}$$

Из (42,3), используя (42,1) и (42,2), получим (после соударения) квадрат скорости частицы m_1 в лабораторной системе координат

$$V_L^2 = V_0^2 \frac{m_1^2 + m_2^2 + 2m_1 m_2 \cos\theta}{(m_1 + m_2)^2},$$

следовательно, энергия частицы m_1 в лабораторной системе координат

$$E_L^{(1)} = \frac{m_1 V_L^2}{2} = E_0 \frac{m_1^2 + m_2^2 + 2m_1 m_2 \cos\theta}{(m_1 + m_2)^2}. \tag{42,10}$$

Таким образом, эта энергия заключена в следующих пределах:

$$\left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right)^2 E_0 \leqslant E_L^{(1)} \leqslant E_0.$$

Энергия частицы m_2 в лабораторной системе до соударения равна нулю, после соударения ее энергия

$$E_L^{(2)} = \frac{4m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2} E_0 \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right),$$

поэтому пределы изменения энергии частицы m_2 после соударения будут

$$0 \leqslant E_L^{(2)} \leqslant \frac{4m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2} E_0.$$

Все приведенные выше формулы относятся к случаю нерелятивистского движения, т. е. они справедливы только для энергий относительного движения, значительно меньших энергий покоя этих частиц. Энергия покоя нуклона ~ 931 *Мэв*, поэтому при исследовании рассеяния нуклонов выведенными здесь формулами можно пользоваться вплоть до энергий ~ 100 *Мэв*.

В дальнейшем изложении, если не будет делаться специальная оговорка, мы будем пользоваться только системой координат центра инерции.

§ 43. Упругое рассеяние в потенциальном поле

Упругим рассеянием называется рассеяние, при котором не меняются внутренние состояния и состав сталкивающихся частиц.

В нерелятивистском приближении задача рассеяния одной частицы (m_1) на другой (m_2) может быть сведена к задаче рассеяния некоторой фиктивной частицы, обладающей приведенной массой $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ в потенциальном поле, являющемся функцией относительных координат и спинов сталкивающихся частиц *). Такое сведение задачи упругого рассеяния двух частиц к движению фиктивной частицы с приведенной массой в потенциальном поле осуществляется простым переходом к системе координат, связанной с центром инерции сталкивающихся частиц, которой мы и будем дальше пользоваться. Предположим далее для простоты, что спины сталкивающихся частиц равны нулю.

Начальной стадией процесса рассеяния является движение навстречу друг другу двух бесконечно удаленных частиц. При их сближении взаимодействие между частицами меняет состояние их движения, затем частицы разлетаются. Конечной стадией процесса рассеяния является движение частиц друг от друга.

Часто удобно вместо временного описания задачи рассеяния рассматривать эквивалентную стационарную задачу (см. главу IX). При стационарном описании явления рассеяния предполагается, что имеется непрерывный поток частиц, летящих из бесконечности, который из-за взаимодействия с рассеивающим центром переходит в поток разлетающихся (рассеянных) частиц. Задача рассеяния состоит в вычислении при заданном силовом поле потока рассеянных частиц на бесконечном расстоянии от рассеивающего центра как функции потока падающих частиц.

В стационарной формулировке рассеяние частицы с массой μ и положительной энергией ε в потенциальном поле $V(\boldsymbol{r})$ определяется уравнением Шредингера

$$(\Delta + k^2)\,\psi(\boldsymbol{r}) = u(\boldsymbol{r})\,\psi(\boldsymbol{r}), \tag{43,1}$$

где Δ — оператор Лапласа; $k^2 = \frac{2\mu\varepsilon}{\hbar^2}$; ε — энергия относительного движения двух сталкивающихся частиц; $u(\boldsymbol{r}) = \frac{2\mu}{\hbar^2} V(\boldsymbol{r})$.

*) В некоторых задачах рассеяния приходится учитывать и спин-орбитальное взаимодействие.